АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Тувинский комплексный отдел

На правах рукописи

УДК 530.I+530.I2

ЛЕВ Владимир Хананович

ТРЕХМЕРНЫЕ И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(0I.04.02 - теоретическая и математическая физика)

ВЛев

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук КУЛАКОВ Ю.И.

Кулаков

Кызыл

1989 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ:

ВВЕДЕНИЕ

Физика представляет собой сложную иерархическую систему фундаментальных физических законов и понятий, основных уравнений и общефизических принципов, наблюдаемых и ненаблюдаемых физических величин, равновесных и неравновесных процессов и т.п.

Теоретическая физика формировалась как совокупность отдельных физических дисциплин, в основании которых лежат те или иные достаточно общие динамические уравнения. Так основу механики составляют уравнения Ньютона, Лагранжа, Гамильтона-Якоби; гидродинамики - уравнения Эйлера, Навье-Стокса; электродинамики - уравнения Максвелла; теории гравитации - уравнение Эйнштейна; квантовой механики - уравнения Шредингера, Дирака и т.д. Долгое время считалось, что поиск новых динамических уравнений является основной задачей теоретической физики.

Оказалось, что основные динамические уравнения при определенных условиях инвариантны относительно некоторой группы преобразований. Сначала теория групп играла вспомогательную роль, как математический метод, позволяющий извлекать частичную информацию о физической системе без интегрирования уравнений. Однако развитие теории элементарных частиц поставило теорию групп во главу угла. Теперь симметрия выступает на первый план, так как выяснилось, что представления соответствующих групп несут самую фундаментальную информацию о системе. Таким образом, симметрия оказывается первичным, наиболее глубоким инструментом для физического описания природы [I] .

Принципы симметрии имеют более фундаментальный характер, чем законы движения. Знание инфинитезимальной структуры группы симметрии позволяет найти естественный набор основных физических величин (генераторов группы и ее инвариантов), с помощью которых описывается состояние системы. Так, например, элементарные частицы определяются как объект, состояния которого образуют базис неприводимого представления той или иной группы симметрии [2] .

Проникновение теории групп в физику еще более активизировало стремление физиков связать различные физические теории в единую теоретическую систему. "С самого начала, - писал Альберт Эйнштейн, - проявилось стремление найти для унификации всех отраслей науки теоретическую основу, образованную минимальным числом понятий и фундаментальных соотношений, из которой логическим путем можно было бы вывести все понятия и соотношения отдельных дисциплин" [3] . В единстве познания отражается единство природы.

Первоначальную форму единство познания нашло в аксиоматике, а геометрическое знание - первое из существующего в свое время знания - стало наукой, будучи построено аксиоматически Евклидом. Через много столетий в 1899 г. вышли в свет "Основания геометрии" Д.Гильберта, в которых геометрия Евклида подверглась строгой и полной аксиоматизации.

То же стремление всегда наблюдалось и в физике. Еще в 1788 году в предисловии к "Аналитической механике" Ж.Лагранж писал о цели своей книги: "Она объединит и представит с одной и той же точки зрения различные принципы" [4] . Стремление сформулировать законы механики в наиболее общем и инвариантном относительно выбора обобщенных координат виде привело Гамильтона и Якоби к созданию своеобразного канонического формализма, который в дальнейшем послужил основой для создания квантовой механики. Стремление к аксиоматизации и объединению различных физических принципов проявилось и в других разделах физики, например, в термодинамике, которая, благодаря прежде всего работам Дж.Гиббса, обрела стройность и логическую завершенность аксиоматической теории. Все эти достижения базировались на решительной математизации физического знания.

Впервые проблему математизации физического знания сформулировал великий Д.Гильберт. В 1900 году на II Международном Конгрессе математиков в Париже он огласил сформулированный им список из двадцати трех проблем. Двадцать две проблемы были чисто математическими. И лишь одна - Шестая проблема - касалась аксиоматизации теоретической физики [5] :

> "Провести построение физических аксиом по образцу аксиом геометрии так, чтобы небольшим количеством аксиом охватить возможно более общий класс физических явлений".

История развития единого физического знания показала, что наиболее значительных успехов теоретическая физика достигла на пути непосредственной геометризации физики.

§ I. Геометризация физики

Связь геометрии с физикой всегда была очень тесной. Первым звеном в цепи идей по геометризации физики следует считать многочисленные попытки доказать пятый постулат Евклида о параллельных линиях. Казалось, что это никак не связано с физикой и относится к внутренним проблемам геометрии. Но нельзя отрывать геометрию от физики:"Геометрические закономерности являются всего лишь отражением отношений тел и физических объектов, не более" [6] . Теперь нам ясно, что геометрия Евклида выполняется лишь в масштабах нашей обыденной жизни.

Второе звено - создание первой неевклидовой геометрии. Этот шаг связан с именами Лобачевского Н.И., Бояи Я., Карла Гаусса. Они не ограничились математической стороной сделанного открытия и поставили вопрос об отношении новой геометрии к физической реальности. Так Гаусс измерял сумму углов треугольника, образованного тремя горными вершинами, а Лобачевский проводил астрономические измерения, используя два положения Земли на орбите и далекую звезду, а также измерял параллаксы звезд. В 70-х годах прошлого века было дано окончательное доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского итальянским геометром Э.Бельтрами и немецким математиком Ф.Клейном.

Следующий существенный шаг в цепи идей о геометрии пространства сделали К.Гаусс и Б.Риман. Они заложили основы общей теории искривленных пространств произвольного числа измерений. Гаусс развил математический аппарат описания двумерных кривых поверхностей. Б.Риман в своем мемуаре "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" [7] объединил две плодотворные идеи: во-первых, он использовал аппарат, развитый Гауссом, и, во-вторых, ввел понятие "многократно протяженных величин". Такой синтез идей позволил Риману построить не только еще одну неевклидову геометрию (сферическую геометрию), но и открыть широкий класс римановых геометрий. Говоря о вкладе Римана, Эйнштейн писал: "...Риман пришел к смелой мысли, что геометрические отношения тел могут быть обусловлены физическими причинами, то есть силами. Таким образом, путем чисто математических рассуждений он пришел к мысли о неотделимости геометрии от физики..." [8]. Интересно, что Риман уже размышлял о природе тяготения [9], но при этом не привлекал своих геометрических идей.

Важное место в цепочке основополагающих идей геометризации физики заняли работы английского математика В.Клиффорда [10]. В посмертно вышедшей его книге "Здравый смысл точных наук" (1879) он обсуждал вопрос, можно ли "рассматривать как изменения физического характера те действия, которые на самом деле обязаны своим происхождением изменениям в кривизне нашего пространства". Более того, там же сделаны предположения, что такими изменениями физического характера могли бы быть теплота, свет, электромагнитное поле. Это - одна из первых гипотез о геометризации электромагнитного поля. Клиффорд значительно более определенно, нежели Риман, ставил вопрос о возможном физическом проявлении искривленного пространства. В той же книге он писал: "... изменение кривизны пространства - это то, что в действительности происходит при том явлении, которое мы называем движением материи, как весомой, так и эфира; что в физическом мире не имеет места ничего кроме этого изменения, подчиняющегося (возможно) закону непрерывности" [10, с.36] . Это не что иное, как выдвижение программы полной геометризации всей материи. В этом русле работают известный американский теоретик Уилер и его школа [11,12] .

Существенную роль в развитии идей по геометризации физики сыграл австрийский физик Э.Мах [13,14] . Его роль была многоплановой. Во-первых, очень важным был проделанный им критический анализ основ механики Ньютона. Во-вторых, в статье "Пространство и геометрия с точки зрения естествознания" [13, с.389] Мах дал глубокий позитивный анализ математических и физических аспектов развития представлений о геометрии пространства, подробно охарактеризовал роль Лобачевского, Бояи, Гаусса, Римана и других ученых. Он исходил из того, что "...геометрия есть применение математики к опыту относительно пространства". Мах сыграл важную роль в подготовке условий для создания общей теории относительности. Под сильным влиянием идей Маха оказался весь начальный период деятельности Эйнштейна. Создавая общую теорию относительности, он был уверен, что работает над реализацией идей Маха [3, с.29] .

К началу XX века были подготовлены все условия к одному из решающих шагов в геометризации физики - созданию общей теории относительности. Выдающиеся геометры С.Ли, Б.Кристоффель, Г.Риччи, Г.Леви-Чивита и другие к этому времени уже разработали необходимый математический аппарат искривленных многомерных многообразий (римановой геометрии). Следующий шаг - переход от трехмерного искривленного пространства к четырехмерному пространству-времени - был сделан в самом начале нашего века в трудах Х.Лоренца, А.Пуанкаре, А.Эйнштейна, Г.Минковского и других [15-18]. В результате была создана специальная теория относительности. Далее была открыта дорога для создания общей теории относительности, которая была разработана в период с 1907 по 1916 г.

Начало ее было положено разделом У статьи Эйнштейна "О принципе относительности и выведенных из него следствиях" [9, с.101], где уже указана связь между тяготением и принципом эквивалентности и ускоренными системами отсчета. В 1913 г. выходит статья А.Эйнштейна и М.Гроссмана "Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения" [9, с.112], где впервые увидела свет идея о геометризации тяготения, но не говорилось прямо о римановой геометрии или о кривизне пространства-времени (а только о метрическом тензоре). И, наконец, в 1916 г. вышли две работы, в которых создание общей теории относительности стало свершившимся фактом: "Основания физики" Д.Гильберта и "Основы общей теории относительности" [9, с.133, 146].

История развития и наиболее характерные черты общей теории относительности обсуждались многими авторами [19-21]. Суть знаменитых уравнений Эйнштейна состоит в установлении связи между геометрическими характеристиками пространства-времени и физическими свойствами материи, которая индуцирует искривленность. Кривизна пространства-времени приобрела физическую значимость. В общей теории относительности были геометризованы гравитационные взаимодействия.

Но в современной теории есть также тензор электромагнитного поля, функции скалярного поля и другие, которые рассматриваются как внешние к геометрии величины. Вопрос о том, нельзя ли построить такую теорию, в которой все величины имели бы геометрическое толкование, был поставлен еще Клиффордом.

Вслед за успехом геометризации гравитационного взаимодействия Вейль Г. в 1918 г. сделал конкретную попытку описать средствами геометрии электромагнитное поле. В рамках 4-мерного пространства-времени он предложил более общую теорию, в которой, кроме допустимых координатных преобразований, еще допускаются изменение масштабов (конформные преобразования). Электромагнитное поле в теории Вейля трактуется ответственным за изменение длин при переходе из одной точки в другую. Это был первый пример нериманововой геометрии. Затем А.Эддингтон указал более широкий класс нериманововых геометрий (с так называемой "неметричностью"). Вскоре после этого Э.Картан предложил другой класс нериманововых геометрий - это геометрии с кручением. Затем еще более общие дифференциальные геометрии были найдены Я.Схоутеном.

Еще одним важным звеном в цепи идей по геометризации физики являются многомерные (с размерностью пространства-времени $n > 4$) теории. Представления о многомерных пространствах возникли впервые в математике. Идеи многомерности были сформулированы в работах Г.Грассмана и А.Кэли в первой половине XIX в. Глубокие соображения о размерности физического пространства можно найти в знаменитом мемуаре Римана [7], где он ввел понятие " n-кратно протяженных величин". Задолго до этого еще Лагранж рассматривал в механике четырехмерные конфигурационные пространства. Э.Мах приводил ряд примеров из физики, где также плодотворно использовал понятие многомерности. В своей книге "Познание и заблуждение" Мах писал: "Наша геометрия относится всегда к объектам чувственного мира. Но если мы оперируем с абстрактными вещами, ... мы не имеем более никакого права обязательно мыслить эти вещи в отношениях, в относительных положениях, соответствующих Евклидову трехмерному пространству нашего чувственного опыта" [13, с.417] .

Этот ход мысли уже несколько раз сыграл свою роль в физике (обобщение Риманом теории Гаусса двумерных искривленных поверхностей; переход от трехмерного пространства и одномерного времени к четырехмерному пространству-времени Минковского и др.).

В 1921 г. Т.Калуца [9, с.529] предложил способ объединения гравитации и электромагнитного поля на основе гипотезы о пятимерии нашего мира. Эйнштейн в 1927 г. в своей работе "К теории связи гравитации и электричества Калуцы" развил идеи Калуцы дальше. В этом же направлении работали О.Клейн, В.А.Фок, Г.Мандель, Ю.Б.Румер и другие.

В 30-х годах интерес к исследованиям по пятимерию резко упал. Крутой перелом в понимании идей Калуцы произошел в 70-х годах. К этому времени созрели условия для решения задачи объединения всех видов фундаментальных взаимодействий.

Разрабатывались различные подходы для решения этой проблемы. При этом важной задачей являлась разработка подходов, которые акцентировали бы внимание на общих чертах различных теорий. Одним из таких подходов является аппарат универсальных нелинейных уравнений первого порядка в матричной форме, разработанный Ф.И.Федоровым и его учениками применительно к теории гравитации, скалярной электродинамике, квантовой хромодинамике [22-24] .

На основе введения универсальной матричной формы для нелинейных уравнений полей Ф.И.Федоровым была дана новая формулировка теории суперсимметрии и супергравитации [25,26] .

В начале 80-х годов появились работы по 6-ти, 7-и и II-мерию, в которых явно видна аналогия с пятимерием Калуцы. "Чудо Калуцы" обсуждается во многих работах [27,28] .

Современные теории (суперсимметрия, супергравитация, суперструны и т.д.) существенным образом опираются на идею о многомерии физического пространства-времени - одно из звеньев программы геометризации физики.

В последнее десятилетие математики и физики стали свидетелями еще одной конвергенции идей. С одной стороны в физике возникли калибровочные теории, развитые для единого описания электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий, с другой - чисто математическое развитие римановой геометрии привело к понятию расслоенных пространств. Математики и физики поняли, что в калибровочных теориях используются связности (векторные потенциалы) в расслоенных пространствах. Один из главных создателей калибровочных теорий Ч.Янг писал: "Я был изумлен, увидев, что калибровочные поля - это в точности связности в расслоенных пространствах" [29] .

Таким образом, программа геометризации физики представляется как развитие классической линии исследований, берущей начало от работ Н.И.Лобачевского, Б.Римана, В.Клиффорда, Э.Маха и затем развивавшейся А.Эйнштейном, Т.Калуцей, В.А.Фоком и рядом других ученых.

Рассматривая различные разделы теоретической физики, можно заметить, что все они наиболее естественным путем могут быть изложены на языке геометрии. Можно сказать, что:

- механика Гамильтона - это геометрия симплектического пространства;

- квантовая механика (Дирака, фон Неймана) - это геометрия бесконечномерного унитарного пространства;

- квантовая механика Фейнмана - это геометрия пространства функционалов;

- электродинамика Максвелла - это геометрия дифференциальных форм в 4-мерном пространстве Минковского и т.п. Геометризация всей физики должна предполагать "геометрический плюрализм", то есть широкое использование самых различных геометрий, выбираемых на основе одного или нескольких общефизических принципов.

Идея геометризация физики оказалась очень плодотворной. На этом пути достигнуты большие успехи. Но, естественно, есть и проблемы.

Уже к концу прошлого века в математике были открыты различные геометрии - евклидова, аффинная, проективная, геометрия Римана и Лобачевского. Для более глубокого понимания необходимо было найти то общее, что присуще всем открытым геометриям. Оказалось, что таким объединяющим началом является группа тех или иных преобразований.

В 1872 г. в своей знаменитой "Эрлангенской программе" [7, с.399] Ф.Клейн провозгласил: "Дайте мне группу, и я построю соответствующую ей геометрию". При этом под геометрией понималась теория инвариантов данной группы, то есть теория, изучающая свойства фигур, сохраняющиеся при всех преобразованиях данной группы. Таким образом, была установлена связь между геометрией и алгеброй.

Однако, какую группу выбрать из их необозримого количества для построения геометрии? Ведь число групп лавинообразно растет с ростом числа групповых параметров. Какие геометрии адекватно подходят для описания различных физических явлений? Та же ситуация наблюдается и в калибровочных теориях, основанных на подходе Янга-Миллса. Этот подход не диктует выбор той или иной группы для построения физической теории. Выбор группы должен определяться из условий соответствия с экспериментом и рядом теоретических соображений. И в многомерных теориях - та же проблема: какую размерность пространства-времени выбрать для создания теории суперсимметрии или супергравитации?

Ситуация осложняется тем, что такие фундаментальные понятия как пространство, время, масса, заряд и т.д. существуют на уровне формальных определений и интуитивных представлений. Да и само понятие физического закона является туманным и неопределенным.

Математики первые предложили программу построения своей науки как целостной системы знания. В сочинениях Н.Бурбаки было показано, что в основании математики лежат три независимые порождающие структуры - алгебраическая, топологическая и структура порядка. Аналогичная задача "бурбакизации" может быть поставлена и в физике - свести все многообразие фундаментальных физических законов, понятий и величин к одной (или небольшому числу) универсальной физической структуре, имеющей смысл особой скрытой симметрии мира физических объектов [30].

На этом пути были предложены различные модели и принципы. Одним из возможных путей осуществления такой программы является теория физических структур.

§ 2. Теория физических структур

В конце 60-х годов Ю.И.Кулаковым был сформулирован новый взгляд на природу и математическую структуру фундаментальных физических законов и основных физических величин и понятий. Было высказано предположение о существовании нового типа симметрии - феноменологической симметрии. Новая симметрия выражает идею равноправия физических объектов некоторого рода по отношению к физическому закону, действующему для этих объектов. Изучение феноменологической симметрии составляет предмет теории физических структур (ТФС) [31-40].

Согласно идеям Ю.И.Кулакова особенностью физического мира является существование различных совокупностей (множеств), состоящих из однородных, в принципе, неразличимых элементов.

Конечно, объединение всех изучаемых объектов в те или иные множества с более или менее четко определенными элементами требует от исследователя глубокой интуиции. Свойства элементов любого множества проявляются лишь в отношении их друг к другу. ТФС – это наука об универсальных отношениях. "Все, что существует, находится в отношении, и это отношение есть истина всякого существования" (Г.В.Ф.Гегель). Общая концепция, лежащая в основе этого подхода, такова:

Предметом изучения любой научной теории являются не сами объекты материального мира, а отношения между ними.

Теория физических структур исходит из хорошо известных физических законов и основных уравнений и выделяет из них нечто общее, универсальное, присущее всем фундаментальным физическим законам независимо от конкретной физической природы изучаемых объектов и используемых при этом измерительных приборов.

Оказывается, что с каждым фундаментальным физическим законом тесно связан определенный тип устойчивых отношений (физическая структура определенного ранга). Строгая математическая формулировка понятия физической структуры делает возможным изучение общих свойств физических законов с той же степенью строгости, какая имеет место в математике при аксиоматическом методе изложения [41-45] .

Исходные физические предпосылки теории физических структур сводятся к следующему:

1. Физический закон должен быть справедлив для всех физических объектов, принадлежащих к достаточно богатому множеству (идея однородности или равноправия).

2. Экспериментально измеряемые величины, входящие в выражение физического закона, характеризуют отношения двух физических объектов (идея бинарности отношений).

3. Физический закон - это связь между измеряемыми на опыте величинами (возможность непосредственной физической интерпретации).

Перечисленные весьма общие предположения можно сформулировать в виде некоторого принципа - принципа феноменологической симметрии.

Пусть $\mathfrak{M} = \{i, j, k, \ldots, v, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta, \ldots\}$ - два множества физических объектов различной природы. Будем говорить, что физические объекты этих двух множеств находятся в отношении феноменологической симметрии ранга (r, s), если имеет место следующая ситуация:

I. Каждой паре физических объектов, например, $j \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ с помощью некоторого измерительного прибора μ сопоставляется число $f^{\mu}(j\alpha)$.

2. Если из множества $\mathfrak{M}$ выбрать произвольным образом подмножество $\mathfrak{M}_r = \{j_1, \ldots, j_r\}$, состоящее из r элементов, а из множества $\mathfrak{N}$ - подмножество $\mathfrak{N}_s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, состоящее из s элементов, то между $r \cdot s$ экспериментальными данными, относящимися к любой паре $\langle j\alpha \rangle \in \mathfrak{M}_r \times \mathfrak{N}_s$, имеет место какая-либо (заранее неизвестная) зависимость:

$$\Phi\left[f(j_1\alpha_1), \ldots, f(j_1\alpha_s), \ldots, f(j_r\alpha_1), \ldots, f(j_r\alpha_s)\right] = 0 \qquad (I)$$

для любых $\mathfrak{M}_r \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_s \subset \mathfrak{N}$.
На множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, функцию $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ и Φ вводятся некоторые достаточно естественные ограничения.

При выполнении этих условий говорится, что на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана физическая структура ранга (r, s). Оказывается, что требование существования зависимости (I) является достаточным для нахождения не только явного вида функции Φ, определяющей собой вид физического закона в феноменологически инвариантной форме, но и для получения допустимого набора физических величин $f(j\alpha)$. Причем вопрос о существовании физического закона (функции Φ) исследуется независимо от его конкретной интерпретации.

Таким образом, возникает чисто математическая задача: при фиксированных числах r и s найти такую функцию $r \cdot s$ переменных $\Phi(u_1, \ldots, u_{rs})$ и такой набор значений $f(j\alpha)$, чтобы при любом выборе подмножеств $\mathfrak{M}_r$ и $\mathfrak{N}_s$ имело место соотношение (I). Эта математическая задача была решена Г.Г.Михайличенко [46–49]. Он построил полный класс всех бинарных физических структур ранга (r, s) при $r, s \geq 2$. Было показано, что существуют структуры только для $r = s \geq 2$; $r = s+1 \geq 3$ и $r = s+2 = 4$. Для этих структур был найден явный вид функций Φ и $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$.

До сих пор рассматривались физические структуры, определенные на двух множествах физических объектов различной природы. Вполне естественно рассмотреть вопрос о существовании физических структур на одном множестве. Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое множество однородных физических объектов. Выберем из этого множества подмножество $\mathfrak{M}_r$, состоящее из r элементов $j, k, \ldots, v, \omega \in \mathfrak{M}_r$, и сопоставим каждой паре элементов $\langle jk \rangle$ число $f(jk) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что физические объекты множества $\mathfrak{M}$ находятся в отношении феноменологической симметрии ранга r, если для любого $\mathfrak{M}_r \subset \mathfrak{M}$ имеет место зависимость

$$\Phi\,[f(jk), \ldots, f(v\omega)] = 0, \qquad (2)$$

где $j, k, \ldots, v, \omega \in \mathfrak{M}_r$ и число переменных, от которых зависит функция Φ, равно $r(r-1)/2$. При тех же ограничениях на множество $\mathfrak{M}$, функцию $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ и функцию Φ

возникает другая математическая задача: при фиксированном числе r найти такую функцию Φ от $r(r-1)/2$ переменных и такой набор $f(jk)$, чтобы при любом выборе подмножества $\mathfrak{M}_r \subset \mathfrak{M}$ имело место соотношение (2).

Новый подход, разработанный Ю.И.Кулаковым и его последователями, привел к ряду интересных результатов. Теория физических структур позволяет рассматривать с единой точки зрения различные физические теории. В работах [50-55] показано, что физические структуры наименьших рангов на двух множествах соответствуют основным законам физики: структура ранга (2 ,2) - 2-му закону Ньютона, (2,3) - полному закону Ома, (3,3) - отвечает за появление спиноров (биспиноров) в физике, (4,4) - электродинамике Максвелла и т.д.

Физические структуры на одном множестве описывают евклидовы геометрии различной размерности, геометрии пространств постоянной кривизны, пространство-время Минковского и целый ряд "экзотических" геометрий [56-59] . На языке ТФС можно также описать такие различные разделы физики как термодинамика, специальная теория относительности, релятивистская механика и другие [60-63] .

Важным моментом является то, что, оперируя только с отношениями между элементами одного или различных множеств, ТФС дает возможность получения свойств самих элементов. Основные физические величины (масса, сила, время, длина, заряд, интервал и т.д.) возникают здесь как своеобразные феноменологические инварианты, следующие из самого факта существования феноменологической симметрии [64-67] .

Новый, порой неожиданный, взгляд на сущность физических законов и понятий, разрабатываемый в ТФС, позволяет рассматривать некоторые вопросы, стоящие перед физиками, с другой точки зрения.

Так в теории размерности имеется ряд принципиальных вопросов:

- какова физическая и математическая природа размерности;

- диктуется ли выбор числа основных единиц только соображениями удобства или это число определяется самой природой физического мира, и другие.

В работах [68,69] эти вопросы исследуются с точки зрения теории физических структур.

Предположение о существовании феноменологической симметрии использовано в работах, посвященных обсуждению новых вариантов таблицы химических элементов [70,71] .

Основное положение о существовании устойчивых отношений между определенными группами элементов перекликается с вопросами самоорганизации материи, динамической экологией, существованием "экологических ниш" [72,73] .

Особенно большой вклад в развитие теории физических структур и ее приложение к физике элементарных частиц внес проф.Владимиров Ю.С. Используя основные соотношения ТФС, он показал, что физическая структура ранга (3,3) после процедуры комплексификации соответствует теории спиноров и биспиноров [74,75] и что фундаментальное отношение между двумя парами разноименных элементов соответствует спинтензорному инварианту в теории спиноров. Этот инвариант имеет смысл квадрата вектора в 4-мерном многообразии с сигнатурой $(+---)$. Естественным путем получаются все пять матриц Дирака. Таким образом, понятия физической структуры ранга (3,3) могут быть непосредственно сопоставлены с терминами и выражениями релятивистской электродинамики.

Одним из центральных вопросов современной теоретической физики является создание теории "великого" объединения физических взаимодействий. В физической теории обычно взаимодействия связываются с нарушениями тех или иных симметрий. Взаимодействие вводится через локализацию соответствующих групп Ли (калибровочный подход). Кроме того, имеется многомерный геометрический подход в рамках теории Калуцы-Клейна.

В теории физических структур на первый план выступают фундаментальные симметрии (физические структуры). В работе [75] Ю.С.Владимиров показывает, что физические взаимодействия можно получить из ТФС, не нарушая структуры, переходом к физическим структурам более высокого ранга (принцип "бинарного многомерия"). В частности описывается переход от физической структуры ранга (4,4;а) к теории электромагнитного взаимодействия через теорию прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия [76] . Показана принципиальная возможность описания электрослабых и сильных взаимодействий, опираясь на структуры ранга (4,4;а) и (4,4;б), приводящих к $SU(2)$ и $SU(3)$ -симметриям. В работе [75] Владимиров Ю.С. формулирует гипотезу об объединении электрослабых и сильных взаимодействий в рамках структуры ранга (5,5;а) и о возможном объединении всех взаимодействий на базе структур более высоких рангов.

Описанные результаты, полученные с помощью теории физических структур, основывались на физических структурах, заданных на двух множествах. Это естественно, так как эти структуры были полностью исследованы Г.Г.Михайличенко.

Что касается физических структур, заданных на одном множестве, то для рангов $\tau = 3$ и $\tau = 4$ задача была решена Михайличенко Г.Г. [77,78] . Для структуры ранга $\tau = 4$ оказалось, что некоторые выражения совпадают с известными метриками двумерных пространств (пространств постоянной кривизны, симплектического пространства, различных плоскостей). Кроме того были получены и неизвестные выражения.

Хорошо известно, что задание метрики в пространстве определяет геометрию этого пространства. По известной метрике можно найти полную группу преобразований этого пространства, относительно которой метрика инвариантна. На основании этого Михайличенко Г.Г. высказал предположение о связи групповой и феноменологической симметрии [79-82] .

Казалось бы, что групповым методом можно найти все невырожденные метрики любых n-мерных пространств. Для структуры ранга $\tau = 4$ групповым методом были найдены все двумерные геометрии [83,84]. Они совпали с геометриями, найденными методами ТФС. Но найти невырожденные метрики для трехмерных пространств (структура ранга $\tau = 5$) групповым методом не удалось.

Дело в том, что принципиальным моментом в групповом подходе является наличие групповой классификации (или классификации соответствующих алгебр Ли). Дать такую классификацию для любого числа параметров не представляется возможным. Уже для шестимерных алгебр Ли, соответствующих физической структуре ранга $\tau = 5$, количество возможных вариантов около трех сотен.

Для исследования физических структур на одном множестве автором был разработан общий параметрический метод, который является достаточно универсальным. В частности с его помощью найдены структуры на двух множествах ранга (3,3) [70] , (2,4), (3,4) и другие. Хотя эти структуры были исследованы ранее Михайличенко Г.Г. функциональным методом, применение общего параметрического метода позволило внести существенные уточнения, связанные с единственностью решения.

В главе I дается математическая формулировка теории физических структур на одном множестве. В § I.I приведены геометрические примеры, иллюстрирующие основные положения теории. В § I.2 формулируются основные аксиомы теории физических структур.

В главе II показывается, как возникают алгебры Ли на примере физических структур рангов $\tau = 4; 5; 6$. Установлено, что алгебры Ли появляются в ТФС, как необходимое следствие аксиом, которые первоначально определены для ТФС (в главе I). В работе [68, с.89] в общем случае показано, что каждой физической структуре соответствует система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которая в некотором смысле имеет единственное решение. Установлено, что операторы этой системы образуют алгебру Ли размерности $N = n(n+1)/2$, где $n = r-2$ (r -ранг структуры).

В главе Ш исследована физическая структура ранга $r = 4$. Найдены две формулы, содержащие некоторое число параметров. Придавая параметрам определенные значения, можно получить из одной формулы метрики двумерных пространств постоянной кривизны, двумерного симплектического пространства и метрики евклидовой и псевдоевклидовой плоскости; из другой формулы - метрики всех "экзотических" двумерных геометрий, то есть - все решения, полученные Михайличенко Г.Г. [85].

Основным результатом диссертации является решение задачи о нахождении физической структуры ранга $r = 5$.

В главе IУ построена классификация шестимерных алгебр Ли в рамках теории физических структур. Установлено, что шестимерные алгебры Ли, соответствующие структуре ранга $r = 5$, состоят из четырех трехмерных подалгебр. Этот результат позволил найти всего шесть вариантов коммутационных соотношений, приводящих к невырожденным решениям.

В главе У найдены все невырожденные решения для физической структуры ранга $r = 5$, соответствующие шести вариантам из главы IУ. Получены метрики трехмерных пространств постоянной кривизны, трехмерного нечетномерного пространства, трехмерных евклидова и псевдоевклидовых пространств, а также возможные феноменологически инвариантные трехмерные "экзотические" геометрии.

В главе УI рассмотрена физическая структура ранга $\tau = 6$, которая задается на четырехмерном многообразии. В § 6.I исследованы структурные особенности десятимерных алгебр Ли, соответствующих этой физической структуре. Установлено, что они состоят из десяти трехмерных подалгебр. В следующих параграфах найдены метрики четырехмерных пространств постоянной кривизны, четырехмерного симплектического пространства, получена геометрия пространства Минковского и других псевдоевклидовых четырехмерных пространств, метрика 4-мерного евклидова пространства.

Основные результаты работы докладывались на семинаре отдела дифференциальных уравнений ЛОМИ (рук. О.А.Ладыженская), на семинаре "Геометрия и физика" МГУ (рук. Ю.С.Владимиров, Н.В. Мицкевич), на научных семинарах ИМ СО АН СССР и НГУ (Новосибирск), на II и III Всесоюзных школах-семинарах по теории физических структур (Пущино, НЦБИ, Институт биофизики, 1987, 1988 г.) и опубликованы в статьях [68,69,70,75].

ГЛАВА I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ

Во введении было описано понятие физической структуры и указаны физические предпосылки теории физических структур, в основании которой лежит принцип феноменологической симметрии.

Благодаря этому принципу теория физических структур позволяет, при соответствующей интерпретации, рассматривать с единой точки зрения самые разнообразные физические теории феноменологического типа. С другой стороны требование существования феноменологической симметрии является настолько сильным, что позволяет получать явные выражения для многих известных физических законов независимо от их конкретной интерпретации.

§ I.I. Геометрические примеры

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих факт существования некоторых фундаментальных соотношений между результатами измерений, относящихся к различным физическим системам.

Заметим, что эти соотношения содержат лишь измеряемые на опыте величины, имеют один и тот же вид для разных физических явлений (с точностью до порядка определителя и некоторых других несущественных отличительных признаков) и, что самое существенное, инвариантны относительно выбора подмножеств соответствующих физических объектов.

Геометрия есть древняя физическая теория. Она лежит в основании многих физических законов, в том числе и в теории тяготения.

Эйнштейн, рассматривая вопрос о связи геометрии с объектами природы, писал: "... евклидова геометрия ... содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путем". Выбирая m точек пространства и $\frac{1}{2}m(m-1)$

расстояний между ними, он указывает, что вследствие формулы $l_{ik}^2=(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2$ между этими расстояниями имеется определенное число соотношений. И далее:

"Поскольку l_{ik} – измеряемые величины и, по определению, не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами не являются необходимыми *apriori* ". То есть факт существования соотношений между l_{ik} отражает глубокие физические свойства системы материальных точек.

Вот как ставится проблема получения законов геометрии в теории физических структур.

Рассмотрим множество материальных точек $\mathfrak{M}=\{i,k,l,\dots\}$ Измеряя расстояние между точками, получим исходный материал для построения геометрии. Если взять четыре точки i, k, m, n, то получим шесть расстояний $l_{ik},\dots,l_{mn}$. Этот случай соответствует двумерным пространствам. Если $l_{ik}^2=(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2$, то эти расстояния связаны зависимостью

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 & l_{in}^2 \\ 1 & l_{ik}^2 & 0 & l_{km}^2 & l_{kn}^2 \\ 1 & l_{im}^2 & l_{km}^2 & 0 & l_{mn}^2 \\ 1 & l_{in}^2 & l_{kn}^2 & l_{mn}^2 & 0 \end{vmatrix}=0. \qquad \text{(I)}$$

Это хорошо известный определитель Кэли–Менгера, и он равен нулю для любых четырех точек из множества $\mathfrak{M}$. Соотношение (I) будем называть физическим законом в феноменологически инвариантной форме. Он определяет двумерное евклидово пространство.

Если $l_{ik}=R^2\cos\frac{a_{ik}}{R}$, где $a_{ik}=a_{ki}$, то шесть расстояний связаны зависимостью

$$\begin{vmatrix} R^2 & l_{ik} & l_{im} & l_{in} \\ l_{ik} & R^2 & l_{km} & l_{kn} \\ l_{im} & l_{km} & R^2 & l_{mn} \\ l_{in} & l_{kn} & l_{mn} & R^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

которая справедлива для любых четырех точек из множества $\mathfrak{M}$. Соотношение (2) определяет двумерное пространство положительной кривизны.

Если $l_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, то выполняется зависимость:

$$\begin{vmatrix} 0 & l_{ik} & l_{im} & l_{in} \\ -l_{ik} & 0 & l_{km} & l_{kn} \\ -l_{im} & -l_{km} & 0 & l_{mn} \\ -l_{in} & -l_{kn} & -l_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Соотношение (3) определяет двумерное симплектическое пространство.

Естественно предположить, что и для других двумерных (вообще n -мерных) пространств можно найти феноменологически инвариантные соотношения типа (I), (2), (3).

Возникает вопрос: какие могут вообще существовать соотношения типа (I), (2), (3) между шестью расстояниями $l_{ik}, \ldots, l_{mn}$? В общем виде соотношения (I), (2), (3) можно записать так:

$$\Phi\,(l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{km}, l_{kn}, l_{mn}) = 0, \qquad (4)$$

где $l_{ik} = f(x_i, y_i, x_k, y_k)$.

В теории физических структур на соотношение (4) налагается условие инвариантности :

Соотношение (4) должно выполняться при любом выборе четырех точек из множества $\mathfrak{M}$. И при этом условии находятся все возможные виды функций f и Φ.

В приведенных примерах изучались отношения между элементами одного множества.

Аналогичным образом можно исследовать соотношения типа (4), изучая отношения между элементами, взятыми из разных множеств.

Соотношения типа (I), (2) изучались многими авторами. Так, Блюменталь Л.М., в своей монографии [86] рассматривал метрические пространства и множества, взаимные расстояния между точками которых удовлетворяли соотношениям типа (I), (2). Он постулирует эти соотношения, рассматривая их как исходные аксиомы. В теории физических структур эти соотношения получаются как следствие из соотношений типа (4).

Перейдем от нестрогих соображений к точным формулировкам.

§ I.2. Аксиомы теории физических структур

Пусть имеется множество однородных физических объектов $\mathfrak{M}$, элементы которого будем обозначать строчными латинскими буквами $i, j, \ldots, \omega \in \mathfrak{M}$. И пусть дана функция $f : \mathfrak{S}_f \longrightarrow R$, $\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, которая каждой паре точек $\langle jk \rangle \in \mathfrak{S}_f$ сопоставляет вещественное число $f(jk) \in R$.

Рассмотрим $\mathfrak{M}^r$ – r – кратное прямое произведение множества $\mathfrak{M}$, элементами которого являются кортежи $\langle ij \ldots \omega \rangle$ длины r. Построим функцию $F : \mathfrak{S}_F \longrightarrow R^{r(r-1)/2}$, $\mathfrak{S}_F \subset \mathfrak{M}^r$, которая каждому кортежу длины r из области определения $\mathfrak{S}_F$ сопоставляет совокупность $r(r-1)/2$ чисел $f(ij), \ldots, f(v\omega)$, соответствующих всем упорядоченным парам в кортеже. Будем рассматривать эти $r(r-1)/2$ чисел как координаты точки в пространстве $R^{r(r-1)/2}$.

Проведем континуализацию множества $\mathfrak{M}$. Сопоставим, вообще говоря, дискретному множеству $\mathfrak{M}$ непрерывное множество $\widetilde{\mathfrak{M}}$, ($\mathfrak{M} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$). Заметим, что переход от дискретных моделей к непрерывным широко применяется в физике (по существу, на этом построена вся механика сплошных сред) [87,88].

Потребуем, чтобы выполнялись следующие аксиомы:

I. Множество $\mathfrak{M}$ является гладким класса C^K, где K – достаточно большое, многообразием размерности n.

Тогда, поскольку для каждой точки $i \in \mathfrak{M}$ можно ввести локальные координаты $x_i^1, \ldots, x_i^n$, для функции $f(ij)$ получим локальное координатное представление:

$$f(ij) = f(x_i^1, \ldots, x_i^n; x_j^1, \ldots, x_j^n). \tag{I.I}$$

Между рангом структуры r и размерностью пространства, на котором она задана, существует связь [75] : $r = n+2$.

II. $\mathfrak{S}_f$ (область определения функции f) открыта и всюду плотна в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.

III. Функция $f(x_i^1, \ldots, x_i^n; x_j^1, \ldots, x_j^n)$ – гладкая класса C^K (где K – достаточно большое) и существенным образом зависит от каждой группы координат $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$ и $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$.

Существенную зависимость функции $f(ij)$ от двух групп координат определим, следуя Эйзенхарту Л.П. [89].

Функция $f(x_i^1, \ldots, x_i^n; x_j^1, \ldots, x_j^n)$ существенным образом зависит от координат $x_i^1, \ldots, x_i^n$, если нельзя найти $(n-1)$ их функций $\varphi_1(x_i^1, \ldots, x_i^n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_i^1, \ldots, x_i^n)$, чтобы имело место тождество

$$f(x_i^1, \ldots, x_i^n; x_j^1, \ldots, x_j^n) = \theta[\varphi_1(i), \ldots, \varphi_{n-1}(i); x_j^1, \ldots, x_j^n].$$

То же относится и к координатам $x_j^1, \ldots, x_j^n$.

По теореме 3.I (там же) для того, чтобы n параметров $x_i^1, \ldots, x_i^n$ были существенны, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(ij)$ не удовлетворяла никакому уравнению вида:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^\alpha}\,\psi^\alpha(x_i^1,\dots,x_i^n)=0 \quad \text{, где} \quad \alpha=1,\dots,n. \tag{I.2}$$

То же относится и к координатам $x_j^1,\dots,x_j^n$.
На уравнение (I.2) будем часто ссылаться в дальнейшем.

Определение I. Будем говорить, что пара $<\mathfrak{M}, f>$ задает физическую структуру ранга $r=n+2$, если, кроме аксиом I, II, III, выполняется следующая аксиома:

IV. Для каждого кортежа $<ij\dots vw>$ длины $r=n+2$ из некоторого плотного в $\mathfrak{S}_F\subset\mathfrak{M}^r$ множества и некоторой его окрестности $U(<i\cdots w>)$ существует такая достаточно гладкая функция $\Phi: E\to\mathbb{R}$, где E область в $\mathbb{R}^{r(r-1)/2}$, что $grad\,\Phi\neq 0$ и множество $F(U(<i\cdots w>))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi\,[f(ij),\dots,f(iw),\dots,f(vw)]=0 \tag{I.3}$$

для всякого кортежа из $U(<i\cdots w>)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии в общей схеме теории физических структур, предложенной Ю.И.Кулаковым для изучения и классификации физических законов. Эта аксиома выражает собой требование, чтобы $r(r-1)/2$ упорядоченных "расстояний" между любыми r точками множества $\mathfrak{M}$ были функционально связаны, то есть удовлетворяли некоторому соотношению (I.3), задающему физический закон в феноменологически инвариантной форме.

Итак, в этой главе приведены все математические формулировки и аксиомы, необходимые для решения задачи о нахождении физических структур на одном множестве.

ГЛАВА II. АЛГЕБРЫ ЛИ В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Требование феноменологической инвариантности оказывается вполне достаточным для нахождения явного вида физического закона определенного ранга. Отметим, что феноменологическая симметрия описывает полиарные отношения между конечными совокупностями физических объектов. Однако теория физических структур дает способ переходить от полиарных отношений к особым инвариантам, характеризующим те свойства этих объектов, которые описываются групповой симметрией.

§ 2.I. Физическая структура ранга $r = 4$

В главе I проведена общая постановка задачи.

Определение 2. Пара $<\mathfrak{M}, f>$ образует физическую структуру ранга $r = 4$, если для каждого кортежа $<ijkl>$ из некоторого плотного в $\mathfrak{M}^4$ множества и некоторой его окрестности $U(<ijkl>)$ существует такая достаточно гладкая функция Φ, что $\mathrm{grad}\,\Phi \neq 0$ и выполняется соотношение:

$$\Phi\,[f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)] = 0 \qquad (2.I)$$

для всякого кортежа из $U(<ijkl>)$.

На множество $\mathfrak{M}$, функции f и Φ наложены ограничения, сформулированные в аксиомах I,...,IУ (гл.I). Множеству $\mathfrak{M}$ сопоставляется множество $\tilde{\mathfrak{M}}$, наделенное структурой гладкого (класса C^k) многообразия размерности $n = r-2 = 2$. Тогда функция $f(ij)$ имеет локальное координатное представление:

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j).$$

По аксиоме Ш $f(ij)$ достаточно гладкая и существенным образом зависит от своих аргументов. То же относится и к функциям $f(ik),\dots,f(kl)$. Продифференцируем соотношение (2.I) по всем восьми параметрам $x_i, y_i, x_k, y_k, x_j, y_j, x_l, y_l$. Получим систему из восьми дифференциальных уравнений относительно шести частных производных функции Φ по каждому своему аргументу. Так как $grad\,\Phi \neq 0$, то система имеет нетривиальное решение в окрестности некоторого кортежа $\langle ijkl \rangle$. Следовательно, любой определитель шестого порядка из матрицы коэффициентов системы равен нулю. Матрица коэффициентов системы имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(ik)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(ik)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial y_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x_j} & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} \\ 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial y_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial x_l} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial x_l} & \frac{\partial f(kl)}{\partial x_l} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial y_l} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial y_l} & \frac{\partial f(kl)}{\partial y_l} \end{matrix} \right\| \qquad (2.2)$$

Рассмотрим определитель пятого порядка, отмеченный пунктиром. Докажем, что он не равен нулю тождественно. Предположим обратное. Тогда, разлагая его, имеем:

$$\frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f(jk)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f(jk)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y_j} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f(ik)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f(ik)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial y_i} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

$\dfrac{\partial f(k\ell)}{\partial x_k} \not\equiv 0$, т.к. по условию $f(k\ell)$ существенным образом зависит от своих аргументов. Рассмотрим второй сомножитель. Фиксируя координаты x_ℓ, y_ℓ, имеем:

$$\frac{\partial f(jk)}{\partial x_j} B_1(j) + \frac{\partial f(jk)}{\partial y_j} B_2(j) = 0 \;; \qquad B_1(j), B_2(j) \not\equiv 0 .$$

Но по аксиоме III (глава I) такое уравнение не может иметь места. Аналогично доказывается неравенство нулю и третьего сомножителя. Таким образом, рассмотренный определитель пятого порядка не равен нулю тождественно. То есть ранг матрицы (2.2) равен пяти.

Из всех определителей шестого порядка, равных нулю, достаточно рассмотреть только те, которые окаймляют не равный нулю определитель пятого порядка [90]. Таких определителей три. Выпишем их, разлагая по первому столбцу:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} A^1_\mu(ik\ell) A_0(jk\ell) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} A^2_\mu(ik\ell) A_0(jk\ell) +$$
$$+ \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} A^1_\mu(jk\ell) A_0(ik\ell) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} A^2_\mu(jk\ell) A_0(ik\ell) = 0, \tag{2.3}$$

где $\mu = 1,2,3$; A^1_μ, A^2_μ – определители третьего порядка, и $A_0(ik\ell), A_0(jk\ell)$ имеют следующий вид:

$$A_0(ik\ell) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(ik)}{\partial x_i} & \dfrac{\partial f(i\ell)}{\partial x_i} \\[2ex] \dfrac{\partial f(ik)}{\partial y_i} & \dfrac{\partial f(i\ell)}{\partial y_i} \end{vmatrix} ; \quad A_0(jk\ell) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(jk)}{\partial x_j} & \dfrac{\partial f(j\ell)}{\partial x_j} \\[2ex] \dfrac{\partial f(jk)}{\partial y_j} & \dfrac{\partial f(j\ell)}{\partial y_j} \end{vmatrix} .$$

Можно показать, что A_0, A^1_μ и A^2_μ не равны нулю тождественно.

Покажем, что ранг системы (2.3) равен трем. Будем рассматривать систему (2.3) как алгебраическую относительно четырех частных производных функции $f(ij)$. Напомним, что каждое уравнение является соответствующим определителем шестого порядка, взятым из матрицы (2.2). Раскроем эти определители по первым четырем строкам. Обозначая миноры четвертого порядка по номерам взятых столбцов (например, Δ_{1234}), получим:

$$\Delta_{1235}\, B(jkl) + \Delta_{1345}\, B(ikl) = 0\,;$$

$$-\Delta_{1234}\frac{\partial f(jl)}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} + \Delta_{1235}\frac{\partial f(jk)}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f(kl)}{\partial x_l} + \qquad (2.4)$$

$$+\Delta_{1345}\frac{\partial f(ik)}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f(kl)}{\partial x_l} - \Delta_{1245}\frac{\partial f(il)}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} = 0\,;$$

$$-\Delta_{1234}\frac{\partial f(jl)}{\partial y_l}\cdot\frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} + \Delta_{1235}\frac{\partial f(jk)}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f(kl)}{\partial y_l} +$$

$$+\Delta_{1345}\frac{\partial f(ik)}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f(kl)}{\partial y_l} - \Delta_{1245}\frac{\partial f(il)}{\partial y_l}\cdot\frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} = 0\,;$$

где

$$B(jkl) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(jk)}{\partial x_k} & \frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f(jk)}{\partial y_k} & \frac{\partial f(kl)}{\partial y_k} \end{vmatrix}; \quad B(ikl) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(ik)}{\partial x_k} & \frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f(ik)}{\partial y_k} & \frac{\partial f(kl)}{\partial y_k} \end{vmatrix}.$$

Будем рассматривать соотношения (2.4) как алгебраическую систему относительно новых переменных: Δ_{1234}, Δ_{1235}, Δ_{1245}, Δ_{1345}. Покажем, что замена переменных при переходе от системы (2.3) к системе (2.4) невырождена. Заметим, что первый столбец матрицы (2.2) входит во все новые переменные. Раскроем введенные миноры четвертого порядка по первому столбцу:

$$\Delta_{1234} = \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}\delta_1^1 + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}\delta_2^1 + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}\delta_3^1 + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}\delta_4^1\,;$$

$$\Delta_{1235} = \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}\delta_1^2 + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}\delta_2^2 + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}\delta_3^2 + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}\delta_4^2\,;$$

$$\Delta_{1245} = \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}\delta_1^3 + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}\delta_2^3 + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}\delta_3^3 + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}\delta_4^3\,;$$

$$\Delta_{1345} = \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}\delta_1^4 + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}\delta_2^4 + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}\delta_3^4 + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}\delta_4^4 .$$

Невырожденность замены переменных означает, что $|\delta_\beta^\alpha| \neq 0$. Действительно, легко видеть, что δ_β^α являются алгебраическими дополнениями к каждому элементу матрицы, составленной из I,2,3,4 строки и 2,3,4,5 столбцов матрицы (2.2). Если $|\delta_\beta^\alpha| = 0$, то и определитель указанной четырехрядной матрицы равен нулю. Разлагая его, имеем:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(ik)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f(ik)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial y_i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f(jk)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f(jk)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y_j} \end{vmatrix} = 0.$$

Но ни один из сомножителей, как доказано выше, не может быть равным нулю тождественно. Следовательно, и $|\delta_\beta^\alpha| \neq 0$, замена переменных невырождена, и ранг системы (2.4) равен рангу системы (2.3). Покажем, что ранг системы (2.4) равен трем. Предположим, что ранг меньше трех. Тогда все определители третьего порядка из коэффициентов при неизвестных Δ_{1234}, Δ_{1235}, Δ_{1245}, Δ_{1345} в системе (2.4) равны нулю. Выпишем определитель при неизвестных Δ_{1234}, Δ_{1235}, Δ_{1245}.
Разлагая его, получим:

$$B(jkl)\cdot\left[\frac{\partial f(kl)}{\partial x_k}\right]^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f(jl)}{\partial x_l} & \frac{\partial f(il)}{\partial x_l} \\ \frac{\partial f(jl)}{\partial y_l} & \frac{\partial f(il)}{\partial y_l} \end{vmatrix} = 0.$$

Как показано выше, ни один из сомножителей не может быть равным нулю тождественно. То есть ранг системы (2.4), а, следовательно, и системы (2.3) равен трем. Разделим уравнения (2.3) на $A_0(ikl)\times \times A_0(jkl)$ и зафиксируем координаты x_k, y_k, x_l, y_l. Получим систему из трех независимых дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно функции $f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$:

$$X_\mu f(ij) = 0; \quad \mu = 1,2,3;$$

$$X_\mu = \bar{A}^1_\mu(i)\frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{A}^2_\mu(i)\frac{\partial}{\partial y_i} + \bar{A}^1_\mu(j)\frac{\partial}{\partial x_j} + \bar{A}^2_\mu(j)\frac{\partial}{\partial y_j}; \qquad (2.5)$$

$$\bar{A}^1_\mu(i) = \bar{A}^1_\mu(x_i, y_i); \quad \bar{A}^1_\mu(j) = \bar{A}^1_\mu(x_j, y_j)$$ и т.д.

Каждый интеграл системы должен удовлетворять также уравнениям [91] :

$$(X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu) f(ij) = [X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0; \quad \mu,\nu = 1,2,3.$$

Для системы (2.5) эти уравнения будут иметь вид:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} B^1_\nu(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} B^2_\nu(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} B^1_\nu(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} B^2_\nu(j) = 0, \qquad (2.6)$$

где = I,2,3; , и т.д.

Возьмем одно из уравнений (2.6) и присоединим его к трем уравнениям (2.5). Получим систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных - частных производных функции $f(ij)$ по своим аргументам, ни одна из которых по условию не равна нулю тождественно. Определитель из коэффициентов такой системы равен нулю. То есть любое уравнение из (2.6) является линейной комбинацией уравнений (2.5). Таким образом, система (2.5) является полной (или замкнутой) [92] . По теории, интегральный базис такой системы состоит из $(K-\mu)$ интегралов, где μ - число уравнений, а K - число переменных, от которых зависит искомая функция. В нашем случае $K = 4$; $\mu = 3$; и решение системы (2.5) имеет вид: $f(x_i, y_i, x_j, y_j) = \Psi[\varphi(x_i, y_i, x_j, y_j)]$, где Ψ - произвольная функция одного аргумента (единственность решения), а φ - полный интеграл системы (2.5).

Итак, приходим к выводу: физической структуре ранга $\tau = 4$

соответствует система (2.5) из трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, имеющая единственное решение с точностью до одной произвольной функции.

Оказывается, эта система обладает одним замечательным свойством.

Выпишем общую матрицу коэффициентов систем (2.5) и (2.6):

$$\begin{Vmatrix} A_1^1(i) & A_1^2(i) & A_1^1(j) & A_1^2(j) \\ A_2^1(i) & A_2^2(i) & A_2^1(j) & A_2^2(j) \\ A_3^1(i) & A_3^2(i) & A_3^1(j) & A_3^2(j) \\ B_1^1(i) & B_1^2(i) & B_1^1(j) & B_1^2(j) \\ B_2^1(i) & B_2^2(i) & B_2^1(j) & B_2^2(j) \\ B_3^1(i) & B_3^2(i) & B_3^1(j) & B_3^2(j) \end{Vmatrix}$$

Обозначая столбцы матрицы слева направо через $[1]_i$, $[2]_i$, $[1]_j$, $[2]_j$, запишем системы (2.5), (2.6) в виде:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}[1]_i + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}[2]_i + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}[1]_j + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}[2]_j = 0. \qquad (2.7)$$

Возьмем дополнительную точку $p \in \mathfrak{M}$ и проведем аналогичные рассуждения для кортежей $\langle ipkl \rangle$ и $\langle pjkl \rangle$. Получим:

$$\frac{\partial f(ip)}{\partial x_i}[1]_i + \frac{\partial f(ip)}{\partial y_i}[2]_i + \frac{\partial f(ip)}{\partial x_p}[1]_p + \frac{\partial f(ip)}{\partial y_p}[2]_p = 0;$$

$$\frac{\partial f(pj)}{\partial x_p}[1]_p + \frac{\partial f(pj)}{\partial y_p}[2]_p + \frac{\partial f(pj)}{\partial x_j}[1]_j + \frac{\partial f(pj)}{\partial y_j}[2]_j = 0. \qquad (2.8)$$

Будем рассматривать уравнения (2.7), (2.8) как алгебраическую систему относительно шести неизвестных $[1]_i, [2]_i, [1]_j, [2]_j, [1]_p, [2]_p$. Решим эту систему относительно $[1]_i, [2]_i, [1]_j$. Это можно сделать, так как определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, не равен нулю. Действительно:

$$\Delta = \frac{\partial f(pj)}{\partial x_j}\left[\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f(ip)}{\partial y_i} - \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial f(ip)}{\partial x_i}\right].$$

Как показано выше, ни один из сомножителей не может быть равным нулю тождественно. Тогда:

$$[1]_i = F_1(ijp)[2]_j + F_2(ijp)[1]_p + F_3(ijp)[2]_p\,,$$
$$[2]_i = F_4(ijp)[2]_j + F_5(ijp)[1]_p + F_6(ijp)[2]_p\,.$$

Полученные соотношения указывают на линейную зависимость соответствующих столбцов. То есть ранг матриц $\|[1]_i, [2]_j, [1]_p, [2]_p\|$ и $\|[2]_i, [2]_j, [1]_p, [2]_p\|$ равен трем, и все определители четвертого порядка равны нулю. Выпишем определители, составленные из первых четырех строк и четырех столбцов, для каждой матрицы:

$$\begin{vmatrix} A^1_1(i) & A^2_1(j) & A^1_1(p) & A^2_1(p) \\ A^1_2(i) & A^2_2(j) & A^1_2(p) & A^2_2(p) \\ A^1_3(i) & A^2_3(j) & A^1_3(p) & A^2_3(p) \\ B^1_1(i) & B^2_1(j) & B^1_1(p) & B^2_1(p) \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} A^2_1(i) & A^2_1(j) & A^1_1(p) & A^2_1(p) \\ A^2_2(i) & A^2_2(j) & A^1_2(p) & A^2_2(p) \\ A^2_3(i) & A^2_3(j) & A^1_3(p) & A^2_3(p) \\ B^2_1(i) & B^2_1(j) & B^1_1(p) & B^2_1(p) \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определители по первому столбцу:

$$\begin{aligned} B^1_1(i)\,\delta_0(jp) &= A^1_1(i)\,\delta_1(jp) + A^1_2(i)\,\delta_2(jp) + A^1_3(i)\,\delta_3(jp)\,, \\ B^2_1(i)\,\delta_0(jp) &= A^2_1(i)\,\delta_1(jp) + A^2_2(i)\,\delta_2(jp) + A^2_3(i)\,\delta_3(jp)\,, \end{aligned} \qquad (2.9)$$

где

$$\delta_0(jp) = \begin{vmatrix} A^2_1(j) & A^1_1(p) & A^2_1(p) \\ A^2_2(j) & A^1_2(p) & A^2_2(p) \\ A^2_3(j) & A^1_3(p) & A^2_3(p) \end{vmatrix}.$$

Покажем, что $\delta_0(jp) \neq 0$. Рассмотрим систему (2.5) для функции $f(jp)$. Матрица коэффициентов будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} A_1^1(j) & A_1^2(j) & A_1^1(p) & A_1^2(p) \\ A_2^1(j) & A_2^2(j) & A_2^1(p) & A_2^2(p) \\ A_3^1(j) & A_3^2(j) & A_3^1(p) & A_3^2(p) \end{Vmatrix}$$

причем ранг матрицы равен трем. Будем рассматривать эту систему уравнений, как линейную относительно "переменных" $\partial f(jp)/\partial y_j$, $\partial f(jp)/\partial x_p$, $\partial f(jp)/\partial y_p$. Для совместности системы необходимо, чтобы ранг матрицы при этих переменных (а это в точности $\|\delta_0(jp)\|$), был равен рангу расширенной матрицы [93], то есть равен трем. Следовательно, $\delta_0(jp) \neq 0$.

Разделим соотношения (2.9) на $\delta_0(jp)$ и зафиксируем координаты x_j, y_j, x_p, y_p:

$$B_1^1(i) = a_1 A_1^1(i) + a_2 A_2^1(i) + a_3 A_3^1(i),$$
$$B_1^2(i) = a_1 A_1^2(i) + a_2 A_2^2(i) + a_3 A_3^2(i), \tag{2.10}$$

где a_1, a_2, a_3 – константы, не все равные нулю. В системе (2.5) умножим первое уравнение на a_1, второе – на a_2, третье – на a_3, сложим их и вычтем первое уравнение из (2.6):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}\left[a_1 A_1^1(j) + a_2 A_2^1(j) + a_3 A_3^1(j) - B_1^1(j)\right] +$$
$$+ \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}\left[a_1 A_1^2(j) + a_2 A_2^2(j) + a_3 A_3^2(j) - B_1^2(j)\right] = 0.$$

Если квадратные скобки не равны нулю, то получим уравнение, которое по аксиоме Ш (глава I) не может иметь места. Значит скобки равны нулю:

$$B_1^1(j) = a_1 A_1^1(j) + a_2 A_2^1(j) + a_3 A_3^1(j),$$
$$B_1^2(j) = a_1 A_1^2(j) + a_2 A_2^2(j) + a_3 A_3^2(j). \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) заключаем, что первое уравнение совместности из (2.6) является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами из уравнений основной системы (2.5). Аналогичный вывод можно сделать и для остальных уравнений из (2.6).

Запишем полученные результаты:

$$X_\mu f(ij)=0,$$
$$[X_\mu, X_\nu] f(ij)=0,$$
$$[X_\mu, X_\nu] = c^{\varkappa}_{\mu\nu} X_\varkappa,$$

где $\mu,\nu,\varkappa$ = I,2,3, $c^{\varkappa}_{\mu\nu}=-c^{\varkappa}_{\nu\mu}$ – вещественные числа. Операторы $X_\mu(ij)$ являются линейными операторами, и для них, как легко проверить, выполняется тождество Якоби [94] :

$$[X_\mu,[X_\nu,X_\varkappa]]+[X_\nu,[X_\varkappa,X_\mu]]+[X_\varkappa,[X_\mu,X_\nu]]=0.$$

Таким образом, физической структуре ранга τ = 4 соответствуют трехмерные алгебры Ли, и функцию $f(ij)$ можно рассматривать как двухточечный инвариант соответствующей трехпараметрической группы Ли.

Заметим, что рассмотренные операторы $X_\mu(ij)$ являются двухточечными. Но и одноточечные операторы $X_\mu(i)$ ввиду соотношений (2.10) также образуют трехмерную алгебру Ли.

§ 2.2. Физическая структура ранга τ = 5

Постановка задачи аналогична задаче о физической структуре ранга τ = 4.

Определение 3. Пара $\langle \mathfrak{M}, f \rangle$ образует физическую структуру ранга τ = 5, если для каждого кортежа $\langle ijklm \rangle$ из некоторого плотного в $\mathfrak{M}^5$ множества и некоторой его окрестности $U(\langle ijklm \rangle)$ существует такая достаточно гладкая функция Φ, что $grad\,\Phi \neq 0$ и выполняется соотношение:

$$\Phi\,[f(ij),f(ik),f(il),f(im),f(jk),f(jl),f(jm),$$
$$,f(kl),f(km),f(lm)]=0, \tag{2.12}$$

для всякого кортежа из $U(\langle ijklm \rangle)$.

Также требуем выполнения аксиом I,...,IУ, приведенных в главе I. Здесь $n=r-2=3$ и функция $f(ij)$ имеет локальное координатное представление в виде:

$$f(ij)=f(x_i,y_i,z_i,x_j,y_j,z_j). \tag{2.13}$$

Функции $f(ij),\ldots,f(\ell m)$ достаточно гладкие и существенным образом зависят от своих аргументов.

Продифференцируем соотношение (2.12) по всем I5 координатам $x_i,y_i,z_i,\ldots,x_m,y_m,z_m$. Получим систему из I5-ти дифференциальных уравнений относительно I0-ти частных производных функции по каждому своему аргументу. Матрица коэффициентов системы имеет вид (2.14). Так как $grad\,\Phi\neq 0$, то система имеет нетривиальное решение. Следовательно любой определитель I0-го порядка равен нулю. Рассмотрим определитель 9-го порядка, составленный из 2,...,I0 столбцов и I,2,...,8,I0 строчек матрицы (2.14). Можно показать, что такой определитель не равен нулю тождественно (доказательство проводится так же, как и для структуры ранга $r = 4$). То есть ранг матрицы (2.14) равен девяти. Из всех определителей девятого порядка, равных нулю, достаточно рассмотреть только те, которые окаймляют рассмотренный определитель девятого порядка [90] . Таких определителей шесть. В данном случае удобно выбирать такие определители иным способом. Можно показать, что достаточно рассмотреть любые шесть определителей I0-го порядка, окаймляющие любые не равные нулю определители 9-го порядка, но при этом необходимо перебрать все строки матрицы (2.14).

Воспользуемся этим замечанием и выберем шесть определителей I0-го порядка в матрице (2.14) следующим образом. Возьмем определитель девятого порядка, составленный из 2,...,I0 столбцов и I,...,8,I0 строк матрицы (2.14). Как доказано выше, он не равен нулю. Выпишем два окаймляющих его определителя десятого порядка, равных нулю. Первый составим из I,...,I0 строчек и десяти столб-

$$
\begin{Vmatrix}
\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(ik)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(im)}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(ik)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(im)}{\partial y_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} & \frac{\partial f(ik)}{\partial z_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial z_i} & \frac{\partial f(im)}{\partial z_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(jm)}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(jm)}{\partial y_j} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial z_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial z_j} & \frac{\partial f(jm)}{\partial z_j} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x_k} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x_k} & 0 & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} & \frac{\partial f(km)}{\partial x_k} & 0 \\
0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial y_k} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y_k} & 0 & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial y_k} & \frac{\partial f(km)}{\partial y_k} & 0 \\
0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial z_k} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial z_k} & 0 & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial z_k} & \frac{\partial f(km)}{\partial z_k} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial x_l} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial x_l} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial x_l} & 0 & \frac{\partial f(lm)}{\partial x_l} \\
0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial y_l} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial y_l} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial y_l} & 0 & \frac{\partial f(lm)}{\partial y_l} \\
0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial z_l} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial z_l} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial z_l} & 0 & \frac{\partial f(lm)}{\partial z_l} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(im)}{\partial x_m} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jm)}{\partial x_m} & 0 & \frac{\partial f(km)}{\partial x_m} & \frac{\partial f(lm)}{\partial x_m} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(im)}{\partial y_m} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jm)}{\partial y_m} & 0 & \frac{\partial f(km)}{\partial y_m} & \frac{\partial f(lm)}{\partial y_m} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(im)}{\partial z_m} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jm)}{\partial z_m} & 0 & \frac{\partial f(km)}{\partial z_m} & \frac{\partial f(lm)}{\partial z_m}
\end{Vmatrix}
\qquad (2.14)
$$

цов, второй – из I,...,8,I0,II строчек и десяти столбцов. Далее возьмем определитель девятого порядка, составленный из 2,...,I0 столбцов и I,...,6,I0,II,I3 строк. Аналогично доказывается, что он тоже не равен нулю. Так же выпишем два окаймляющих его определителя десятого порядка, равных нулю. Один из I,...,6,I0,II, I2,I3 строчек и десяти столбцов, другой – из I,...,6,I0,II,I3,I4 строчек и десяти столбцов. И, наконец, рассмотрим определитель девятого порядка, составленный из I,...,7,I3,I4 строчек и 2,..., I0 столбцов, также не равный нулю. Выпишем два окаймляющих его определителя десятого порядка, равные нулю: один, составленный из I,...,7,I3,I4,I5 строчек и десяти столбцов, другой – из I,..., 8,I3,I4, строчек и десяти столбцов.

Разложим шесть выбранных определителей по первому столбцу. Получим систему из шести дифференциально-функциональных уравнений относительно функции $f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} A^1_\mu(iklm) A_0(jklm) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} A^2_\mu(iklm) A_0(jklm) +$$
$$+ \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} A^3_\mu(iklm) A_0(jklm) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} A^1_\mu(jklm) A_0(iklm) + \qquad (2.15)$$
$$+ \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} A^2_\mu(jklm) A_0(iklm) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} A^3_\mu(jklm) A_0(iklm) = 0,$$

где $\mu = 1,\dots,6$; $A^{1,2,3}_\mu$ – определители шестого порядка, не равные тождественно нулю; $A_0(iklm)$ и $A_0(jklm)$ также не равны нулю тождественно.

Разделим уравнения (2.I5) на $A_0(jklm)\cdot A_0(iklm)$ и запишем матрицу коэффициентов системы в явном виде (из матрицы (2.I4)). В (2.I6)(j) обозначает три столбца с теми же коэффициентами, но со значком j (λ_{1j}, A_{1j} и т.д.).

$$\begin{Vmatrix} \lambda_{1i} A_{1i} & \lambda_{1i} B_{1i} & \lambda_{1i} D_{1i} & \\ C_1 \varphi_{1i} A_{1i} + C_2 \varphi_{2i} A_{2i} & C_1 \varphi_{1i} B_{1i} + C_2 \varphi_{2i} B_{2i} & C_1 \varphi_{1i} D_{1i} + C_2 \varphi_{2i} D_{2i} & \\ \lambda_{2i} A_{2i} & \lambda_{2i} B_{2i} & \lambda_{2i} D_{2i} & \\ C_3 \varphi_{3i} A_{2i} + C_1 \varphi_{4i} A_{3i} & C_3 \varphi_{3i} B_{2i} + C_1 \varphi_{4i} B_{3i} & C_3 \varphi_{3i} D_{2i} + C_1 \varphi_{4i} D_{3i} & (j) \\ \lambda_{3i} A_{3i} & \lambda_{3i} B_{3i} & \lambda_{3i} D_{3i} & \\ C_3 \varphi_{5i} A_{1i} + C_2 \varphi_{6i} A_{3i} & C_3 \varphi_{5i} B_{1i} + C_2 \varphi_{6i} B_{3i} & C_3 \varphi_{5i} D_{1i} + C_2 \varphi_{6i} D_{3i} & \end{Vmatrix} . \qquad (2.16)$$

Явный вид функций, входящих в (2.16) приведен в (2.17).

В матрице (2.16) переобозначим:

$$\lambda_1 A_1 = \bar{A}_1 ;\ \lambda_1 B_1 = \bar{B}_1 ;\ \lambda_1 D_1 = \bar{D}_1 ;\ \lambda_2 A_2 = \bar{A}_2 ;\ \lambda_2 B_2 = \bar{B}_2 ;\ \lambda_2 D_2 = \bar{D}_2 ;$$

$$\lambda_3 B_3 = \bar{B}_3 ;\ \lambda_3 A_3 = \bar{A}_3 ;\ \lambda_3 D_3 = \bar{D}_3 ;\ \varphi_1/\lambda_1 = \bar{\varphi}_1, \ldots, \varphi_2/\lambda_2 = \bar{\varphi}_2, \ldots, \varphi_4/\lambda_3 = \bar{\varphi}_4 .$$

Переставив строки, получим:

$$\begin{Vmatrix} \bar{A}_1(i) & \bar{B}_1(i) & \bar{D}_1(i) & \\ \bar{A}_2(i) & \bar{B}_2(i) & \bar{D}_2(i) & \\ \varepsilon_{1i} \bar{A}_{1i} + \varepsilon_{2i} \bar{A}_2(i) & \varepsilon_{1i} \bar{B}_1(i) + \varepsilon_{2i} \bar{B}_2(i) & \varepsilon_{1i} \bar{D}_1(i) + \varepsilon_{2i} \bar{D}_2(i) & (j) \\ \bar{A}_3(i) & \bar{B}_3(i) & \bar{D}_3(i) & \\ \varepsilon_{3i} \bar{A}_1(i) + \varepsilon_{4i} \bar{A}_3(i) & \varepsilon_{3i} \bar{B}_1(i) + \varepsilon_{4i} \bar{B}_3(i) & \varepsilon_{3i} \bar{D}_1(i) + \varepsilon_{4i} \bar{D}_3(i) & \\ \varepsilon_{5i} \bar{A}_2(i) + \varepsilon_{6i} \bar{A}_3(i) & \varepsilon_{5i} \bar{B}_2(i) + \varepsilon_{6i} \bar{B}_3(i) & \varepsilon_{5i} \bar{D}_2(i) + \varepsilon_{6i} \bar{D}_3(i) & \end{Vmatrix} \qquad (2.18)$$

где $\varepsilon_1 = C_1 \bar{\varphi}_1 ;\ \varepsilon_2 = C_2 \bar{\varphi}_2 ;\ \varepsilon_3 = C_3 \bar{\varphi}_5 ;\ \varepsilon_4 = C_2 \bar{\varphi}_6 ;\ \varepsilon_5 = C_3 \bar{\varphi}_3 ;\ \varepsilon_6 = C_1 \bar{\varphi}_4 .$

Для того, чтобы система (2.15) имела нетривиальное решение, необходимо, прежде всего, чтобы ранг матрицы (2.18) был меньше шести, то есть определитель шестого порядка должен равняться нулю. Преобразуя его, получаем:

$$\begin{vmatrix} \bar{A}_1(i) & \bar{B}_1(i) & \bar{D}_1(i) \\ \bar{A}_2(i) & \bar{B}_2(i) & \bar{D}_2(i) \\ \bar{A}_3(i) & \bar{B}_3(i) & \bar{D}_3(i) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{A}_1(j) & \bar{B}_1(j) & \bar{D}_1(j) \\ \bar{A}_2(j) & \bar{B}_2(j) & \bar{D}_2(j) \\ \bar{A}_3(j) & \bar{B}_3(j) & \bar{D}_3(j) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (\varepsilon_{1i} - \varepsilon_{1j}) & (\varepsilon_{2i} - \varepsilon_{2j}) & 0 \\ (\varepsilon_{3i} - \varepsilon_{3j}) & 0 & (\varepsilon_{4i} - \varepsilon_{4j}) \\ 0 & (\varepsilon_{5i} - \varepsilon_{5j}) & (\varepsilon_{6i} - \varepsilon_{6j}) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.19)$$

(2.I7)

$$A_{1i} = \begin{vmatrix} f_{y_i}(il) & f_{y_i}(im) \\ f_{z_i}(il) & f_{z_i}(im) \end{vmatrix}; \quad A_{2i} = \begin{vmatrix} f_{y_i}(ik) & f_{y_i}(im) \\ f_{z_i}(ik) & f_{z_i}(im) \end{vmatrix}; \quad A_{3i} = \begin{vmatrix} f_{y_i}(ik) & f_{y_i}(il) \\ f_{z_i}(ik) & f_{z_i}(il) \end{vmatrix};$$

$$B_{1i} = \begin{vmatrix} f_{x_i}(il) & f_{x_i}(im) \\ f_{z_i}(il) & f_{z_i}(im) \end{vmatrix}; \quad B_{2i} = \begin{vmatrix} f_{x_i}(ik) & f_{x_i}(im) \\ f_{z_i}(ik) & f_{z_i}(im) \end{vmatrix}; \quad B_{3i} = \begin{vmatrix} f_{x_i}(ik) & f_{x_i}(il) \\ f_{z_i}(ik) & f_{z_i}(il) \end{vmatrix};$$

$$D_{1i} = \begin{vmatrix} f_{x_i}(il) & f_{x_i}(im) \\ f_{y_i}(il) & f_{y_i}(im) \end{vmatrix}; \quad D_{2i} = \begin{vmatrix} f_{x_i}(ik) & f_{x_i}(im) \\ f_{y_i}(ik) & f_{y_i}(im) \end{vmatrix}; \quad D_{3i} = \begin{vmatrix} f_{x_i}(ik) & f_{x_i}(il) \\ f_{y_i}(ik) & f_{y_i}(il) \end{vmatrix};$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} f_{x_l}(kl) & f_{x_l}(lm) \\ f_{y_l}(kl) & f_{y_l}(lm) \end{vmatrix}; \quad C_2 = \begin{vmatrix} f_{x_k}(kl) & f_{x_k}(km) \\ f_{y_k}(kl) & f_{y_k}(km) \end{vmatrix}; \quad C_3 = \begin{vmatrix} f_{x_m}(km) & f_{x_m}(lm) \\ f_{y_m}(km) & f_{y_m}(lm) \end{vmatrix};$$

$$\varphi_{1i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_k}(ik) & f_{x_k}(km) \\ f_{y_k}(ik) & f_{y_k}(km) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)}; \quad \varphi_{2i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_l}(il) & f_{x_l}(lm) \\ f_{y_l}(il) & f_{y_l}(lm) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)}; \quad \varphi_{3i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_l}(il) & f_{x_l}(kl) \\ f_{y_l}(il) & f_{y_l}(kl) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)};$$

$$\varphi_{4i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_m}(im) & f_{x_m}(km) \\ f_{y_m}(im) & f_{y_m}(km) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)}; \quad \varphi_{5i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_k}(ik) & f_{x_k}(kl) \\ f_{y_k}(ik) & f_{y_k}(kl) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)}; \quad \varphi_{6i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_m}(im) & f_{x_m}(lm) \\ f_{y_m}(im) & f_{y_m}(lm) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)};$$

$$\lambda_{1i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_k}(ik) & f_{x_k}(kl) & f_{x_k}(km) \\ f_{y_k}(ik) & f_{y_k}(kl) & f_{y_k}(km) \\ f_{z_k}(ik) & f_{z_k}(kl) & f_{z_k}(km) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)}; \quad \lambda_{2i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_l}(il) & f_{x_l}(kl) & f_{x_l}(lm) \\ f_{y_l}(il) & f_{y_l}(kl) & f_{y_l}(lm) \\ f_{z_l}(il) & f_{z_l}(kl) & f_{z_l}(lm) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)};$$

$$\lambda_{3i} = \frac{\begin{vmatrix} f_{x_m}(im) & f_{x_m}(km) & f_{x_m}(lm) \\ f_{y_m}(im) & f_{y_m}(km) & f_{y_m}(lm) \\ f_{z_m}(im) & f_{z_m}(km) & f_{z_m}(lm) \end{vmatrix}}{A_0(iklm)},$$

где $f_x = \partial f/\partial x$; $f_y = \partial f/\partial y$; $f_z = \partial f/\partial z$.

Покажем, что первый сомножитель $\not\equiv 0$. Рассмотрим первый сомножитель. Предположим, что он равен нулю. Подставляя явный вид $\bar{A}_1(i)$, $\bar{B}_1(i)$, $\bar{D}_1(i)$ и т.д., получим:

$$\lambda_{1i}\cdot\lambda_{2i}\cdot\lambda_{3i}\cdot\begin{vmatrix} A_1(i) & B_1(i) & D_1(i) \\ A_2(i) & B_2(i) & D_2(i) \\ A_3(i) & B_3(i) & D_3(i) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.20)$$

Обращаясь к (2.17), видим, что λ_{1i}, λ_{2i}, λ_{3i} не равны нулю (как показано выше), а четвертый сомножитель состоит из алгебраических дополнений к элементам определителя:

$$\begin{vmatrix} f_{x_i}(ik) & f_{y_i}(ik) & f_{z_i}(ik) \\ f_{x_i}(il) & f_{y_i}(il) & f_{z_i}(il) \\ f_{x_i}(im) & f_{y_i}(im) & f_{z_i}(im) \end{vmatrix}.$$

Но этот определитель, так же как и $\lambda_{1,2,3}$, не равен тождественно нулю, то есть не равен нулю определитель в (2.20). Следовательно, первый сомножитель в (2.19) не равен нулю. Так же доказывается неравенство нулю второго сомножителя в (2.18). Остается:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1j}) & (\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j}) & 0 \\ (\varepsilon_{3i}-\varepsilon_{3j}) & 0 & (\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{4j}) \\ 0 & (\varepsilon_{5i}-\varepsilon_{5j}) & (\varepsilon_{6i}-\varepsilon_{6j}) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.21)$$

Можно показать, что ранг системы (2.15) равен пяти. Зафиксировав координаты $x_k, y_k, z_k, x_l, y_l, z_l, x_m, y_m, z_m$, получим систему из шести уравнений относительно функции $f(ij)$ с матрицей коэффициентов (2.18) и условием (2.21):

$$X_\mu f(ij) = 0, \quad \mu = 1, \dots, 6; \quad f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j);$$

$$X_\mu = A_\mu^1(i)\frac{\partial}{\partial x_i} + A_\mu^2(i)\frac{\partial}{\partial y_i} + A_\mu^3(i)\frac{\partial}{\partial z_i} + A_\mu^1(j)\frac{\partial}{\partial x_j} + A_\mu^2(j)\frac{\partial}{\partial y_j} + A_\mu^3(j)\frac{\partial}{\partial z_j}; \qquad (2.22)$$

$$A_\mu^1(i) = A_\mu^1(x_i, y_i, z_i), \quad A_\mu^1(j) = A_\mu^1(x_j, y_j, z_j)$$

и т.д.

Каждый интеграл системы (2.22) должен удовлетворять также и следующим уравнениям [91] :

$$[X_\mu, X_\rho] f(ij) = 0; \quad \mu, \rho = 1, \ldots, 6;$$

$$[X_\mu, X_\rho] = B_\nu^1(i)\frac{\partial}{\partial x_i} + \ldots + B_\nu^3 \frac{\partial}{\partial z_i} + B_\nu^1(j)\frac{\partial}{\partial x_j} + \ldots + B_\nu^3(j)\frac{\partial}{\partial z_j}; \tag{2.23}$$

$$B_\nu^1(i) = B_\nu^1(x_i, y_i, z_i), \quad B_\nu^1(j) = B_\nu^1(x_j, y_j, z_j) \quad \text{и т.д.}$$

Как в случае $\tau = 4$ можно показать, что система (2.22) будет полной.

Система (2.22) обладает тем же замечательным свойством, что и система (2.5) в случае $\tau = 4$: уравнения (2.23) являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами из уравнений самой системы.

Покажем это.

Выпишем общую матрицу коэффициентов систем (2.22), (2.23):

$$\begin{Vmatrix} A_1^1(i) & A_1^2(i) & A_1^3(i) & A_1^1(j) & A_1^2(j) & A_1^3(j) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_6^1(i) & A_6^2(i) & A_6^3(i) & A_6^1(j) & A_6^2(j) & A_6^3(j) \\ B_1^1(i) & B_1^2(i) & B_1^3(i) & B_1^1(j) & B_1^2(j) & B_1^3(j) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{15}^1(i) & B_{15}^2(i) & B_{15}^3(i) & B_{15}^1(j) & B_{15}^2(j) & B_{15}^3(j) \end{Vmatrix} \tag{2.24}$$

Обозначая столбцы матрицы (2.24) слева направо через $[1]_i$, $[2]_i$, $[3]_i$, $[1]_j$, $[2]_j$, $[3]_j$, запишем системы (2.22), (2.23):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}[1]_i + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}[2]_i + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}[3]_i + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}[1]_j +$$

$$+ \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}[2]_j + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}[3]_j = 0. \tag{2.25}$$

Возьмем два дополнительных элемента $p, q \in \mathfrak{M}$ и проведем аналогичные выкладки для кортежей $\langle ipklm \rangle$, $\langle iqklm \rangle$, $\langle pjklm \rangle$, $\langle qjklm \rangle$, $\langle pqklm \rangle$.

Вместе с уравнением (2.25) получим шесть уравнений относительно

двенадцати "переменных": $[1]_i, [2]_i, [3]_i, [1]_j, [2]_j, [3]_j,$
$[1]_p, [2]_p, [3]_p, [1]_q, [2]_q, [3]_q$.

Матрица коэффициентов имеет вид (2.26).

Разрешим систему относительно переменных:

$$[1]_i\,, [2]_i\,, [3]_i\,, [1]_j\,, [2]_j\,, [1]_p\,.$$

Определитель при этих переменных имеет клеточно-диагональный вид, и легко показать, что он не равен нулю тождественно.

$$\begin{Vmatrix}
\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} & \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ip)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(ip)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(ip)}{\partial z_i} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(ip)}{\partial x_p} & \frac{\partial f(ip)}{\partial y_p} & \frac{\partial f(ip)}{\partial z_p} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ir)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(ir)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(ir)}{\partial z_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(ir)}{\partial x_r} & \frac{\partial f(ir)}{\partial y_r} & \frac{\partial f(ir)}{\partial z_r} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(pj)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(pj)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(pj)}{\partial z_j} & \frac{\partial f(pj)}{\partial x_p} & \frac{\partial f(pj)}{\partial y_p} & \frac{\partial f(pj)}{\partial z_p} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(rj)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(rj)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(rj)}{\partial z_j} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(rj)}{\partial x_r} & \frac{\partial f(rj)}{\partial y_r} & \frac{\partial f(rj)}{\partial z_r} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(pr)}{\partial x_p} & \frac{\partial f(pr)}{\partial y_p} & \frac{\partial f(pr)}{\partial z_p} & \frac{\partial f(pr)}{\partial x_r} & \frac{\partial f(pr)}{\partial y_r} & \frac{\partial f(pr)}{\partial z_r}
\end{Vmatrix} \qquad (2.26)$$

Решая, имеем:

$$\begin{pmatrix} [1]_i \\ [2]_i \\ [3]_i \\ [1]_j \\ [2]_j \\ [1]_p \end{pmatrix} = \left\| F^{\alpha}_{\beta} \right\| \begin{pmatrix} [3]_j \\ [2]_p \\ [3]_p \\ [1]_q \\ [2]_q \\ [3]_q \end{pmatrix} . \qquad (2.27)$$

Соотношения (2.27) указывают на линейную зависимость соответствующих групп переменных. Ранг матрицы для каждой из групп столбцов ввиду (2.27) меньше семи. Рассмотрим матрицу $\| [1]_i\,, [3]_j,$ $[2]_p, [3]_p, [1]_q, [2]_q, [3]_q$. Выпишем определитель седьмого порядка, составленный из первых семи строчек и семи столбцов, который равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A_1^1(i) & A_1^3(j) & A_1^2(p) & A_1^3(p) & A_1^1(q) & A_1^2(q) & A_1^3(q) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_6^1(i) & A_6^3(j) & A_6^2(p) & A_6^3(p) & A_6^1(q) & A_6^2(q) & A_6^3(q) \\ B_1^1(i) & B_1^3(j) & B_1^2(p) & B_1^3(p) & B_1^1(q) & B_1^2(q) & B_1^3(q) \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим его по первому столбцу:

$$B_1^1(i)\,\delta_0(jpq) = A_1^1(i)\,\delta_1(jpq) + \cdots + A_6^1(i)\,\delta_6(jpq). \qquad (2.28)$$

Рассматривая вторую и третью строку в соотношениях (2.27), аналогичным образом получаем:

$$\begin{aligned} B_1^2(i)\,\delta_0(jpq) &= A_1^2(i)\,\delta_1(jpq) + \cdots + A_6^2(i)\,\delta_6(jpq), \\ B_1^3(i)\,\delta_0(jpq) &= A_1^3(i)\,\delta_1(jpq) + \cdots + A_6^3(i)\,\delta_6(jpq). \end{aligned} \qquad (2.29)$$

Можно показать, что $\delta_0(jpq) \neq 0$.

Поделим соотношения (2.28), (2.29) на $\delta_0(jpq)$ и зафиксируем элементы j, p, q. Получим:

$$\begin{aligned} B_1^1(i) &= a_1 A_1^1(i) + \cdots + a_6 A_6^1(i), \\ B_1^2(i) &= a_1 A_1^2(i) + \cdots + a_6 A_6^2(i), \\ B_1^3(i) &= a_1 A_1^3(i) + \cdots + a_6 A_6^3(i), \end{aligned} \qquad (2.30)$$

где $a_1, \dots, a_6$ – константы, не все равные нулю.

В системе (2.22) умножим первое уравнение на a_1, второе на $a_2, \dots$, шестое – на a_6, сложим их и вычтем первое уравнение из системы (2.23). Получим:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}\left[a_1 A_1^1(j) + \cdots + a_6 A_6^1(j) - B_1^1(j)\right] + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}\left[a_1 A_1^2(j) + \cdots + a_6 A_6^2(j) - B_1^2(j)\right] + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}\left[a_1 A_1^3(j) + \cdots + a_6 A_6^3(j) - B_1^3(j)\right] = 0.$$

Если квадратные скобки не равны нулю, то получаем уравнение, которое по аксиоме III (глава I) не может иметь места. То есть:

$$B_1^1(j) = a_1 A_1^1(j) + \dots + a_6 A_6^1(j),$$
$$B_1^2(j) = a_1 A_1^2(j) + \dots + a_6 A_6^2(j), \qquad (2.31)$$
$$B_1^3(j) = a_1 A_1^3(j) + \dots + a_6 A_6^3(j).$$

(2.30) и (2.31) означают, что первое уравнение из системы (2.23) является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами из уравнений основной системы (2.22). Аналогичный вывод можно сделать и для остальных уравнений (2.23).

Выпишем полученные результаты:

$$X_\mu f(ij) = 0,$$
$$[X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0, \qquad [X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu}^{\varkappa} X_\varkappa,$$

где $\mu, \nu, \varkappa = 1, \dots, 6$; $c_{\mu\nu}^{\varkappa} = -c_{\nu\mu}^{\varkappa} = const.$

Операторы $X_\mu(ij)$ являются линейными операторами, и для них, как легко проверить, выполняется тождество Якоби [94] :

$$[X_\mu, [X_\nu, X_\varkappa]] + [X_\nu, [X_\varkappa, X_\mu]] + [X_\varkappa, [X_\mu, X_\nu]] = 0.$$

Таким образом показано, что физической структуре ранга $r = 5$ соответствуют шестимерные алгебры Ли.

Заметим, что операторы $X_\mu(ij)$ являются двухточечными. Но и одноточечные операторы $X_\mu(i)$ ввиду соотношений (2.30) также образуют шестимерную алгебру Ли.

§ 2.3. Физическая структура ранга $r = 6$.

Общая постановка задачи приведена в главе I.

Определение 4. Пара $<\mathfrak{M}, f>$ образует физическую структуру ранга $r = 6$, если для каждого кортежа $<ijklmn>$ из некоторого плотного в $\mathfrak{M}^6$ множества и некоторой его окрестности $U(<ijklmn>)$ существует такая достаточно гладкая функция Φ, что $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$ и выполняется соотношение:

$$\Phi[f(ij), \dots, f(in), f(jk), \dots, f(jn), f(kl), \dots, f(mn)] = 0 \qquad (2.32)$$

для всякого кортежа из $U(\langle ijklmn \rangle)$. Число аргументов функции равно I5-ти. На множество $\mathfrak{M}$, функции f и Φ наложены ограничения, сформулированные в аксиомах I,...,IУ (глава I). Здесь: $n = r-2 = 4$. Тогда функция $f(ij)$ имеет локальное координатное представление в виде: $f(x_i, y_i, z_i, u_i, x_j, y_j, z_j, u_j)$. Функция $f(ij)$ достаточно гладкая и существенным образом зависит от своих аргументов.

Продифференцируем (2.32) по всем 24 координатам $x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots, x_n, y_n, z_n, u_n$. Получим систему из 24-х дифференциальных уравнений относительно I5-ти частных производных функции Φ по каждому из своих аргументов. Матрица системы имеет вид, аналогичный матрице (2.I4) для структуры ранга $r = 5$. Так как $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$, то система должна иметь нетривиальное решение. Следовательно, любой определитель I5-го порядка равен нулю. Можно показать, что найдется определитель I4-го порядка, не равный нулю тождественно, то есть ранг матрицы (2.33) равен I4-ти. Из всех определителей I5-го порядка, равных нулю, рассмотрим только те, которые окаймляют указанный определитель I4-го порядка. Таких определителей десять.

Выбранные соответствующим образом десять определителей разложим по первому столбцу. Проведя преобразования и зафиксировав координаты $x_k, \ldots, u_k, x_n, \ldots, u_n$, получим систему из десяти дифференциальных уравнений относительно функции $f(x_i, y_i, z_i, u_i, x_j, y_j, z_j, u_j)$:

$$X_\mu f(ij) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, 10; \tag{2.33}$$

$$X_\mu = A_\mu^1(i)\frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + A_\mu^4(i)\frac{\partial}{\partial u_i} + A_\mu^1(j)\frac{\partial}{\partial x_j} + \cdots + A_\mu^4(j)\frac{\partial}{\partial u_j};$$

$$A_\mu^k(i) = A_\mu^k(x_i, y_i, z_i, u_i); \quad A_\mu^k(j) = A_\mu^k(x_j, y_j, z_j, u_j); \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Можно показать, что ранг системы (2.33) равен семи. Коэффициенты системы (2.33) имеют специфический вид, характерный для физических структур всех рангов. Выпишем матрицу коэффициентов системы (2.33) в явном виде:

$$
\begin{array}{c}
X_1 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_7 \\ X_3 \\ X_5 \\ X_8 \\ X_6 \\ X_9 \\ X_{10}
\end{array}
\left\|
\begin{array}{ccccc}
A^1_1(i) & A^2_1(i) & A^3_1(i) & A^4_1(i) & \\
A^1_2(i) & A^2_2(i) & A^3_2(i) & A^4_2(i) & \\
A^1_4(i) & A^2_4(i) & A^3_4(i) & A^4_4(i) & \\
A^1_7(i) & A^2_7(i) & A^3_7(i) & A^4_7(i) & \\
(\varepsilon_1 A^1_1+\varepsilon_2 A^1_2)(i) & (\varepsilon_1 A^2_1+\varepsilon_2 A^2_2)(i) & (\varepsilon_1 A^3_1+\varepsilon_2 A^3_2)(i) & (\varepsilon_1 A^4_1+\varepsilon_2 A^4_2)(i) & (j) \\
(\varepsilon_3 A^1_1+\varepsilon_4 A^1_4)(i) & (\varepsilon_3 A^2_1+\varepsilon_4 A^2_4)(i) & (\varepsilon_3 A^3_1+\varepsilon_4 A^3_4)(i) & (\varepsilon_3 A^4_1+\varepsilon_4 A^4_4)(i) & \\
(\varepsilon_5 A^1_1+\varepsilon_6 A^1_7)(i) & (\varepsilon_5 A^2_1+\varepsilon_6 A^2_7)(i) & (\varepsilon_5 A^3_1+\varepsilon_6 A^3_7)(i) & (\varepsilon_5 A^4_1+\varepsilon_6 A^4_7)(i) & \\
(\varepsilon_7 A^1_2+\varepsilon_8 A^1_4)(i) & (\varepsilon_7 A^2_2+\varepsilon_8 A^2_4)(i) & (\varepsilon_7 A^3_2+\varepsilon_8 A^3_4)(i) & (\varepsilon_7 A^4_2+\varepsilon_8 A^4_4)(i) & \\
(\varepsilon_9 A^1_2+\varepsilon_{10} A^1_7)(i) & (\varepsilon_9 A^2_2+\varepsilon_{10} A^2_7)(i) & (\varepsilon_9 A^3_2+\varepsilon_{10} A^3_7)(i) & (\varepsilon_9 A^4_2+\varepsilon_{10} A^4_7)(i) & \\
(\varepsilon_{11} A^1_4+\varepsilon_{12} A^1_7)(i) & (\varepsilon_{11} A^2_4+\varepsilon_{12} A^2_7)(i) & (\varepsilon_{11} A^3_4+\varepsilon_{12} A^3_7)(i) & (\varepsilon_{11} A^4_4+\varepsilon_{12} A^4_7)(i) &
\end{array}
\right\| \qquad (2.34)
$$

где (j) обозначает четыре столбца с теми же коэффициентами, но со значком j. (Слева от матрицы стоят операторы X_μ в порядке, который будет установлен в главе IУ). По теории, если система (2.33) имеет решение, то должны удовлетворяться уравнения:

$$(X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu) f(i_j) = [X_\mu, X_\nu] f(i_j) = 0, \quad \mu,\nu = 1,\dots,10. \qquad (2.35)$$

Система (2.33), как и аналогичные системы для физических структур ранга $r = 4$ и $r = 5$, обладает тем же замечательным свойством: уравнения (2.35) являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами из уравнений системы (2.33). (Доказательство аналогично случаю физической структуры ранга $r = 5$).

То есть:

$$X_\mu f(ij)=0,$$
$$[X_\mu, X_\nu] f(ij)=0,$$
$$[X_\mu, X_\nu]=c^{\varkappa}_{\mu\nu} X_\varkappa$$

где $\mu, \nu, \varkappa = 1,\ldots,10$; $c^{\varkappa}_{\mu\nu}=-c^{\varkappa}_{\nu\mu}$ - вещественные числа. Для операторов $X_\mu(ij)$ выполняется тождество Якоби:

$$[X_\mu,[X_\nu,X_\varkappa]]+[X_\nu,[X_\varkappa,X_\mu]]+[X_\varkappa,[X_\mu,X_\nu]]=0.$$

Таким образом, физической структуре ранга $\tau = 6$ соответствуют десятимерные алгебры Ли.

Как и в случае структур ранга $\tau = 4$, $\tau = 5$, можно показать, что и одноточечные операторы $X_\mu(i)$ образуют десятимерную алгебру Ли.

Сделаем некоторые замечания о физической структуре произвольного ранга τ.

По общему правилу $\tau = n+2$, где n - размерность пространства, на котором задана физическая структура ранга τ. Для того, чтобы такая структура существовала, необходимо выполнение соотношения (I.3) со всеми аксиомами, указанными в главе I:

$$\Phi[f(ij),\ldots,f(iw),\ldots,f(vw)]=0. \qquad (1.3)$$

Число аргументов функции Φ равно:

$$N_1=\tau(\tau-1)/2=(n+2)(n+1)/2.$$

Число координат, соответствующих всем τ точкам, равно: $N_2 = \tau \cdot n = (n+2)n$. Дифференцируя (I.3) по всем $(n+2)n$ координатам, получим функциональную матрицу Якоби (как и для структур ранга $\tau = 4$; $\tau = 5$; $\tau = 6$), которая имеет $(n+2)(n+1)/2$ столбцов и $(n+2)n$ строк. Как показано в работах [68,80] ранг этой матрицы равен $(n+2)(n+1)/2 \quad -1$. То есть, все определители порядка $[(n+2)(n+1)/2]$ равны нулю. Выбирая все такие определители, окаймляющие какой-нибудь не равный нулю определитель порядка $[(n+2)(n+1)/2-1]$, получим $[(n+2)\cdot n-(n+2)(n+1)/2+1]=$ $=n(n+1)/2$ определителей. Раскрывая их по первому (вообще говоря, по любому) столбцу и проводя преобразования, получим $n(n+1)/2$ дифференциальных уравнений относительно какой-нибудь функции, например, $f(ij)=f(x_i^1,\ldots,x_i^n,x_j^1,\ldots,x_j^n)$. Можно показать, что ранг этой системы равен $(2n-1)$. В операторной форме систему можно записать в виде:

$$X_\mu f(ij)=0, \qquad \mu=1,\ldots,n(n+1)/2.$$

Если система имеет решение, то должны удовлетворяться уравнения

$$[X_\mu,X_\nu]f(ij)=0, \qquad \mu,\nu=1,\ldots,n(n+1)/2.$$

В работе [68] показано, что уравнения $[X_\mu,X_\nu]f(ij)=0$ являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами из уравнений $X_\mu f(ij)=0$, $\mu=1,\ldots,n(n+1)/2$. Операторы X_μ являются линейными дифференциальными операторами, и для них выполняется тождество Якоби.

Таким образом, произвольной физической структуре ранга r соответствует система из $n(n+1)/2$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, операторы которой образуют базис $n(n+1)/2$ - мерной алгебры Ли.

ГЛАВА III. ДВУМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Еще Г.Гельмгольц в работе "О фактах, лежащих в основании геометрии" высказал предположение, что метрика n-мерного пространства не может быть произвольной, если в пространстве твердые тела движутся с $n(n+1)/2$ степенями свободы, и что между всеми взаимными расстояниями для произвольных $(n+2)$ точек твердого тела должна существовать зависимость [7, с.366]. Для случая $n = 2$ задачу о нахождении возможных двумерных геометрий исследовал А.Пуанкаре в работе "Об основных гипотезах геометрии". (Там же, с.388–398).

Основываясь на принципе феноменологической симметрии, Г.Г. Михайличенко решил задачу о нахождении всех возможных феноменологически инвариантных двумерных геометрий. В работе [85] показано, что существуют только десять невырожденных двумерных геометрий.

В настоящей главе задача о нахождении всех невырожденных двумерных геометрий, соответствующих физической структуре ранга $\tau = 4$, исследуется другим методом. Найдены две формулы, из которых можно получить все десять геометрий, указанных в работе [85].

В главе II приведена постановка задачи о физической структуре ранга $\tau = 4$. Установлено, что ей соответствует система из трех линейно независимых уравнений:

$$X_\mu f(ij) = \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} A^1_\mu(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} A^2_\mu(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} A^1_\mu(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} A^2_\mu(j) = 0, \tag{3.1}$$

причем: $$[X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0,$$

$$[X_\mu, X_\nu] = c^{\varkappa}_{\mu\nu} X_\varkappa,$$

где $\mu, \nu, \varkappa = 1,2,3$; $C^{\varkappa}_{\mu\nu} = -C^{\varkappa}_{\nu\mu}$ – вещественные числа, $A^1_\mu(i) = A^1_\mu(x_i, y_i)$; $A^1_\mu(j) = A^1_\mu(x_j, y_j)$ и т.д. Найдем явный вид функции $f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$, удовлетворяющей системе (3.I).

Будем различать два случая: $\Delta = |C^{\varkappa}_{\mu\nu}| \neq 0$; $\Delta = |C^{\varkappa}_{\mu\nu}| = 0$, где $|C^{\varkappa}_{\mu\nu}|$ – определитель, составленный из структурных констант $C^{\varkappa}_{\mu\nu}$.

§ 3.I. Двумерные пространства постоянной кривизны и симплектическая плоскость

Рассмотрим случай $\Delta \neq 0$. Коммутационные соотношения в (3.I) можно упростить переходом к другому базису $X'_\rho = a_{\rho\nu} X_\nu$, где $a_{\rho\nu}$ – неособенная матрица. Можно подобрать такую матрицу $a_{\rho\nu}$, что коммутаторы в новом базисе будут иметь вид:

$$[X'_1, X'_2] = K_1 X'_3 ; \; [X'_3, X'_1] = K_2 X'_2 ; \; [X'_2, X'_3] = K_3 X'_1 , \tag{3.2}$$

где $K_1, K_2, K_3 = \pm 1$ (см., например, [95]). Для дальнейших выкладок удобнее перейти к другому базису:

$$\bar{X}_1 = X'_1 ; \quad \bar{X}_2 = X'_2 + n_1 X'_3 ; \quad \bar{X}_3 = n_2 X'_2 + X'_3 ,$$

где $1 - n_1 n_2 \neq 0$. Тогда:

$$\begin{aligned}
[\bar{X}_1, \bar{X}_2] &= \frac{-n_1 K_2 - n_2 K_1}{1 - n_1 n_2} \bar{X}_2 + \frac{K_1 + n_1^2 K_2}{1 - n_1 n_2} \bar{X}_3 , \\
[\bar{X}_3, \bar{X}_1] &= \frac{K_2 + n_2^2 K_1}{1 - n_1 n_2} \bar{X}_2 + \frac{-n_1 K_2 - n_2 K_1}{1 - n_1 n_2} \bar{X}_3 , \\
[\bar{X}_2, \bar{X}_3] &= (1 - n_1 n_2) K_3 \bar{X}_1 .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Выберем n_1 и n_2 так, чтобы: $K_1 + n_1^2 K_2 = 0$; $K_2 + n_2^2 K_1 = 0$. Отсюда: $1 - n_1^2 n_2^2 = 0$, то есть $1 + n_1 n_2 = 0$, (т.к. $1 - n_1 n_2 \neq 0$).

Тогда:

$$[\bar{X}_1, \bar{X}_2] = \sqrt{\bar{K}_1}\, \bar{X}_2 ; \; [\bar{X}_3, \bar{X}_1] = \sqrt{\bar{K}_1}\, \bar{X}_3 ; \; [\bar{X}_2, \bar{X}_3] = \bar{K}_2 \bar{X}_1 \tag{3.4}$$

где $\bar{K}_1 = -K_1 K_2$; $\bar{K}_2 = 2 K_3$.

Рассмотрим систему (3.I) с коммутаторами (3.4). Упростим уравнения (3.I), перейдя к новым переменным: $\bar{x} = \mu_1(x,y)$; $\bar{y} = \mu_2(x,y)$ (якобиан замены не равен нулю). Выберем μ_1, μ_2 так, чтобы:

$$\mu_{1x} A_1^1 + \mu_{1y} A_1^2 = 1; \qquad \mu_{2x} A_1^1 + \mu_{2y} A_1^2 = 0.$$

Тогда матрица коэффициентов системы в новых переменных будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ T_1(i) & T_2(i) & T_1(j) & T_2(j) \\ T_3(i) & T_4(i) & T_3(j) & T_4(j) \end{Vmatrix} \qquad (3.5)$$

Запишем систему (3.I) в виде:

$$\sum_{k=1}^{4} \varphi^{\mu k}(z_1, z_2, z_3, z_4) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_k} = 0 \quad , \text{ где } z_1 = x_i, \dots, z_4 = y_j; \quad \mu = 1,2,3.$$

Тогда уравнения $[X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0$ запишутся в виде:

$$\sum_{\rho=1}^{4} \left\{ \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial \varphi^{\mu\rho}}{\partial z_k} \varphi^{\nu\rho} - \frac{\partial \varphi^{\nu\rho}}{\partial z_k} \varphi^{\mu\rho} \right) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_k} \right\} = 0. \qquad (3.6)$$

Таких уравнений будет три. Используя (3.5), найдем матрицу коэффициентов системы $[X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0$:

$$\begin{Vmatrix} T_{1x}(i) & T_{2x}(i) & T_{1x}(j) & T_{2x}(j) \\ T_{3x}(i) & T_{4x}(i) & T_{3x}(j) & T_{4x}(j) \\ M_1(i) & M_2(i) & M_1(j) & M_2(j) \end{Vmatrix} \qquad (3.7)$$

где $M_1 = T_{1x} T_3 - T_{3x} T_1 + T_{1y} T_4 - T_{3y} T_2$; $M_2 = T_{2x} T_3 - T_{4x} T_1 + T_{2y} T_4 - T_{4y} T_2$.

Из (3.4) с помощью (3.5), (3.7) получаем:

$$T_{1x} = -\sqrt{K_1}\, T_1; \quad T_{3x} = \sqrt{K_1}\, T_3; \quad T_{1x} T_3 - T_{3x} T_1 + T_{1y} T_4 - T_{3y} T_2 = K_2,$$

$$T_{2x} = -\sqrt{K_1}\, T_2; \quad T_{4x} = \sqrt{K_1}\, T_4; \quad T_{2x} T_3 - T_{4x} T_1 + T_{2y} T_4 - T_{4y} T_2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} T_1 &= \varphi_1(y) \exp(-\sqrt{K_1}\, x); & T_3 &= \varphi_3(y) \exp \sqrt{K_1}\, x; \\ T_2 &= \varphi_2(y) \exp(-\sqrt{K_1}\, x); & T_4 &= \varphi_4(y) \exp \sqrt{K_1}\, x; \end{aligned} \qquad (3.8)$$

$$-2\sqrt{\kappa_1}\varphi_1\varphi_3+\varphi_{1y}\varphi_4-\varphi_{3y}\varphi_2=\kappa_2;$$
$$-\sqrt{\kappa_1}(\varphi_2\varphi_3+\varphi_1\varphi_4)+\varphi_{2y}\varphi_4-\varphi_{4y}\varphi_2=0.$$

Решаем систему (3.I) с матрицей коэффициентов (3.5). Найдем интегралы первого уравнения методом характеристик: $x_i-x_j=const$; $y_i=const$; $y_j=const$. Введем переменные $z_0=x_i$; $z_1=x_i-x_j$. Система (3.I) запишется в виде:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_0}=0,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}\left[T_1(i)-T_1(j)\right]+\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}T_2(i)+\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}T_2(j)=0,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}\left[T_3(i)-T_3(j)\right]+\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}T_4(i)+\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}T_4(j)=0.$$

Подставим явный вид коэффициентов из (3.8) и сократим второе уравнение на $exp(-\sqrt{\kappa_1}x_j)$, третье – на $exp\sqrt{\kappa_1}x_j$. Получим матрицу коэффициентов (первое уравнение опустим):

$$\left\|\begin{matrix}\varphi_1(y_i)\exp(-\sqrt{\kappa_1}z_1)-\varphi_1(y_j) & \varphi_2(y_i)\exp(-\sqrt{\kappa_1}z_1) & \varphi_2(y_j)\\ \varphi_3(y_i)\exp\sqrt{\kappa_1}z_1-\varphi_3(y_j) & \varphi_4(y_i)\exp\sqrt{\kappa_1}z_1 & \varphi_4(y_j)\end{matrix}\right\| \qquad (3.9)$$

Отметим, что $\varphi_2(y_i)$ и $\varphi_2(y_j)$ не могут быть равны нулю. Действительно, предположим, что $\varphi_2(y_i)=0$. Тогда из последнего соотношения (3.8) имеем: $\varphi_1(y_i)\varphi_4(y_i)=0$. Если $\varphi_1(y_i)=0$, то первое уравнение принимает вид: $-\varphi_1(y_j)\partial f(ij)/\partial z_1+\varphi_2(y_j)\partial f(ij)/\partial y_j=0$, что не допускается по аксиоме Ш (глава I). Если же $\varphi_4(y_i)=0$, то система с матрицей (3.9) запишется в виде:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}\left[\varphi_1(y_i)\exp(-\sqrt{\kappa_1}z_1)-\varphi_1(y_j)\right]+\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}\varphi_2(y_j)=0,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}\left[\varphi_3(y_i)\exp\sqrt{\kappa_1}z_1-\varphi_3(y_j)\right]+\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}\varphi_4(y_j)=0.$$

Определитель системы равен нулю, то есть ранг системы уменьшается, что также не допускается. Таким образом, действительно $\varphi_2(y_i)\neq0$. Также можно показать, что $\varphi_2(y_j)$, $\varphi_4(y_i)$, $\varphi_4(y_j)$ не равны нулю.

Разрешим систему с матрицей (3.9) относительно $\partial f(i_j)/\partial y_i$ и $\partial f(i_j)/\partial y_j$:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}\left[\frac{\varphi_1}{\varphi_2}i + \frac{1}{\varphi_{2i}}\cdot\frac{\bar\lambda_i \exp\sqrt{k_1}z_1 - \bar\lambda_j}{\bar\sigma_i \exp\sqrt{k_1}z_1 - \bar\sigma_j\exp(-\sqrt{k_1}z_1)}\right] + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = 0,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}\left[-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}j + \frac{1}{\varphi_{2j}}\;\frac{\bar\lambda_j \exp(-\sqrt{k_1}z_1) - \bar\lambda_i}{\bar\sigma_i \exp\sqrt{k_1}z_1 - \bar\sigma_j\exp(-\sqrt{k_1}z_1)}\right] + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0, \qquad (3.10)$$

где $\bar\lambda = (\varphi_3 - \varphi_1\varphi_4/\varphi_2)(y)$; $\bar\sigma = (\varphi_4/\varphi_2)(y)$.

Преобразуем знаменатель дроби, входящей в первое уравнение:

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_2}i\exp\sqrt{k_1}z_1 - \frac{\varphi_4}{\varphi_2}j\exp(-\sqrt{k_1}z_1) = \left(\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\right)_i^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\right)_j^{1/2}\cdot 2\,sh\,\sigma,$$

где $\sigma = \sqrt{k_1}z_1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\right)_i - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\right)_j$.

Из последнего соотношения в (3.8):

$$\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\right)_y = -\sqrt{k_1}\,\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right).$$

Отсюда:

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_2} = \exp\left[-\sqrt{k_1}\int\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)dy + a\right]$$, где $a = const$.

Тогда $\sigma = \sqrt{k_1}z_1 - \sqrt{k_1}\,\frac{1}{2}\int\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)_i dy_i + \frac{1}{2}\sqrt{k_1}\int\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)_j dy_j$.

Перейдем к переменной σ. Воспользовавшись соотношением

$$\exp\sigma = ch\,\sigma + sh\,\sigma,$$

получим: $$\frac{\partial f(ij)}{\partial\sigma}E_{1i}\,\frac{\lambda_i ch\sigma - \lambda_j}{sh\sigma} + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = 0.$$

Аналогично для второго уравнения:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial\sigma}E_{1j}\,\frac{\lambda_j ch\sigma - \lambda_i}{sh\sigma} + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0,$$ где: $E_1 = \frac{1}{2}(\varphi_4/\varphi_2)^{-\frac{1}{2}}(y)$, $\lambda = (\varphi_3 - \varphi_1\varphi_4/\varphi_2)(\varphi_4/\varphi_2)^{-\frac{1}{2}}(y)$.

Далее, перейдем к переменной:

$$\nu_i = \int E_{1i}\,dy_i\;;\quad \nu_j = \int E_{1j}\,dy_j\;:$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial\sigma}\cdot\frac{\lambda_i ch\sigma - \lambda_j}{sh\sigma} + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = 0\;;\quad \frac{\partial f(ij)}{\partial\sigma}\,\frac{\lambda_j ch\sigma - \lambda_i}{sh\sigma} + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0. \qquad (3.11)$$

И, наконец, переходя к переменной $u = ch\,\sigma$, получим:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial u}(\lambda_i u-\lambda_j)+\frac{\partial f(ij)}{\partial \vartheta_i}=0,$$
$$\frac{\partial f(ij)}{\partial u}(\lambda_j u-\lambda_i)+\frac{\partial f(ij)}{\partial \vartheta_j}=0. \tag{3.12}$$

Подставляя коэффициенты системы (3.12) в (3.6), получим:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta}-\lambda^2=const=c.$$

Если подставить сюда явный вид функции λ и использовать (3.8), получим: $c=-2\bar{K}_2$, то есть

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta}-\lambda^2=-2\bar{K}_2. \tag{3.13}$$

Решаем первое уравнение системы (3.12) методом характеристик: $du/d\vartheta_i=\lambda_i u-\lambda_j$ – линейное уравнение.

$$C=u\cdot\exp\left(-\int\lambda_i d\vartheta_i\right)+\lambda_j\int\exp\left(-\int\lambda_i d\vartheta_i\right)d\vartheta_i.$$

Введем переменную:

$$\rho_1=C_i.$$

После замены, используя соотношение (3.13), второе уравнение в (3.12) приводится к виду:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\left\{\lambda_j\rho_1+\left[2\bar{K}_2\int\exp\left(-\int\lambda_i d\vartheta_i\right)d\vartheta_i-\lambda_i\exp\left(-\int\lambda_i d\vartheta_i\right)\right]\right\}+\frac{\partial f}{\partial \vartheta_j}=0.$$

Обозначим $2\bar{K}_2=K_2$ (из (3.13)). Тогда при $\lambda^2<K_2$ из (3.13) получаем: $\lambda(\vartheta)=-\sqrt{K_2}\,th\sqrt{K_2}(\vartheta+c)$. Можно перейти к $\vartheta'=\vartheta+C$; $\lambda(\vartheta')=-\sqrt{K_2}\,th\,\vartheta'$. (В дальнейшем штрихи опустим). Тогда:

$$-\int\lambda d\vartheta=\ln ch\sqrt{K_2}\,\vartheta;\quad \int\exp\left(-\int\lambda d\vartheta\right)d\vartheta=\frac{1}{\sqrt{K_2}}\,sh\sqrt{K_2}\,\vartheta. \tag{3.14}$$

Используя полученные соотношения, находим:

$$-2\bar{K}_2\int\exp\left(-\int\lambda_i d\vartheta_i\right)d\vartheta_i-\lambda_i\exp\left(-\int\lambda_i d\vartheta_i\right)=0.$$

Окончательно, уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\lambda_j\rho_1+\frac{\partial f}{\partial \vartheta_j}=0.$$

Его интеграл: $C = \rho_1 \cdot \exp(-\int \lambda_j d\tilde{v}_j)$.

Таким образом, общее решение первоначальной системы (3.I) с матрицей (3.5) имеет вид:

$$f(i_j) = \chi\left[\rho_1 \exp(-\int \lambda_j d\tilde{v}_j)\right],$$

где χ – произвольная функция одного аргумента. В интеграле C вернемся к переменным x_i, y_i, x_j, y_j :

$$C = \exp(-\int \lambda_i d\tilde{y}_i - \int \lambda_j d\tilde{y}_j)\, ch\sqrt{\bar{K}_1}(\bar{x}_i - \bar{x}_j) +$$
$$+ \lambda_j \int \exp(-\int \lambda_i d\tilde{y}_i) d\tilde{y}_i \cdot \exp(-\int \lambda_j d\tilde{y}_j).$$

Используя (3.I4), окончательно имеем:

$$C = ch\sqrt{K_2}\,\bar{y}_i \cdot ch\sqrt{K_2}\,\bar{y}_j \cdot ch\sqrt{\bar{K}_1}(\bar{x}_i - \bar{x}_j) - sh\sqrt{K_2}\,\bar{y}_i \cdot sh\sqrt{K_2}\,\bar{y}_j . \qquad (3.I5)$$

Полученная формула описывает все двумерные пространства постоянной кривизны. В зависимости от знака величин $\bar{K}_1$ и K_2 можно выписать три различных решения. Будем указывать соответствующую двумерную "сферу":

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1;$ $\quad K_2 < 0,\ \bar{K}_1 < 0,$

$$C = \cos\bar{y}_i \cdot \cos\bar{y}_j \cdot \cos(\bar{x}_i - \bar{x}_j) + \sin\bar{y}_i \cdot \sin\bar{y}_j ; \qquad (3.I6)$$

б) $x^2 + y^2 - z^2 = 1;$ $\quad K_2 < 0,\ \bar{K}_1 > 0,$

$$C = \cos\bar{y}_i \cdot \cos\bar{y}_j \cdot ch(\bar{x}_i - \bar{x}_j) + \sin\bar{y}_i \cdot \sin\bar{y}_j ;$$

в) $x^2 + y^2 - z^2 = -1;$ $\quad K_2 > 0,\ \bar{K}_1 > 0,$

$$C = ch\bar{y}_i \cdot ch\bar{y}_j \cdot ch(\bar{x}_i - \bar{x}_j) - sh\bar{y}_i \cdot sh\bar{y}_j .$$

Выражение (3.I6а) определяет метрику двумерной сферы, (3.I6б) – двумерного однополостного гиперболоида, (3.I6в) – плоскости Лобачевского.

Формулы (3.I6б) и (3.I6в) можно получить и в другом виде, известном как модель Клейна для пространства Лобачевского. Этот вид имеет самостоятельный интерес.

Будем решать систему с матрицей (3.9) другим способом при $\bar{K}_1 > 0$. Найдем интегралы первого уравнения в (3.9) методом характеристик:

$$\sqrt{\bar{K}_1}\, z_1 - \Psi_1(y_i) + \Psi_1(y_i) = c_1 \ ;$$

$$\Psi_2(y_i) \exp\left[-\sqrt{\bar{K}_1} z_1 + \Psi_1(y_i) - \Psi_1(y_i)\right] - \Psi_2(y_i) = C_2 \,,$$

где $\Psi_1(y) = \int (\varphi_1/\varphi_2)(y)\,dy \ ; \quad \Psi_2(y) = \int \varphi_2^{-1}(y) \exp\Psi_1\, dy.$

Введем переменные $\rho_0 = y_i$, $\rho_1 = c_1$, $\rho_2 = C_2$. Тогда первое уравнение из (3.9) запишется в виде $\partial f / \partial \rho_0 = 0$, а второе:

$$f_{\rho_1}\left[\lambda(y_i) - \lambda(y_i)\exp(-\rho_1)\right] + f_{\rho_2}\left[-\Psi_2(y_i)\left(\lambda(y_i) - \lambda(y_i)\exp(-\rho_1)\right) \times\right.$$

$$\left.\times \exp(-\rho_1) - \sigma(y_i) + \sigma(y_i)\exp(-2\rho_1)\right] = 0,$$

где $\lambda = (\varphi_3 - \varphi_1\varphi_4/\varphi_2)\exp\Psi_1 \ ; \quad \sigma = (\varphi_4/\varphi_2)\exp 2\Psi_1.$

Дифференцируя λ по y и используя (3.8), получим: $\lambda_y = -\bar{K}_2 \Psi_{2y}$. Отсюда: $\lambda = -\bar{K}_2 \Psi_2 + b$, где $b = const$. Дифференцируя σ по y и используя (3.8), получим: $\sigma_y = -\lambda \cdot \Psi_{2y}$. Отсюда: $\sigma = \frac{\bar{K}_2}{2}\Psi_2^2 - b\Psi_2 + c$. Подставляя λ и σ в третье уравнение, после преобразований получим:

$$f_{\rho_1}\left[\bar{K}_2\rho_2 + b(1 - \exp(-\rho_1))\right] + f_{\rho_2}\left[-\left(\frac{\bar{K}_2}{2}\rho_2^2 + b\rho_2\right) - c\left(1 - \exp(-2\rho_1)\right)\right] = 0.$$

Запишем уравнение характеристик:

$$d\rho_1 = \frac{\left[\bar{K}_2\rho_2 + b(1 - \exp(-\rho_1))\right] d\rho_2}{-\left(\frac{\bar{K}_2}{2}\rho_2^2 + b\rho_2\right) - c\left(1 - \exp(-2\rho_1)\right)} \ . \tag{3.17}$$

Введем переменную $\bar{\rho}_2 = \frac{\bar{K}_2}{2}\rho_2^2 + b\rho_2\left(1 - \exp(-\rho_1)\right)$. Ее полный дифференциал:

$$d\bar{\rho}_2 = \left[\bar{K}_2\rho_2 + b(1 - \exp(-\rho_1))\right] d\rho_2 + b\rho_2 \exp(-\rho_1)\, d\rho_1 \,.$$

Умножим и разделим левое отношение в (3.17) на $(-b\rho_2\exp(-\rho_1))$ и вычтем из правого:

$$d\bar{\rho}_2 / d\rho_1 = -\bar{\rho}_2 - c\left(1 - \exp(-2\rho_1)\right).$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \bar{\rho}_2 \exp \rho_1 + c\left[\exp(-\rho_1) + \exp \rho_1\right].$$

Переходя к переменным x_i, y_i, x_j, y_j , после преобразований имеем:

$$C_1 = (\bar{y}_i^{\,2} + \delta)\exp(\bar{x}_i - \bar{x}_j) + (\bar{y}_j^{\,2} + \delta)\exp\left[-(\bar{x}_i - \bar{x}_j)\right] - 2\bar{y}_i \bar{y}_j,$$

где $\bar{y} = \psi_2 - b/\bar{k}_2$; $\delta = 2c/\bar{k}_2 - b^2/\bar{k}_2^{\,2}.$

Преобразуем интеграл:

$$C = \left[\bar{y}_j \exp(-(\bar{x}_i - \bar{x}_j)) - \bar{y}_i\right]^2 \exp(\bar{x}_i - \bar{x}_j) +$$

$$+ \delta\left[\exp(\bar{x}_i - \bar{x}_j) + \exp(-(\bar{x}_i - \bar{x}_j))\right] =$$

$$= \frac{\left[\bar{y}_j \exp \bar{x}_j - \bar{y}_i \exp \bar{x}_i\right]^2 + \delta\left[\exp 2\bar{x}_i + \exp 2\bar{x}_j\right]}{\exp \bar{x}_i \cdot \exp \bar{x}_j}.$$

Или:

$$C_1 - 2\delta = \bar{C} = \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2 + \delta(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2}{\tilde{x}_i \cdot \tilde{x}_j}. \qquad (3.18)$$

(3.18) при $\delta > 0$ трактуется как модель Клейна плоскости Лобачевского, а при $\delta < 0$ - двумерного однополостного гиперболоида.

При $\delta = 0$ имеем:

$$\bar{C}^{\frac{1}{2}} = \hat{x}_i \hat{x}_j (\hat{y}_i - \hat{y}_j). \qquad (3.19)$$

(3.19) является метрикой симплектической плоскости.

Можно непосредственными вычислениями привести метрику (3.18) к виду (3.16б) или (3.16в).

Случай $\Delta \neq 0$ рассмотрен полностью.

§ 3.2. Евклидова и псевдоевклидова плоскости, "экзотические" пространства

Пусть $\Delta = 0$. Как и в случае $\Delta \neq 0$, будем рассматривать систему (3.1) с матрицей коэффициентов (3.5). Так как $\Delta = |C^{\varkappa}_{\mu\nu}| = 0$, то строчки в $|C^{\varkappa}_{\mu\nu}|$ линейно зависимы и, например, коммутатор $[X_2, X_3]$ можно привести к виду: $[X_2', X_3'] = 0$. Покажем, что ранг $\|C^{\varkappa}_{\mu\nu}\|$ равен двум. Предположим, что ранг равен единице. Тогда при $C^1_{12} \neq 0$, например, коммутаторы можно привести к виду: $[X_1', X_2'] = C^1_{12} X_1'$; $[X_3', X_1'] = 0$; $[X_2', X_3'] = 0$. Используя (3.5), из первых двух соотношений получим: $T_{1x} = -C^1_{12}$; $T_{2x} = T_{3x} = T_{4x} = 0$. Из $[X_2', X_3'] = 0$: $T_{2y} T_4 - T_{4y} T_2 = 0$. Откуда: $T_2 = a T_4$. Вычтем из второго уравнения (3.1) третье, умноженное на a , и выпишем первые два уравнения:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} (T_1 - aT_3)(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} (T_1 - a T_3)(j) = 0.$$

Так как $\partial f(ij)/\partial x_i$ и $\partial f(ij)/\partial x_j$ не равны тождественно нулю ($f(ij)$ существенным образом зависит от своих аргументов), то определитель из коэффициентов этой подсистемы равен нулю. То есть уравнения системы (3.1) линейно зависимы, что не допускается, так как ранг системы (3.1) по доказанному равен трем. Аналогично для любого другого варианта предположение о том, что ранг $\|C^{\varkappa}_{\mu\nu}\|$ равен единице, приводит к противоречию.

Итак, имеем:

$$[X_1, X_2] = C^1_{12} X_1 + C^2_{12} X_2 + C^3_{12} X_3 ;$$

$$[X_3, X_1] = C^1_{31} X_1 + C^2_{31} X_2 + C^3_{31} X_3 ;$$

$$[X_2, X_3] = 0.$$

Подставим коммутаторы в тождество Якоби. Получим: $c_{12}^{1}[X_3, X_1] - c_{31}^{1}[X_1, X_2] = 0$. Так как ранг $\|c_{\mu\nu}^{\varkappa}\|$ равен двум, то $c_{12}^{1} = c_{31}^{1} = 0$. После переобозначений окончательно имеем:

$$[X_1, X_2] = a_1 X_2 + a_2 X_3; \quad [X_1, X_3] = a_3 X_2 + a_4 X_3; \quad [X_2, X_3] = 0;$$

где $a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$.

Не теряя общности, будем считать $a_1, \ldots, a_4 \neq 0$. В случае равенства нулю каких-то a_i с учетом условия $a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$ легко показать, что результаты будут те же. Введем оператор $X_3' = a_2 X_3 - a_4 X_2$. Получим:

$$[X_1, X_2] = b_2 X_2 + X_3'; \quad [X_1, X_3'] = b_1 X_2; \quad [X_2, X_3'] = 0; \qquad (3.20)$$

где $b_1 = a_2 a_3 - a_1 a_4 \neq 0$, $b_2 = a_1 + a_4$.

Будем решать систему (3.I) с коммутаторами (3.20). Введением новых переменных, как в случае $\Delta \neq 0$, можно привести матрицу коэффициентов к виду:

$$\begin{Vmatrix} T_1(i) & T_2(i) & T_1(j) & T_2(j) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ T_3(i) & T_4(i) & T_3(j) & T_4(j) \end{Vmatrix} \qquad (3.21)$$

Матрица коэффициентов системы уравнений $[X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0$ будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} T_{1x}(i) & T_{2x}(i) & T_{1x}(j) & T_{2x}(j) \\ M_1(i) & M_2(i) & M_1(j) & M_2(j) \\ T_{3x}(i) & T_{4x}(i) & T_{3x}(j) & T_{4x}(j) \end{Vmatrix} \qquad (3.22)$$

где M_1 и M_2 те же, что и в (3.7).

Используя (3.20), (3.2I), (3.22), получаем:

$$T_{1x} = T_3 + b_2; \quad T_{3x} = 0; \quad T_{1x} T_3 - T_{3x} T_1 + T_{1y} T_4 - T_{3y} T_2 = b_1;$$

$$T_{2x} = T_4; \quad T_{4x} = 0; \quad T_{2x} T_3 - T_{4x} T_1 + T_{2y} T_4 - T_{4y} T_2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$T_1 = [\varphi_3(y) + b_2]x + \varphi_1(y); \qquad T_3 = \varphi_3(y);$$

$$T_2 = \varphi_4(y)x + \varphi_2(y); \qquad T_4 = \varphi_4(y); \tag{3.23}$$

$$[\varphi_3 + b_2]\varphi_3 + \varphi_{1y}\varphi_4 - \varphi_{3y}\varphi_2 = b_1;$$

$$\varphi_4\varphi_3 + \varphi_{2y}\varphi_4 - \varphi_{4y}\varphi_2 = 0.$$

Решаем второе уравнение системы (3.I) с матрицей (3.2I). Его интегралы:

$$x_i - x_j = const; \quad y_i = const; \quad y_j = const.$$

Введем переменные $z_0 = x_i$, $z_1 = x_i - x_j$. После замены система (3.I) запишется в виде:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}[T_1(i) - T_1(j)] + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}T_2(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}T_2(j) = 0,$$

$$\partial f(ij)/\partial z_0 = 0,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}[T_3(i) - T_3(j)] + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}T_4(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}T_4(j) = 0.$$

Подставим явный вид коэффициентов $T_1, \ldots, T_4$ из (3.23). После некоторых преобразований получим:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}[(b_2 + \varphi_{3i})z_1 + \varphi_{1i} - \varphi_{1j}] + \frac{\partial f}{\partial y_i}(\varphi_{4i}z_1 + \varphi_{2i}) + \frac{\partial f}{\partial y_j}\varphi_{2j} = 0,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_1}(\varphi_{3i} - \varphi_{3j}) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}\varphi_{4i} + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}\varphi_{4j} = 0, \tag{3.24}$$

где $\varphi_{1i} = \varphi_1(y_i)$; $\varphi_{1j} = \varphi_1(y_j)$ и т.д.

Как и в случае $\Delta \neq 0$ можно показать, что $\varphi_4 \neq 0$. Найдем интегралы второго уравнения в (3.24) методом характеристик:

$$z_1 - \psi_{1i} + \psi_{1j} = c_1;$$

$$\psi_{2i} - \psi_{2j} = c_2,$$

где $\psi_{1i} = \int (\varphi_3/\varphi_4)(y_i)\,dy_i$; $\psi_{2i} = \int \varphi_{4i}^{-1}\,dy_i$ и т.д.

Проведем замену переменных: $y_j = \rho_0$; $c_1 = \rho_1$; $c_2 = \rho_2$. Тогда второе уравнение дает: $\partial f/\partial \rho_0 = 0$. Первое уравнение в (3.24) после замены:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\left[b_2 z_1+\lambda_i-\lambda_j\right]+\frac{\partial f}{\partial \rho_2}\left[z_1+\sigma_i-\sigma_j\right]=0, \qquad (3.25)$$

где $\lambda_i=(\varphi_1-\varphi_2\varphi_3/\varphi_4)(y_i)$; $\sigma_i=(\varphi_2/\varphi_4)(y_i)$ и т.д.

Найдем $d\lambda/dy$. Используя (3.23), получим:

$$d\lambda/dy=b_1\Psi_{2y}-b_2\Psi_{1y};$$

отсюда: $\lambda(y)=-b_2\Psi_1+b_1\Psi_2+t_1$, где $t_1=const$.

Найдем $d\sigma/dy$. Из последнего соотношения в (3.23) имеем:

$$\sigma_y=(\varphi_2/\varphi_4)_y=-\varphi_3/\varphi_4=-\Psi_{1y};$$

отсюда: $\sigma(y)=-\Psi_1(y)+t_2$, где $t_2=const$.

Подставив явный вид λ, σ в (3.25), получим:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\left(b_2\rho_1+b_1\rho_2\right)+\frac{\partial f}{\partial \rho_2}\cdot\rho_1=0.$$

Запишем уравнение характеристик:

$$\frac{d\rho_1}{d\rho_2}=b_1\frac{\rho_2}{\rho_1}+b_2.$$ Введем переменную $u=\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Получим: $$\frac{d\rho_2}{\rho_2}=\frac{u\,du}{-u^2+b_2u+b_1}.$$

После интегрирования имеем:

$$C=\ln\rho_2+\frac{1}{2}\ln\left[(2u-b_2)^2-h\right]-\frac{b_2}{2\sqrt{h}}\ln\frac{2u-b_2+\sqrt{h}}{2u-b_2-\sqrt{h}}, \qquad (3.26)$$

где $h=b_2^2+4b_1$.

Используя соотношение $\ln\frac{x+1}{x-1}=2\,\mathrm{Arcth}\,x$ и заменяя $u=\frac{\rho_1}{\rho_2}$, получим:

$$C=\ln\left[(2\rho_1-b_2\rho_2)^2-h\rho_2^2\right]-\frac{2b_2}{\sqrt{h}}\mathrm{Arcth}\frac{2\rho_1-b_2\rho_2}{\sqrt{h}\,\rho_2}. \qquad (3.27)$$

Переходя к переменным x,y при $h>0$, имеем:

$$C=\ln\left[(\bar{x}_i-\bar{x}_j)^2-(\bar{y}_i-\bar{y}_j)^2\right]-\gamma\,\mathrm{Arcth}\frac{\bar{x}_i-\bar{x}_j}{\bar{y}_i-\bar{y}_j}. \qquad (3.28)$$

Этот интеграл можно записать и по другому:

$$\exp C_1 = \bar{C}_1 = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)^{\alpha} (\bar{y}_i - \bar{y}_j)^{\beta}; \quad \alpha, \beta \neq 0,$$
$$\alpha = (b_2 + \sqrt{h})/\sqrt{h}; \quad \beta = (-b_2 + \sqrt{h})/\sqrt{h}. \tag{3.29}$$

Или: $C^{\frac{1}{\alpha}} = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)(\bar{y}_i - \bar{y}_j)^{K}; \quad K = \beta/\alpha.$

При $h < 0$, используя соотношение $Arcth(iz) = -i\,arcctg z$, (где i – мнимая единица из (3.27)), получим:

$$C = \ln[(\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2 + (\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2] + \gamma\, arcctg \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\bar{y}_i - \bar{y}_j}. \tag{3.30}$$

И, наконец, при $h = 0$ интеграл (3.23) принимает вид:

$$C = 2\ln(\bar{x}_i - \bar{x}_j) + 0/0.$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим:

$$\bar{C}_1 = \ln(\bar{x}_i - \bar{x}_j) + \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\bar{x}_i - \bar{x}_j}. \tag{3.31}$$

Заметим, что в коммутаторах (3.20) возможен случай $b_2 = 0$. При этом $\gamma = 2b_2/\sqrt{h} = 0$. Тогда из (3.28) получим:

$$\exp \bar{C} = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2 - (\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2. \tag{3.32}$$

Из (3.30): $$\exp \bar{C} = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2 + (\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2. \tag{3.33}$$

Случай $\Delta = 0$ разобран полностью.

Итак, в этой главе рассмотрена задача о нахождении физической структуры ранга $\tau = 4$. Ей соответствует система дифференциальных уравнений (3.I). Ее решение имеет вид:

$f(x_i, y_i, x_j, y_j) = \Psi(C)$, где Ψ – произвольная функция от одного аргумента, а C – интеграл системы, который может иметь один из следующих видов:

$$C_1 = ch\sqrt{K_2}\, y_i \cdot ch\sqrt{K_2}\, y_j \cdot ch\sqrt{K_1}(x_i - x_j) - sh\sqrt{K_2}\, y_i \cdot sh\sqrt{K_2}\, y_j. \tag{3.16}$$

Это выражение при $K_1, K_2 < 0$ задает геометрию двумерной сферы; при $K_1 > 0,\ K_2 < 0$ – геометрию двумерного однополостного гиперболоида, при $K_1, K_2 > 0$ - геометрию плоскости Лобачевского. При $K_1 > 0$ это выражение можно записать в виде:

$$C_1 = \frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2 + \delta(\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2}{\bar{x}_i \cdot \bar{x}_j}. \tag{3.18}$$

При $\delta = 0$, (3.18) задает геометрию симплектической плоскости.

И возможен еще один вид:

$$C_1 = \ln\left[(x_i - x_j)^2 - h(y_i - y_j)^2\right] + \frac{\delta}{\sqrt{h}} \operatorname{Arcth} \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}.$$

Из этой формулы можно получить метрики (3.28), (3.29), (3.30), (3.31), а также метрики евклидовой плоскости и плоскости Минковского - (3.32), (3.33).

ГЛАВА IУ. КЛАССИФИКАЦИЯ ШЕСТИМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В главе II приведена постановка задачи о физической структуре ранга $\tau = 5$. Установлено, что ей соответствует система из шести дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов (2.I3). Ранг системы равен пяти. Перепишем полученные результаты:

$$X_\mu f(ij) = 0;$$
$$[X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0; \qquad (4.I)$$
$$[X_\mu, X_\nu] = c^{\varkappa}_{\mu\nu} X_\varkappa;$$

где $\mu, \nu, \varkappa = 1, \dots, 6$; $c^{\varkappa}_{\mu\nu} = -c^{\varkappa}_{\nu\mu}$ – вещественные числа,

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j);$$

$$X_\mu = A^1_\mu(i)\frac{\partial}{\partial x_i} + A^2_\mu(i)\frac{\partial}{\partial y_i} + A^3_\mu(i)\frac{\partial}{\partial z_i} + A^1_\mu(j)\frac{\partial}{\partial x_j} + A^2_\mu(j)\frac{\partial}{\partial y_j} + A^3_\mu(j)\frac{\partial}{\partial z_j};$$

$$[X_\mu, [X_\nu, X_\varkappa]] + [X_\nu, [X_\varkappa, X_\mu]] + [X_\varkappa, [X_\mu, X_\nu]] = 0.$$

Показано, что структуре ранга $\tau = 5$ соответствуют шестимерные алгебры Ли.

§ 4.I. Трехмерные подалгебры

Как и в задаче о структуре ранга $\tau = 4$ упростим вид коэффициентов в матрице (2.I3).

Введем новые переменные:

$\bar{x} = \bar{x}(x, y, z)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y, z)$, $\bar{z} = \bar{z}(x, y, z)$ так, что:

$$A^1_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + A^2_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + A^3_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} = 1;$$

$$A^1_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + A^2_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + A^3_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} = 0;$$

$$A^1_1 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + A^2_1 \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + A^3_1 \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0;$$

A_1^1, A_1^2, A_1^3 не равны нулю (см .гл.II), и такие $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ всегда можно найти. В новых переменных матрица (2.18) запишется в виде:

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \\ T_1(i) & T_2(i) & T_3(i) & \\ [\varepsilon_1+\varepsilon_2 T_1](i) & (\varepsilon_2 T_2)(i) & (\varepsilon_2 T_3)(i) & \\ T_4(i) & T_5(i) & T_6(i) & (j) \\ [\varepsilon_3+\varepsilon_4 T_4](i) & (\varepsilon_4 T_5)(i) & (\varepsilon_4 T_6)(i) & \\ [\varepsilon_5 T_1+\varepsilon_6 T_4](i) & [\varepsilon_5 T_2+\varepsilon_6 T_5](i) & [\varepsilon_5 T_3+\varepsilon_6 T_6](i) & \end{array} \right\| \qquad (4.2)$$

где (j) обозначает три столбца с такими же коэффициентами, но с индексом j (например, $T_1(j)$).

Рассмотрим первые два уравнения системы (4.I) с матрицей (4.2). Предположим, например, что $T_2 \neq 0$. (Если $T_2 = 0$, то возьмем I-е и 4-е уравнения с коэффициентами из (4.2). Здесь уже $T_5 \neq 0$, так как обратное ведет к потере ранга системы, что не допускается). Соответствующее им уравнение $[X_1, X_2] f(ij) = 0$ имеет вид:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} T_{1x}(i) + \dots + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} T_{3x}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} T_{1x}(j) + \dots + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} T_{3x}(j) = 0.$$

Так как алгебра Ли замкнута по отношению к операции коммутирования, то оператор полученного уравнения является оператором соответствующей шестимерной алгебры Ли. Обозначим его $X_{[1,2]}$.

Если T_{2x}, T_{3x} одновременно не равны нулю, то составим уравнение $[X_1, X_{[1,2]}] f(ij) = 0$. Получим уравнение с коэффициентами T_{1xx}, T_{2xx}, T_{3xx}. Оператор полученного уравнения также является оператором этой же шестимерной алгебры Ли.

Если T_{2xx}, T_{3xx} не равны нулю, то снова повторим эту процедуру несколько раз, пока не дойдем до уравнения с коэффициентами $\partial^5 T_1/\partial x^5, \partial^5 T_2/\partial x^5, \partial^5 T_3/\partial x^5$. Если и эти коэффициенты не равны нулю, то составим систему из первых двух уравнений системы (4.1) с матрицей (4.2) и пяти полученных уравнений. Матрица коэффициентов этой системы:

$$\left\| \begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & \\ T_1(i) & T_2(i) & T_3(i) & \\ \partial T_1(i)/\partial x_i & \partial T_2(i)/\partial x_i & \partial T_3(i)/\partial x_i & \\ \partial^2 T_1(i)/\partial x_i^2 & \partial^2 T_2(i)/\partial x_i^2 & \partial^2 T_3(i)/\partial x_i^2 & (j) \\ \partial^3 T_1(i)/\partial x_i^3 & \partial^3 T_2(i)/\partial x_i^3 & \partial^3 T_3(i)/\partial x_i^3 & \\ \partial^4 T_1(i)/\partial x_i^4 & \partial^4 T_2(i)/\partial x_i^4 & \partial^4 T_3(i)/\partial x_i^4 & \\ \partial^5 T_1(i)/\partial x_i^5 & \partial^5 T_2(i)/\partial x_i^5 & \partial^5 T_3(i)/\partial x_i^5 & \end{array} \right\| \qquad (4.3)$$

где (j) обозначает три столбца с теми же коэффициентами, но со значком j : $\partial T_1(j)/\partial x_j$ и т.д. Любые семь операторов шестимерной алгебры Ли связаны между собой линейной комбинацией с постоянными коэффициентами; то есть, например, из (4.3):

$$a_1 \frac{\partial^5 T_2}{\partial x^5} + a_2 \frac{\partial^4 T_2}{\partial x^4} + a_3 \frac{\partial^3 T_2}{\partial x^3} + a_4 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial T_2}{\partial x} + a_6 T_2 = 0, \qquad (4.4)$$

где не все $a_1, \dots, a_6$ равны нулю. Это же соотношение верно для T_3 . Из уравнения (4.4) можно найти явный вид коэффициента T_2. Аналогично можно найти явный вид других коэффициентов, входящих в матрицу (4.2).

Уравнение (4.4) является однородным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. По теории, общее решение такого уравнения является линейной комбинацией из $n = 5$ частных решений зависящих от x и образующих фундаментальную систему, то есть линейно независимых [96].

Запишем характеристическое уравнение для (4.4)

$$a_1 K^5 + a_2 K^4 + a_3 K^3 + a_4 K^2 + a_5 K + a_6 = 0. \qquad (4.5)$$

Корни этого алгебраического уравнения могут быть действительными, комплексными, все различными или m -кратными ($m < 5$). Фундаментальная система решений в каждом случае будет различная. Но для нас существенно то, что в каждом случае она состоит из $n \leq 5$ функций, которые линейно независимы (с постоянными коэффициентами). Общее решение уравнения (4.4) запишется в виде:

$$T_2 = \varphi_1(y,z)A_1(x) + \dots + \varphi_n(y,z)A_n(x).$$

Так как (4.4) удовлетворяется и для T_3 , то:

$$T_3 = \psi_1(y,z)A_1(x) + \dots + \psi_n(y,z)A_n(x).$$

Аналогичным образом исследуя первое и третье уравнения системы (4.I) с матрицей коэффициентов (4.2), находим:

$$\varepsilon_2 T_2 = \mu_1(y,z)B_1(x) + \dots + \mu_m(y,z)B_m(x),$$

$$\varepsilon_2 T_3 = \nu_1(y,z)B_1(x) + \dots + \nu_m(y,z)B_m(x).$$

Если же $\partial^n T_2/\partial x^n = 0, (n \leq 5)$, то $T_2 = \varphi_1(y,z) + \varphi_2(y,z)\cdot x + \dots$ $\dots + \varphi_n x^{n-1}$. Обозначая $1, x, \dots, x^{n-1}$ через $A_1(x), \dots,$ $, A_n(x)$, получим уже установленный вид T_2 :

$$T_2 = \varphi_1 A_1 + \dots + \varphi_n A_n(x).$$

То же справедливо и для функций $T_3, \varepsilon_2 T_2, \varepsilon_2 T_3$.

Рассмотрим I,2,3 уравнения системы (4.I) с матрицей коэффициентов (4.2). Отметим, что i -я часть третьего уравнения есть линейная комбинация i -ых частей первого и второго уравнений с коэффициентами $\varepsilon_1(x_i, y_i, z_i)$ и $\varepsilon_2(x_i, y_i, z_i)$, а j -я часть - с коэффициентами $\varepsilon_1(x_j, y_j, z_j), \varepsilon_2(x_j, y_j, z_j)$. Как было установлено выше, ε_1 и ε_2 не равны нулю.

При $T_2 \neq 0$ выполняется тождество:

$$T_3/T_2 = \varepsilon_2 T_3/\varepsilon_2 T_2. \qquad (4.6)$$

Подставляя в (4.6) явный вид функций, имеем:

$$\frac{\psi_1(y,z)A_1(x)+\dots+\psi_n(y,z)A_n(x)}{\varphi_1(y,z)A_1(x)+\dots+\varphi_n(y,z)A_n(x)}=\frac{\nu_1(y,z)B_1(x)+\dots+\nu_m(y,z)B_m(x)}{\mu_1(y,z)B_1(x)+\dots+\mu_m(y,z)B_m(x)}.$$

Раскрывая, получаем:

$$(\psi_1\mu_1-\varphi_1\nu_1)(y,z)\,A_1(x)B_1(x)+\dots+(\psi_n\mu_m-\varphi_n\nu_m)(y,z)A_n(x)B_m(x)=0. \quad (4.7)$$

Если m (или n) равно единице, то из (4.6), (4.7) следует:

$$\frac{T_3}{T_2}=\frac{\varepsilon_2 T_3}{\varepsilon_2 T_2}=\lambda(y,z).$$

Рассмотрим соотношение (4.7) для $m,n>1$. Покажем, что среди $m\cdot n$ функций $A_1B_1,\dots,A_nB_m$ найдется хотя бы одна, неравная всем остальным. Не теряя общности, будем считать, что $n\geqslant m$. Рассмотрим различные варианты.

I. Пусть ни одна из функций $B_1,\dots,B_m$ не равна ни одной из функций $A_1,\dots,A_n$.

Тогда общее число функций $A_i\cdot B_k$ ($i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,m$) равно $m\cdot n$. Если среди этих функций не найдется ни одной, отличной от всех других, то все $m\cdot n$ функции хотя бы попарно равны. Число соотношений $A_iB_k=A_jB_s$ (где $i\neq j$ так как функции $A_1,\dots,A_n$ линейно независимы и $k\neq s$ по той же причине) равно $mn/2$ при $m\cdot n$ -четном и $(mn+1)/2$ при $m\cdot n$ -нечетном.

Отметим, что соотношения

$$A_iB_k=A_jB_s\,, \quad (*)$$

где $i\neq j$, $k\neq s$, являются однородными (степени два).

Будем рассматривать эти уравнения как систему относительно "неизвестных" $B_1,\dots,B_m$. Чтобы система имела решение, необходимо, чтобы ранг матрицы коэффициентов (функций $A_1,\dots,A_n$) был меньше m . То есть минимальное число определителей m-го порядка, равных нулю, равно:

$$N = \frac{mn}{2} - m + 1 \qquad \text{– для} \quad m \cdot n \text{ – четного,}$$

$$N = \frac{mn+1}{2} - m + 1 \qquad \text{– для} \quad m \cdot n \text{ – нечетного.}$$

То есть на n функций $A_1, \ldots, A_n$ наложено N соотношений, причем эти соотношения являются тоже однородными. Для того, чтобы существовало решение, необходимо $N < n$. Если $N = n-1$, то все функции $A_1, \ldots, A_n$ можно выразить через одну. Тогда, например, $A_1 = (A_n)^{\alpha}$. Но так как соотношения (ж) на $A_1, \ldots, A_n$, – однородны, то и решение является однородной зависимостью. Следовательно, α = I, то есть $A_1 = A_n$, что не допускается. Таким образом, находим, что $N < n-1$. Подставляя сюда выражение , получаем:

$$\frac{mn}{2} - m + 1 < n - 1 \qquad \text{– для} \quad mn \text{ – четного,}$$

$$\frac{mn+1}{2} - m + 1 < n - 1 \qquad \text{– для} \quad mn \text{ – нечетного.}$$

Или: $(m-2)(n-2) < 0$ – $(mn$ – четное) ;

$(m-2)(n-2) < 1$ – $(mn$ – нечетное).

Решаем первое неравенство:

$$\left.\begin{matrix} m > 2 \\ n < 2 \end{matrix}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{matrix} m < 2 \\ n > 2 \end{matrix}\right\}.$$

Но мы рассматриваем случай $m, n > 1$. То есть $1 < n < 2$, или $1 < m < 2$, где $m, n \in Z$. Таких m, n нет. Значит, тем более не выполняется и второе неравенство. Следовательно, предположение о том, что все функции $A_i B_k$ хотя бы попарно равны, неверно. То есть по крайней мере одна из таких функций не равна остальным.

Не теряя общности, предположим, что эта функция есть $A_1 B_1$. Так как соотношение (4.7) является тождеством по x, коэффициент при $A_1 B_1$ равняется нулю:

$$\psi_1 \mu_1 - \varphi_1 \nu_1 = 0.$$

II. Пусть среди функций $B_1, \ldots, B_m$ есть s функций ($s \le m \le n$), которые равны каким-то из функций $A_1, \ldots, A_n$, то есть $\{B_k\} = B_1, \ldots, B_r, A_1, \ldots, A_s \ (r+s=m)$.

Тогда среди функций $A_i B_k$ будут встречаться равные (тождественно) функции. Нетрудно видеть, что их число равно $s(s-1)/2$. В этом случае число неравных функций $A_i B_k$ равно: $M = mn - s(s+1)/2$. Если среди этих функций не найдется ни одной, не равной другим, то все M функций $A_i B_k$ хотя бы попарно равны. Следовательно, минимальное число соотношений на эти M функций равно $M/2$ при M-четном и $\frac{M+1}{2}$ – при M – нечетном. Общее число функций $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_r$, не равных друг другу, равно $m+n-s$. По соображениям, приведенным в случае I, должно выполняться неравенство: $M/2 < m+n-s-1$. Подставляя M, имеем:

$$\frac{mn - s(s-1)/2}{2} < m+n-s-1.$$

После преобразований получаем:

$$2(n-2)(m-2) < (s-1)(s-4).$$

Поскольку $s > 0$, то заведомо должно выполняться неравенство: $s^2 - 4s + 4 < 0$, или $(s-2)^2 < 0$. Но этого не может быть так как $(s-2)^2 \geqslant 0$. Итак, предположение о том, что среди функций $A_i B_k$ не найдется хотя бы одной, не равной остальным, неверно.

Не теряя общности, предположим, что эта функция есть $A_1 B_1$. Аналогично случаю I снова приходим к соотношению:

$$\psi_1 \mu_1 - \varphi_1 \nu_1 = 0.$$

Других вариантов в соотношении (4.7) нет.

Используем соотношение $\psi_1 \mu_1 - \varphi_1 \nu_1 = 0$ для упрощения вида системы (4.I).

Перепишем второе уравнение системы (4.I):

$$\frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial x_i} T_1(\bar{i}) + \frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial y_i}\left[\varphi_1(y,z)A_1(x)+\dots+\varphi_n(y,z)A_n(x)\right]_i +$$

$$+\frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial z_i}\left[\psi_1(y,z)A_1(x)+\dots+\psi_n(y,z)A_n(x)\right]_i + \frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial x_j} T_1(j) + \frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial y_j}\left[\varphi_1 A_1 + \dots\right.$$

$$\left.\dots+\varphi_n(y,z)A_n(x)\right]_j + \frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial z_j}\left[\psi_1(y,z)A_1(x)+\dots+\psi_n(y,z)A_n(x)\right]_j = 0.$$

?

Докажем, что это уравнение эквивалентно системе следующих уравнений:

$$\frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial x_i} M_p(\bar{i}) + \frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial y_i}\varphi_p(i)A_p(x_i) + \frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial z_i}\psi_p(i)A_p(x_i) + \qquad (4.8)$$

$$\frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial x_j} M_p(j) + \frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial y_j}\varphi_p(j)A_p(x_j) + \frac{\partial f(\bar{i}\bar{j})}{\partial z_j}\psi_p(j)A_p(x_j) = 0,$$

где $p = 1,\dots,n$; $\varphi = \varphi(y,z)$, $\psi = \psi(y,z)$.

Покажем это для случая, когда уравнение (4.5) имеет все различные действительные корни $K_1,\dots,K_n$. Тогда система функций $A_1(x),\dots$ $\dots, A_n(x)$ имеет вид: $\exp K_1 x,\dots,\exp K_n x$. Рассмотрим $2,\dots,5$-уравнения системы с матрицей (4.3). Выпишем, например, второй столбец:

$$T_2 = \varphi_1 \exp K_1 x + \dots + \varphi_n \exp K_n x \;;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\partial^{n-1} T_2 / \partial x^{n-1} = K_1^{n-1}\varphi_1 \exp K_1 x + \dots + K_n^{n-1}\varphi_n \exp K_n x.$$

Рассматривая полученные уравнения, как систему из n уравнений относительно n неизвестных $\varphi_1 \exp K_1 x,\dots,\varphi_n \exp K_n x$, можно разрешить ее относительно этих неизвестных, так как определить системы есть определитель Вандермонда , не равный нулю при различных $K_1,\dots,K_n$. Третий, пятый и шестой столбцы матрицы (4.3) имеют те же числовые коэффициенты. В результате получим уравнения (4.8).

Аналогичным образом составим матрицу типа (4.3) для третьего уравнения системы (4.I) с матрицей (4.2). Повторяя все выкладки, получим:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} F_s(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} \mu_s(i) B_s(x_i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} \nu_s(i) B_s(x_i) +$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} F_s(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} \mu_s(j) B_s(x_j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} \nu_s(j) B_s(x_j) = 0,$$

где $s = 1, \ldots, m$; $\mu = \mu(y,z)$, $\nu = \nu(y,z)$.

Рассмотрим первое уравнение полученной системы и первое уравнение из (4.3). Перепишем полученное выше отношение $\varphi_1 \mu_1 - \vartheta_1 \nu_1 = 0$ в виде:

$$\frac{\varphi_1}{\vartheta_1} = \frac{\nu_1}{\mu_1} = \lambda(y,z).$$

Введем переменную $\bar{z} = \bar{z}(y,z)$ так, чтобы

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \lambda(y,z) \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0.$$

Тогда вместе с первым уравнением системы (4.I) с матрицей (4.2) получим:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} M_1(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} \theta_1(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} M_1(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} \theta_1(j) = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} F_1(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} N_1(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} F_1(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} N_1(j) = 0.$$

Получили систему из трех уравнений, аналогичную системе (3.I), соответствующей физической структуре ранга $r = 4$.

Как доказано в главе II, операторы такой системы образуют трехмерную алгебру Ли (в данном случае – трехмерную подалгебру).

Аналогичным образом можно показать, что для всех остальных случаев (корни уравнения (4.5) – комплексные, m–кратные и т.д.) первые три уравнения системы (4.I) с матрицей (4.2) приводятся к виду (4.9).

Из матрицы (4.2) видно, что для I,4,5 и 2,4,6 уравнений выполняется та же ситуация, что и для I,2,3 уравнений: i-я часть одного из них (соответственно – j-я часть) является линейной комбинацией с переменными коэффициентами из i-х частей двух других уравнений (соответственно – для j-х частей).

Как и для I,2,3 уравнений, можно показать, что операторы I,4,5 и 2,4,6 уравнений образуют еще две трехмерные подалгебры Ли.

Покажем, что существует еще одна трехмерная подалгебра Ли. Как отмечалось в главе II, для того, чтобы система (4.I) с матрицей (4.2) имела решение необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1j}) & (\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j}) & 0 \\ (\varepsilon_{3i}-\varepsilon_{3j}) & 0 & (\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{4j}) \\ 0 & (\varepsilon_{5i}-\varepsilon_{5j}) & (\varepsilon_{6i}-\varepsilon_{6j}) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2I)$$

Так как определитель равен нулю, его строки связаны линейной зависимостью:

$$0 = \lambda_1(ij)(\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1j}) + \lambda_2(ij)(\varepsilon_{3i}-\varepsilon_{3j}),$$

$$(\varepsilon_{5i}-\varepsilon_{5j}) = \lambda_1(ij)(\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j}),$$

$$(\varepsilon_{6i}-\varepsilon_{6j}) = \lambda_2(ij)(\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{4j}).$$

Зафиксируем координаты x_j, y_j:

$$\begin{aligned} &\bar\lambda_1(i)(\varepsilon_{1i}-c_1) + \bar\lambda_2(i)(\varepsilon_{3i}-c_3) = 0, \\ &\varepsilon_{5i}-c_5 = \bar\lambda_1(i)(\varepsilon_{2i}-c_2), \\ &\varepsilon_{6i}-c_6 = \bar\lambda_2(i)(\varepsilon_{4i}-c_4). \end{aligned} \qquad (4.\text{I}0)$$

В (4.I0) сделаем замену $i \to j$:

$$\begin{aligned} &\bar\lambda_1(j)(\varepsilon_{1j}-c_1) + \bar\lambda_2(j)(\varepsilon_{3j}-c_3) = 0, \\ &\varepsilon_{5j}-c_5 = \bar\lambda_1(j)(\varepsilon_{2j}-c_2), \\ &\varepsilon_{6j}-c_6 = \bar\lambda_2(j)(\varepsilon_{4j}-c_4). \end{aligned} \qquad (4.\text{II})$$

Преобразуем 3,5,6 уравнения системы с матрицей (4.2) следующим образом. Из третьего уравнения вычтем первое, умноженное на C_1, и второе, умноженное на C_2. Из пятого вычтем первое, умноженное на C_3, и четвертое, умноженное на C_4. Из шестого вычтем второе, умноженное на C_5, и четвертое, умноженное на C_6.

В силу (4.10), (4.11) получим три уравнения $\bar{3},\bar{5},\bar{6}$ для которых i-я часть одного является линейной комбинацией i-ных частей двух других уравнений. То же относится и к j-м частям. Как было доказано выше, операторы этих уравнений образуют еще одну трехмерную подалгебру Ли.

Итак, установлено, что в шестимерных алгебрах Ли, соответствующих физической структуре ранга $r = 5$, имеется четыре трехмерных подалгебры, составленные из операторов следующих групп уравнений: $(1,2,\bar{3})$, $(1,4,\bar{5})$, $(2,4,\bar{6})$, $\bar{3},\bar{5},\bar{6})$. В дальнейшем штрихи опустим.

§ 4.2. Классификация шестимерных алгебр Ли

Как отмечалось, ранг системы (4.1) равен пяти. Рассмотрим первые пять уравнений. Сюда входят две трехмерные подалгебры: $(X_1, X_2, X_3), (X_4, X_1, X_5)$. В дальнейшем для упрощения записи будем писать вместо $X_1 \longrightarrow (1), \ldots, X_6 \longrightarrow (6)$.

Конечно, можно исследовать любые пять уравнений из системы (4.1). И в каждой пятерке найдутся две трехмерные подалгебры. Таких вариантов может быть шесть:

$$\begin{matrix} (1,2,3) \\ (1,4,5) \end{matrix}; \quad \begin{matrix} (2,1,3) \\ (2,4,6) \end{matrix}; \quad \begin{matrix} (3,1,2) \\ (3,5,6) \end{matrix}; \quad \begin{matrix} (4,1,5) \\ (4,2,6) \end{matrix}; \quad \begin{matrix} (5,1,4) \\ (5,3,6) \end{matrix}; \quad \begin{matrix} (6,2,4) \\ (6,3,5) \end{matrix} \qquad (4.12)$$

Занумеруем все трехмерные подалгебры:

$\alpha = 1 \longrightarrow (1,2,3)$; $\alpha = 2 \longrightarrow (1,4,5)$; $\alpha = 3 \longrightarrow (2,4,6)$; $\alpha = 4 \longrightarrow (3,5,6)$.

Обозначим квадратную матрицу третьего порядка, составленную из структурных констант α -той трехмерной подалгебры через $\|C^{\varkappa}_{\mu\nu}\|_{\alpha}$.

Будем классифицировать шестимерные алгебры Ли в зависимости от рангов двух матриц $\|C^{\varkappa}_{\mu\nu}\|_{\alpha}$ и $\|C^{\varkappa}_{\mu\nu}\|_{\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$. Введем обозначения: ρ_{α} - ранг матрицы $\|C^{\varkappa}_{\mu\nu}\|_{\alpha}$; ρ_{β} - ранг матрицы $\|C^{\varkappa}_{\mu\nu}\|_{\beta}$. Все возможные варианты отмечены значком $(\times)$ в таблице I:

Таблица I.

ρ_{β} \ ρ_{α}	3	2	I	0
3	×	—	—	—
2	×	×	—	—
I	×	×	×	—
0	×	×	×	×

(действительно, например, вариант $\rho_{\alpha} = 2$, $\rho_{\beta} = 3$ можно не рассматривать, так как простым переобозначением он сводится к варианту $\rho_{\alpha} = 3$; $\rho_{\beta} = 2$, и т.д.) По отношению всех четырех матриц $\|C^{\varkappa}_{\mu\nu}\|_{\varepsilon}$ (ε = I,2,3,4) можно сказать следующее: ранг всех четырех матриц может не совпадать только в одном случае:

$$\rho_{\alpha} = 3\ ;\quad \rho_{\beta} = 2\ ;\quad \rho_{\gamma} = 1\ ;\quad \rho_{\delta} = 0,$$

$(\alpha,\beta,\gamma,\delta$ не равны друг другу).

Во всех других случаях хотя бы у двух матриц ранги совпадают. Таким образом, достаточно рассмотреть только пять вариантов

$$\mathrm{I}:\ \rho_{\alpha} = \rho_{\beta} = 3\ ;\quad \mathrm{II}:\ \rho_{\alpha} = \rho_{\beta} = 2\ ;\quad \mathrm{III}:\ \rho_{\alpha} = \rho_{\beta} = 1\ ;$$

$$\mathrm{IV}:\ \rho_{\alpha} = \rho_{\beta} = 0\ ;\quad \mathrm{V}:\ \rho_{\alpha} = 3;\ \rho_{\beta} = 2\ ;\ \rho_{\gamma} = 1;\ \rho_{\delta} = 0.$$

Рассмотрим систему (4.I) с матрицей (4.2). В § 4.I показано, что 2,...,5 уравнения можно скомбинировать так, что коэффициенты преобразованной системы удовлетворяют соотношениям:

$$\overline{T_3}/\overline{T_2} = \overline{\varepsilon_2 T_3}/\overline{\varepsilon_2 T_2} = \lambda_1(y,z); \quad \overline{T_6}/\overline{T_5} = \overline{\varepsilon_4 T_6}/\overline{\varepsilon_4 T_5} = \lambda_2(y,z).$$

Введем новые переменные: $\bar{y} = \bar{y}(y,z)$ и $\bar{z} = \bar{z}(y,z)$ так, чтобы:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial z}\lambda_2(y,z) = 0; \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\lambda_1(y,z) = 0.$$

Тогда матрица коэффициентов I,...,5 уравнений системы (4.I) будет иметь вид:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_1(i) & \tilde{T}_2(i) & 0 & \tilde{T}_1(j) & \tilde{T}_2(j) & 0 \\ \tilde{T}_3(i) & \tilde{T}_4(i) & 0 & \tilde{T}_3(j) & \tilde{T}_4(j) & 0 \\ \Psi_1(i) & 0 & \Psi_2(i) & \Psi_1(j) & 0 & \Psi_2(j) \\ \Psi_3(i) & 0 & \Psi_4(i) & \Psi_3(j) & 0 & \Psi_4(j) \end{matrix} \right\| \qquad (4.13)$$

Составим общую таблицу коэффициентов системы с матрицей (4.13) и всех уравнений $[X_\mu, X_\nu]f(ij) = 0$ для I,...,5 уравнений системы (4.I) по формуле (3.6) для i -ых частей уравнений (табл.II) (штрихи опустим). Заметим, что $\tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \Psi_2, \Psi_4$ не равны нулю; $\tilde{T}_1, \tilde{T}_3$ (соответственно Ψ_1, Ψ_3) не могут быть одновременно равны нулю (обратное ведет к потере ранга системы (4.I), что не допускается).

Рассмотрим вариант IУ: $\rho_\alpha = \rho_\beta = 0$. Пусть $\alpha = 3$; $\beta = 4$. Тогда $[2,6] = [4,6] = [2,4] = [3,6] = [5,6] = [3,5] = 0$. Если, например, и $\rho_1 = 0$, то $[1,2] = [3,1] = [2,3] = 0$. Тогда из табл.II находим: $T_{1x} = T_{2x} = T_{3x} = T_{4x} = 0$. Отсюда $T_1 = T_1(y,z)$, $T_2 = T_2(y,z)$, $T_3 = T_3(y,z)$, $T_4 = T_4(y,z)$. Из $[2,4] = 0$, используя табл.II, находим $T_{2z} = 0$ (так как $T_{2x} = 0$). Из $[3,5] = 0$: $T_{4z} = 0$. То есть $T_2 = T_2(y)$, $T_4 = T_4(y)$. Из $[2,3] = 0$ и табл.II: $(T_4/T_2)_y = 0$. Следовательно, $T_4/T_2 = const = Q_1$. Но, как доказано в § 3.2 это условие приводит к уменьшению ранга

Таблица 2

	[illegible] при $\partial f/\partial x$	[illegible] при $\partial f/\partial y$	[illegible] при $\partial f/\partial z$
(1)	1	0	0
(2)	T_1	T_2	0
(3)	T_3	T_4	0
(4)	Ψ_1	0	Ψ_2
(5)	Ψ_3	0	Ψ_4
[1,2]	$-T_{1x}$	$-T_{2x}$	0
[3,1]	T_{3x}	T_{4x}	0
[2,3]	$T_{1x}T_3 - T_{3x}T_1 + T_{1y}T_4 - T_{3y}T_2$	$T_{2x}T_3 - T_{4x}T_1 + T_{2y}T_4 - T_{4y}T_2$	0
[1,4]	$-\Psi_{1x}$	0	$-\Psi_{2x}$
[5,1]	Ψ_{3x}	0	Ψ_{4x}
[4,5]	$\Psi_{1x}\Psi_3 - \Psi_{3x}\Psi_1 + \Psi_{1z}\Psi_4 - \Psi_{3z}\Psi_2$	0	$\Psi_{2x}\Psi_3 - \Psi_{4x}\Psi_1 + \Psi_{2z}\Psi_4 - \Psi_{4z}\Psi_2$
[2,4]	$T_{1x}\Psi_1 - \Psi_{1x}T_1 - \Psi_{1y}T_2 + T_{1z}\Psi_2$	$T_{2x}\Psi_1 + T_{2z}\Psi_2$	$-\Psi_{2x}T_1 - \Psi_{2y}T_2$
[2,5]	$T_{1x}\Psi_3 - \Psi_{3x}T_1 - \Psi_{3y}T_2 + T_{1z}\Psi_4$	$T_{2x}\Psi_3 + T_{2z}\Psi_4$	$-\Psi_{4x}T_1 - \Psi_{4y}T_2$
[3,4]	$T_{3x}\Psi_1 - \Psi_{1x}T_3 - \Psi_{1y}T_4 + T_{3z}\Psi_2$	$T_{4x}\Psi_1 + T_{4z}\Psi_2$	$-\Psi_{2x}T_3 - \Psi_{2y}T_4$
[3,5]	$T_{3x}\Psi_3 - \Psi_{3x}T_3 - \Psi_{3y}T_4 + T_{3z}\Psi_4$	$T_{4x}\Psi_3 + T_{4z}\Psi_4$	$-\Psi_{4x}T_3 - \Psi_{4y}T_4$

системы, что не допускается. Итак, показали, что при $\rho_\alpha = \rho_\beta = 0$ $\rho_\gamma, \rho_\delta \neq 0$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не равны друг другу).

Если $\rho_\alpha = \rho_\beta = 1$, то имеем вариант Ш. Если $\rho_\gamma = \rho_\delta = 2$ – вариант П. Если $\rho_\gamma = \rho_\delta = 3$ – вариант I. Остается всего два случая для варианта IУ.

I. $\rho_\alpha = \rho_\beta = 0$; $\rho_\gamma = 2$ (ρ_δ – любое);

2. $\rho_\alpha = \rho_\beta = 0$; $\rho_\gamma = 3$ (ρ_δ – любое).

Исследование будем вести с помощью тождеств Якоби. Обозначим: $[a, b, c] = [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$.

При анализе вариантов воспользуемся следующими замечаниями:

I. При рассмотрении варианта IУ было отмечено, что недопустима следующая ситуация: коэффициенты при $\partial f / \partial y$ (см.табл.П) в коммутаторах $[1,2], [3,1], [2,3], [2,4], [3,5]$ равны нулю. В общем случае эта ситуация имеет место, если:

а)
$$\left.\begin{matrix}(1,2,3)\\(1,4,5)\end{matrix}\right\} - \quad [1,2] = a_1(1)\,;\quad [3,1] = a_2(1)\,;\quad [2,3] = a_3(1)\,;$$

$$[2,4] = b_1(1) + b_2(4) + b_3(5) \qquad [3,5] = b_4(1) + b_5(4) + b_6(5)$$

или и или

$$[2,5] = c_1(1) + c_2(4) + c_3(5) \qquad [3,4] = c_4(1) + c_5(4) + c_6(5).$$

Так же можно показать, что недопустима ситуация, когда коэффициенты при $\partial f / \partial z$ (см.табл.П) в коммутаторах $[1,4]$, $[5,1]$, $[4,5]$, $[2,4]$, $[3,5]$ равны нулю; то есть в общем случае не допускается:

б)
$$\left.\begin{matrix}(1,4,5)\\(1,2,3)\end{matrix}\right\} \quad [1,4] = a_1(1)\,;\quad [5,1] = a_2(1)\,;\quad [4,5] = a_3(1)\,;$$

$$[4,2] = b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) \qquad [5,2] = b_4(1) + b_5(2) + b_6(3)$$

или и или

$$[4,3] = c_1(1) + c_2(2) + c_3(3) \qquad [5,3] = c_4(1) + c_5(2) + c_6($$

Подобная ситуация недопустима и для любой пары подалгебр из (4.I2). Для примера приведем подобные соотношения для (3,I,2), (3,5,6):

а) $\left.\begin{matrix}(3,1,2)\\(3,5,6)\end{matrix}\right\}$ $[3,1]=a_1(3)$; $[2,3]=a_2(3)$; $[1,2]=a_3(3)$;

$[1,5]=b_1(3)+b_2(5)+b_3(6)$ или $[1,6]=c_1(3)+c_2(5)+c_3(6)$ и $[2,6]=b_4(3)+b_5(5)+b_6(6)$ или $[2,5]=c_4(3)+c_5(5)+c_6(6)$;

б) $\left.\begin{matrix}(3,5,6)\\(3,1,2)\end{matrix}\right\}$ $[3,5]=a_1(3)$; $[6,3]=a_2(3)$; $[5,6]=a_3(3)$;

$[5,1]=b_1(3)+b_2(1)+b_3(2)$ или $[5,2]=c_1(3)+c_2(1)+c_3(2)$ и $[6,2]=b_4(3)+b_5(1)+b_6(2)$ или $[6,1]=c_4(3)+c_5(1)+c_6(2)$.

2. Докажем, что недопустимы также следующие комбинации для подалгебр (I,2,3) и (I,4,5):

а) $[1,2]=a_1(1)+a_2(2)+a_3(3)$
$[2,4]=b_1(1)+b_2(4)+b_3(5)$
$[2,5]=c_1(1)+c_2(4)+c_3(5)$

б) $[3,1]=a_1(1)+a_2(2)+a_3(3)$
$[3,4]=b_1(1)+b_2(4)+b_3(5)$
$[3,5]=c_1(1)+c_2(4)+c_3(5)$

в) $[1,4]=a_1(1)+a_2(4)+a_3(5)$
$[2,4]=b_1(1)+b_2(2)+b_3(3)$
$[3,4]=c_1(1)+c_2(2)+c_3(3)$

г) $[5,1]=a_1(1)+a_2(4)+a_3(5)$
$[2,5]=b_1(1)+b_2(2)+b_3(3)$
$[3,5]=c_1(1)+c_2(2)+c_3(3)$,

где a_2, a_3 не равны нулю одновременно.

Докажем это на примере комбинации (а). Из табл.П в $[2,4]$, $[2,5]$ коэффициенты при $\partial f/\partial y$ имеют вид: $T_{2x}\Psi_1+T_{2z}\Psi_2=0$; $T_{2x}\Psi_3+T_{2z}\Psi_4=0$. Так как a_2, a_3 одновременно не равны нулю, то $T_{2x}\neq 0$ (ввиду того, что $T_2, T_4\neq 0$). Если $\Psi_1=0$, то из коэффициента при $\partial f/\partial y$ в $[2,4]$: $T_{2z}=0$. Тогда из второго соотношения $\Psi_3=0$. Но Ψ_1, Ψ_3, как отмечалось выше, одновременно не могут быть равными нулю. Следовательно, Ψ_1, Ψ_3 не равны нулю. Ψ_2, Ψ_4 также не равны нулю. Следовательно, и $T_{2z} \neq 0$; то есть:

$$\Psi_1/\Psi_3 = \Psi_2/\Psi_4 = \lambda.$$

Рассмотрим $4,5$ уравнения системы (4.I) с матрицей (4.I3). Используя полученное соотношение, запишем их в виде:

$$\lambda(i)\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Psi_3(i)+\frac{\partial f}{\partial z_i}\Psi_4(i)\right]+\lambda(j)\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Psi_3(j)+\frac{\partial f}{\partial z_j}\Psi_4(j)\right]=0;$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Psi_3(i)+\frac{\partial f}{\partial z_i}\Psi_4(i)\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Psi_3(j)+\frac{\partial f}{\partial z_j}\Psi_4(j)\right]=0.$$

Если квадратные скобки не равны нулю, то определитель этой системы равен нулю. Это значит, что ранг общей системы (4.I) меньше пяти, что не допускается. Следовательно:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}\Psi_3(i)+\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}\Psi_4(i)=0.$$

Но по аксиоме Ш (глава I) такое уравнение не может иметь места. То есть, комбинация (а) недопустима, То же относится к (б),(в),(г).

3. Сделаем еще одно замечание на примере подалгебр (I,2,3), (I,4,5). Пусть:

$$[2,4]=b_1(1)+b_2(4)+b_3(5)$$
$$[2,5]=c_1(1)+c_2(4)+c_3(5).$$

Из табл.П имеем: $T_{2x}\Psi_1+T_{2z}\Psi_2=0$; $T_{2x}\Psi_3+T_{2z}\Psi_4=0.$

Как показано в замечании 2, определитель $\Psi_1\Psi_4-\Psi_2\Psi_3\neq 0.$

То есть: $T_{2x}=T_{2z}=0$. Следовательно, $[1,2]=a_1(1).$

Аналогично:

$$\left.\begin{matrix}[3,4]=b_1(1)+b_2(4)+b_3(5)\\ [3,5]=c_1(1)+c_2(4)+c_3(5)\end{matrix}\right\}\longrightarrow[3,1]=a_1(1).$$

Или:

$$\left.\begin{matrix}[3,1]=a_1(1)\\ [3,4]=b_1(1)+b_2(4)+b_3(5)\end{matrix}\right\}\longrightarrow[3,5]=c_1(1)+c_2(4)+c_3(5).$$

То же относится и к любым другим парам из (4.I2). То есть справедливо следующее утверждение: для любой пары из (4.I2), если коммутаторы одного из операторов подалгебры с двумя операторами второй подалгебры зависят только от операторов второй подалгебры, то коммутатор того же оператора с третьим оператором второй подалгебры также зависит только от операторов второй подалгебры.

§ 4.3. Варианты, приводящие к невырожденным решениям

Исследуем вариант I (табл.I): $\rho_\alpha = \rho_\beta = 3$. Рассмотрим коммутаторы для подалгебр (I,2,3), (I,4,5). Так как $\rho_\alpha = \rho_\beta = 3$, то легко показать, что коммутаторы, например, для подалгебры (I,2,3) имеют вид :

$$
\begin{aligned}
[1,2] &= a_1(1) + a_2(2) + a_3(3) \\
[3,1] &= a_4(1) + a_5(2) + a_2(3) \qquad\qquad (4.14) \\
[2,3] &= a_6(1) + a_4(2) + a_1(3).
\end{aligned}
$$

Для дальнейшего исследования упростим соотношения (4.I4), переходя к другому базису. В данном случае в новом базисе можем вводить операторы $(\bar{2}) = (2) + n_1(3)$; $(\bar{3}) = (3) + n_2(2)$, но оператор (I) "смешивать" нельзя, так как он входит в обе подалгебры, и, меняя оператор (I) в первой подалгебре, нарушим структуру второй подалгебры. Покажем, что в этом случае возможны четыре варианта.

Если в (4.I4) $a_3 \neq 0$, то переходя к $(\bar{3}) = (3) + \frac{a_2}{a_3}(2) + \frac{a_1}{a_3}(1)$, получим: $[1,2] = a_3(\bar{3})$; $[\bar{3},1] = b_1(1) + b_2(2)$; $[2,\bar{3}] = b_3(1) + b_4(2)$. Если $b_2 \neq 0$, то переходя к $(\bar{2}) = (2) + \frac{b_1}{b_2}(1)$, получим:

$$[1,\bar{2}] = a_3(\bar{3}) ; \quad [\bar{3},1] = b_2(\bar{2}) ; \quad [\bar{2},\bar{3}] = c_1(1) . \qquad (4.15,a)$$

Если же $b_2 = 0$, то переходя к $(\bar{2}) = (2) + \frac{b_3}{2b_1}(1)$ $(b_1 \neq 0,\ \text{т.к.}\ \rho_1 = 3)$, получим:

$$[1,\bar{2}] = a_3(\bar{3}) ; \quad [\bar{3},1] = b_1(1) ; \quad [\bar{2},\bar{3}] = b_1(\bar{2}). \qquad (4.15,б)$$

Далее, если в (4.I4) $a_5 \neq 0$, аналогично можно показать, что возможен вариант:

$$[1,\bar{2}] = K_1(1); \quad [\bar{3},1] = a_5(\bar{2}); \quad [\bar{2},\bar{3}] = K_1(\bar{3}). \tag{4.I5,в}$$

Если же в (4.I4) $a_3 = a_5 = 0$, то, переходя к $(\bar{2}) = (2) + \frac{a_1}{a_2}(1)$; $(\bar{3}) = (3) + \frac{a_4}{a_2}(1)$ $(a_2 \neq 0, \text{т.к. } \rho_1 = 3)$, получим:

$$[1,\bar{2}] = K_1(\bar{2}); \quad [\bar{3},1] = K_1(\bar{3}); \quad [\bar{2},\bar{3}] = K_2(1). \tag{4.I5,г}$$

Других вариантов нет.

Понятно, что все выкладки, приведенные для подалгебры (I,2,3), справедливы и для подалгебры (I,4,5).

Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица II.

Подалгебра (I,2,3)	Подалгебра (I,4,5)
I. $[1,2]=K_1(2)$; $[3,1]=K_1(3)$; $[2,3]=K_2(1)$	I. $[1,4]=K_3(4)$; $[5,1]=K_3(5)$; $[4,5]=K_4(1)$
2. $[1,2]=K_1(1)$; $[3,1]=K_2(2)$; $[2,3]=K_1(3)$	2. $[1,4]=K_3(1)$; $[5,1]=K_4(4)$; $[4,5]=K_3(5)$
3. $[1,2]=K_2(3)$; $[3,1]=K_1(1)$; $[2,3]=K_1(2)$	3. $[1,4]=K_4(5)$; $[5,1]=K_3(1)$; $[4,5]=K_3(4)$
4. $[1,2]=K_1(3)$; $[3,1]=K_2(2)$; $[2,3]=K_3(1)$	4. $[1,4]=K_4(5)$; $[5,1]=K_5(4)$; $[4,5]=K_6(1)$

Как показано в § 3.I, вариант (4) можно привести к варианту (I). Но K_1 при этом может быть как действительным, так и мнимым числом. Для дальнейших вычислений структура коэффициента безразлична, так что будем рассматривать только (I),(2) и (3) варианты.

Ввиду равноправия подалгебр (I,2,3) и (I,4,5) достаточно рассмотреть варианты (I.I); (I,2); (I.3); (2.2); (2.3); (3.3).

Отметим, что вариант (3.3) приводится к варианту (2.2) заменой: (2)$\longleftrightarrow$(3); (4)$\longleftrightarrow$(5), что не нарушает ни одну из четырех трехмерных подалгебр.

Исследование возможных вариантов проводится с помощью тождеств Якоби. Все вычисления для варианта I: $\rho_\alpha = \rho_\beta = 3$ (см. табл.I) приведены в Приложении I. Выпишем все возможные комбинации коммутационных соотношений, приводящих к невырожденным решениям, для этого варианта.

$$\begin{array}{llll} [1,2]=K_1(2) & [1,4]=K_1(4) & [2,6]=K_1K_2(4) & [3,6]=K_1K_2(5) \\ [3,1]=K_1(3) & [5,1]=K_1(5) & [4,6]=-K_1K_3(2) & [5,6]=-K_1K_3(3) \\ [2,3]=K_2(1) & [4,5]=K_3(1) & [2,4]=0 & [3,5]=0 \end{array} \quad (\text{П}I.8)$$

$$[1,6]=0\ ; \quad [3,4]=(6)\ ; \quad [2,5]=(6)\ ;$$

где K_1, K_2, K_3 – вещественные числа.

$$\begin{array}{llll} [1,2]=(1) & [1,4]=(1) & [2,6]=0 & [3,6]=0 \\ [3,1]=(2) & [5,1]=(4) & [4,6]=0 & [5,6]=0 \\ [2,3]=(3) & [4,5]=(5) & [2,4]=\frac{1}{2}(2)-\frac{1}{2}(4) & [3,5]=0 \end{array} \quad (\text{П}I.5)$$

$$[1,6]=0\ ; \quad [2,5]=\tfrac{1}{2}(3)+\tfrac{1}{2}(5)-(6); \quad [3,4]=-\tfrac{1}{2}(3)-\tfrac{1}{2}(5)+(6);$$

$$\begin{array}{llll} [1,2]=(1) & [1,4]=(1) & [2,6]=-n(2)+(6) & [3,6]=-n(3) \\ [3,1]=(2) & [5,1]=(4) & [4,6]=n(4)+(6) & [5,6]=n(5) \\ [2,3]=(3) & [4,5]=(5) & [2,4]=(2)-(4) & [3,5]=(6) \end{array} \quad (\text{П}I.6)$$

$$[1,6]=-(3)+(5)\ ; \quad [3,4]=n(1)-(5)\ ; \quad [2,5]=-n(1)+(3)\ ;$$

где n – вещественное число.

$$\begin{array}{llll} [1,2]=K_1(3) & [1,4]=K_1(5) & [2,6]=-K_2(4) & [3,6]=-K_2(5) \\ [3,1]=(2) & [5,1]=(4) & [4,6]=-K_3(2) & [5,6]=K_3(3) \\ [2,3]=K_2(1) & [4,5]=K_3(1) & [2,4]=K_1(6) & [3,5]=(6) \end{array} \quad (\text{П}I.9)$$

$$[1,6]=[2,5]=[3,4]=0, \qquad (\text{III}.9)$$

где K_1, K_2, K_3 – вещественные числа.
Варианты (III.6), (III.9) можно привести к (III.8).

Рассмотрим вариант II: $\rho_\alpha=\rho_\beta=2$. Пусть $\alpha=1$, $\beta=2$.
Выпишем коммутаторы для первой и второй подалгебр:

$$[1,2]=a_1(1)+a_2(2)+a_3(3), \qquad [1,4]=b_1(1)+b_2(4)+b_3(5),$$
$$[3,1]=a_4(1)+a_5(2)+a_6(3), \qquad [5,1]=b_4(1)+b_5(4)+b_6(5),$$
$$[2,3]=a_7(1)+a_8(2)+a_9(3), \qquad [4,5]=b_7(1)+b_8(4)+b_9(5).$$

Так как $\rho_1=\rho_2=2$, то:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}=0; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix}=0.$$

Рассмотрим первую подалгебру. Так как $\Delta_1=0$, то строчки в определителе линейно зависимы. Следовательно, можно записать:

$$c_1[1,2]+c_2[3,1]+c_3[2,3]=0,$$

где c_1, c_2, c_3 – вещественные константы, не все равные нулю.

Преобразуем последнее соотношение. Пусть $c_1\neq 0$. Тогда: $[1,\ c_1(2)-c_2(3)]+c_3[2,3]=0$. Введем $(\bar{2})=c_1(2)-c_2(3)$:

$$[1,\bar{2}]+\frac{c_3}{c_1}[\bar{2},3]=0, \text{ или } \qquad [\bar{2},\ c_3(3)-c_1(1)]=0.$$

Вводя $(\bar{3})=c_3(3)-c_1(1)$, получим: $[\bar{2},\bar{3}]=0$. В новом базисе коммутаторы имеют вид:

$$[1,\bar{2}]=\bar{a}_1(1)+\bar{a}_2(\bar{2})+\bar{a}_3(\bar{3}); \quad [\bar{3},1]=\bar{a}_4(1)+\bar{a}_5(\bar{2})+\bar{a}_6(\bar{3}); \quad [\bar{2},\bar{3}]=0.$$

Запишем тождество Якоби для операторов (1), ($\bar{2}$), ($\bar{3}$):

$$[1,\bar{2},\bar{3}]=-\bar{a}_4[1,\bar{2}]+\bar{a}_1[\bar{3},1]=0.$$

Линейная связь между $[1,2]$ и $[3,1]$ не может иметь места, так как $\rho_1 = 2$. То есть $\bar{a}_1 = \bar{a}_4 = 0$. Опуская штрихи, имеем:

$$[1,2] = a_1(2) + a_2(3)\,; \quad [3,1] = a_3(2) + a_4(3)\,; \quad [2,3] = 0.$$

Аналогичным образом, если C_2 или C_3 не равно нулю, коммутационные соотношения можно привести и к другим видам:

$$[1,2] = a_1(1) + a_2(3); \quad [3,1] = 0\,; \quad [2,3] = a_3(1) + a_4(3);$$

$$[1,2] = 0; \quad [3,1] = a_1(1) + a_2(2); \quad [2,3] = a_3(1) + a_4(2).$$

Естественно, что коммутаторы второй подалгебры можно привести к таким же видам.

Эти виды преобразуются друг в друга при соответствующих переобозначениях. Выбирая для подалгебры (I,2,3) первый вид, для второй подалгебры должны рассмотреть все три вида:

Таблица IУ.

(I,2,3)	(I)4,5)
$[1,2] = a_1(2) + a_2(3)$ $[3,1] = a_3(2) + a_4(3)$ $[2,3] = 0$	$[1,4] = b_1(4) + b_2(5)$; $[5,1] = b_3(4) + b_4(5)$ $[4,5] = 0$
	$[1,4] = b_1(1) + b_2(5)$; $[5,1] = 0$ $[4,5] = b_3(1) + b_4(5)$
	$[1,4] = 0$; $[5,1] = b_1(1) + b_2(4)$ $[4,5] = b_3(1) + b_4(4)$

Упростим вид коммутационных соотношений для подалгебры (I,2,3).

Если $a_3 = 0$, имеем:

$$[1,2] = a_1(2) + a_2(3)\,; \quad [3,1] = a_4(3)\,; \quad [2,3] = 0\,; \qquad (4.16)$$
$$a_1, a_4 \neq 0.$$

Если $a_3 \neq 0$, то переходя к оператору $(\bar{2}) = a_3(2) + a_1(3)$, имеем:

$$[1,\bar{2}] = c_1(3); \quad [3,1] = (\bar{2}) + c_3(3); \quad [\bar{2},3] = 0;$$
$$c_1 = a_2 a_3 - a_1 a_4 \neq 0, \quad c_3 = a_4 - a_1 \qquad (4.17)$$

Других видов не может быть.

Покажем, что от (4.16) всегда можно перейти к (4.17), кроме одного случая. Введем операторы $(\bar{2}) = (2) + n_1(3)$, $(\bar{3}) = n_2(2) + (3)$ где $1 - n_1 n_2 \neq 0$. Тогда (4.17) примет вид:

$$[1,\bar{2}] = \frac{a_1 - n_2(a_2 - n_1 a_4)}{1 - n_1 n_2}(\bar{2}) + \frac{-n_1 a_1 + a_2 - n_1 a_4}{1 - n_1 n_2}(\bar{3});$$

$$[\bar{3},1] = \frac{-n_2 a_1 - n_2(a_4 - n_2 a_2)}{1 - n_1 n_2}(\bar{2}) + \frac{n_1 n_2 a_1 + a_4 - n_2 a_2}{1 - n_1 n_2}(\bar{3});$$

$$[\bar{2},\bar{3}] = 0.$$

Чтобы перейти к (4.17), положим $a_1 - n_2(a_2 - n_1 a_4) = 0$. Отсюда, положив, например, n_1 – произвольным, найдем n_2. Единственный случай, когда нельзя это сделать: $a_2 = a_1 + a_4 = 0$. Действительно, в этом случае имеем: $a_1(1 - n_1 n_2) = 0$. $a_1 \neq 0$ (т.к. $\rho_1 = 2$), следовательно $1 - n_1 n_2 = 0$, что не допускается ввиду невырожденности замены базиса. Рассмотрим (4.17) при $a_2 = a_1 + a_4 = 0$:

$$[1,\bar{2}] = a_1^2(3); \quad [\bar{3},1] = (\bar{2}) - 2a_1(3); \quad [\bar{2},3] = 0.$$

Введем оператор $(\bar{3}) = a_1(3) - (\bar{2})$:

$$[1,\bar{2}] = a_1(\bar{3}) + a_1(\bar{2}); \quad [\bar{3},1] = -a_1(\bar{3}); \quad [\bar{2},\bar{3}] = 0.$$

То есть получаем частный случай соотношений (4.16).

Таким образом, доказано, что коммутаторы подалгебры (I,2,3) можно привести к виду:

$$[1,2] = a_1(2) + a_2(3); \quad [3,1] = a_4(3); \quad [2,3] = 0.$$

Так как $a_1 \neq 0$, то, переходя к $(\bar{1}) = (1)/a_1$, имеем:

$$[1,2]=(2)+K_1(3); \qquad [3,1]=K_2(3); \qquad [2,3]=0.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для подалгебры (I,4,5)

Запишем таблицу возможных вариантов.

Таблица У.

(I,2,3)	(I,4,5)	№ вар.
$[1,2]=(2)+K_1(3)$	$[1,4]=K_3(4)+K_4(5)$; $[5,1]=K_5(5)$; $[4,5]=0$	I
$[3,1]=K_2(3)$	$[1,4]=K_3(1)+K_4(5)$; $[5,1]=0$; $[4,5]=K_5(5)$	2
$[2,3]=0$	$[1,4]=0$; $[5,1]=K_3(1)+K_4(4)$; $[4,5]=K_5(4)$	3

Исследование вариантов из таблицы У также ведется с помощью тождеств Якоби. Приведем окончательные результаты. Для варианта I имеются два набора коммутационных соотношений, приводящих к невырожденному решению,:

$$\begin{array}{llll}
[1,2]=(2) & [1,4]=K(4) & [2,6]=n(2) & [3,6]=-Km(3) \\
[3,1]=K(3) & [5,1]=(5) & [4,6]=Km(4) & [5,6]=-n(5) \\
[2,3]=0 & [4,5]=0 & [2,4]=0 & [3,5]=0
\end{array} \qquad (4.18)$$

$$[1,6]=0; \quad [2,5]=m(1)+(6); \quad [3,4]=n(1)+(6),$$

где K, m, n – вещественные числа.

$$\begin{array}{llll}
[1,2]=(2)+(3) & [1,4]=-(4)+(5) & [2,6]=-(2) & [3,6]=-(3) \\
[3,1]=-(3) & [5,1]=(5) & [4,6]=(4) & [5,6]=(5) \\
[2,3]=0 & [4,5]=0 & [2,4]=(6) & [3,5]=0
\end{array} \qquad (4.19)$$

$$[1,6]=0; \quad [2,5]=-(1)+(6); \quad [3,4]=(1)-(6).$$

Для вариантов 2 и 3 из таблицы У таких решений нет.

Аналогичное исследование вариантов:

$\overline{III}: \rho_\alpha = \rho_\beta = 1$; $\overline{IV}: \rho_\alpha = \rho_\beta = 0$; $\overline{V}: \rho_\alpha = 3$; $\rho_\beta = 2$; $\rho_\gamma = 1$; $\rho_\delta = 0$ –
– показывает, что для них не существует комбинаций коммутационных соотношений, приводящих к невырожденным решениям.

Таким образом, все варианты из таблицы I рассмотрены. Существует всего шесть вариантов, удовлетворяющих требованиям, указанным в постановке задачи: (П1.8), (П1.5), (П1.6), (П1.9), (4.I3), (4.I9).

ГЛАВА У. ТРЕХМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Можно считать, что теория пространств постоянной кривизны возникла в начале 19 века с открытием неевклидовой геометрии (Гаусс, Лобачевский, Бойяи). В середине 19 века Риман заложил основы римановой геометрии и построил римановы метрики постоянной кривизны. В 1891 году вышла книга Киллинга, в которой изучались римановы многообразия произвольной размерности и любой постоянной кривизны. Им была сформулирована "проблема Клиффорда-Клейна о сферических пространственных формах". Открытие Эйнштейном общей теории относительности усилило интерес к решению этой задачи (модели Бьянки для трехмерных геометрий). Э.Картан заложил основы теории симметрических пространств. Классификацией пространств постоянной кривизны и симметрических пространств занимались Зейферт, Л.Бибербах, Дж.Вольф, С.Хелгассон [98,99] и другие. В последнее время усилился интерес к трехмерным геометриям, благодаря работам У.Терстона [100].

Можно выделить три различных подхода к геометрии и к классификации различных пространств. При первом, классическом подходе (по Евклиду) рассматриваются только точки, прямые, соотношения инцидентности, углы и длины [101]. Второй подход доставляет дифференциальная геометрия, при этом геометрия восстанавливается по римановой метрике. При третьем подходе, сформулированном Клейном, просто задаются множество X и действующая на нем группа G и, говоря о геометрии пары (X,G), имеют ввиду свойства множества X, инвариантные относительно действия группы G.

Теория физических структур дает еще один подход к понятию геометрии. Вместо провозглашенной Клейном группы преобразований ТФС выделяет в качестве универсального свойства всех геометрий феноменологическую симметрию (см. введение). Тип физической структуры определяет соответствующие ему геометрии и позволяет найти конечное число соответствующих "метрик" в явном виде. Причем "метрика" - это просто отображение $X \times X \to R$ (со свойством непрерывности) без каких-бы то ни было дополнительных ограничений, свойственных стандартной билинейной форме [93, с.62].

В главе IУ показано, что существует всего шесть вариантов коммутационных соотношений для шестимерных алгебр Ли, удовлетворяющих условию задачи. В этой главе найдем явный вид решений системы (4.I) с матрицей коэффициентов (4.I3) для каждого решения.

§ 5.I. Трехмерные пространства постоянной кривизны и нечетномерное "симплектическое" пространство

Рассмотрим соотношения (III.8). Напомним, что K_1 может быть как вещественным, так и чисто мнимым числом (§ 3.I). Запишем K_1 в виде: $K_1 = \sqrt{\bar{K}_1}$, где $\bar{K}_1$ - уже вещественное число. Перепишем соотношения (4.I6) (штрихи спустим):

$$
\begin{array}{llll}
[1,2] = \sqrt{K_1}\,(2) & [1,4] = \sqrt{K_1}\,(4) & [2,6] = K_2(4) & [3,6] = K_2(5) \\
[3,1] = \sqrt{K_1}\,(3) & [5,1] = \sqrt{K_1}\,(5) & [4,6] = -K_3(2) & [5,6] = -K_3(3) \\
[2,3] = K_2\,(1) & [4,5] = K_3\,(1) & [2,4] = 0 & [3,5] = 0 \\
\end{array} \quad (5.I)
$$

$$[1,6] = 0\,; \qquad [3,4] = (6)\,; \qquad [2,5] = (6)\,;$$

где K_1, K_2, K_3 - вещественные числа.

Система (4.I) с матрицей (4.I3) состоит из уравнений, операторы которых образуют две трехмерные подалгебры с коммутационными соотношениями точно такого же вида, как и в двумерном случае (3.4), - подалгебры (I,2,3), (I,4,5). Используя соотношения (5.I) и таблицу II, найдем явный вид коэффициентов из матрицы (4.I3):

$$T_1 = \varphi_1(y,z)\exp(-\sqrt{K_1}\,x)\,; \qquad T_3 = \varphi_3(y,z)\exp\sqrt{K_1}\,x\,;$$

$$T_2 = \varphi_2(y,z)\exp(-\sqrt{K_1}\,x)\,; \qquad T_4 = \varphi_4(y,z)\exp\sqrt{K_1}\,x\,;$$

$$\Psi_1 = \mu_1(y,z)\exp(-\sqrt{K_1}\,x); \qquad \Psi_3 = \mu_3(y,z)\exp\sqrt{K_1}\,x;$$

$$\Psi_2 = \mu_2(y,z)\exp(-\sqrt{K_1}\,x); \qquad \Psi_4 = \mu_4(y,z)\exp\sqrt{K_1}\,x.$$

Как и в двумерном случае находим интегралы первого уравнения, вводим переменное $\sigma = x_i - x_j$ и, подставляя явный вид коэффициентов, после преобразований получим систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \sigma}\left[\varphi_{1i}\exp(-\sqrt{K_1}\,\sigma) - \varphi_{1j}\right] + \frac{\partial f}{\partial y_i}\varphi_{2i}\exp(-\sqrt{K_1}\,\sigma) + \frac{\partial f}{\partial y_j}\varphi_{2j} = 0;\\
&\frac{\partial f}{\partial \sigma}\left[\varphi_{3i}\exp\sqrt{K_1}\,\sigma - \varphi_{3j}\right] + \frac{\partial f}{\partial y_i}\varphi_{4i}\exp\sqrt{K_1}\,\sigma + \frac{\partial f}{\partial y_j}\varphi_{4j} = 0;\\
&\frac{\partial f}{\partial \sigma}\left[\mu_{1i}\exp(-\sqrt{K_1}\,\sigma) - \mu_{1j}\right] + \frac{\partial f}{\partial z_i}\mu_{2i}\exp(-\sqrt{K_1}\,\sigma) + \frac{\partial f}{\partial z_j}\mu_{2j} = 0;\\
&\frac{\partial f}{\partial \sigma}\left[\mu_{3i}\exp\sqrt{K_1}\,\sigma - \mu_{3j}\right] + \frac{\partial f}{\partial z_i}\mu_{4i}\exp\sqrt{K_1}\,\sigma + \frac{\partial f}{\partial z_j}\mu_{4j} = 0.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Система (5.2) состоит из двух подсистем вида (3.9) в двумерном случае. Разрешая первые два уравнения относительно $\partial f/\partial y_i$, $\partial f/\partial y_j$, а третье и четвертое – относительно $\partial f/\partial z_i$, $\partial f/\partial z_j$, получим систему, состоящую из двух подсистем вида (3.12) в двумерном случае. В Приложении II дано полное решение системы (5.2). Оно имеет вид:

$$f(x_i,y_i,z_i,x_j,y_j,z_j) = \chi\left[\Psi(x_i,y_i,z_i,x_j,y_j,z_j)\right]$$, где

χ – произвольная функция одного аргумента, а $\Psi(ij)$ – интеграл системы (5.2):

$$\begin{aligned}
\Psi(ij) = {} & \operatorname{ch}\sqrt{K_3}\,z_i\cdot\operatorname{ch}\sqrt{K_3}\,z_j\left[\operatorname{ch}\sqrt{K_2}\,y_i\cdot\operatorname{ch}\sqrt{K_2}\,y_j\cdot\operatorname{ch}\sqrt{K_1}(x_i-x_j) -\right.\\
& \left.- \operatorname{sh}\sqrt{K_2}\,y_i\cdot\operatorname{sh}\sqrt{K_2}\,y_j\right] - \operatorname{sh}\sqrt{K_3}\,z_i\cdot\operatorname{sh}\sqrt{K_3}\,z_j;
\end{aligned} \tag{5.3}$$

K_1, K_2, K_3 – вещественные числа.

В зависимости от знака k_1, k_2, k_3 из общего решения (5.3) можно выписать всего четыре независимых решения, соответствующие пространствам постоянной кривизны. Будем указывать соответствующую трехмерную "сферу":

1) $\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2+\bar{t}^2=1$; $\qquad k_1, k_2, k_3<0$;

$$\Psi(ij)=\cos z_i\cdot\cos z_j\left[\cos y_i\cdot\cos y_j\cdot\cos(x_i-x_j)+\right.$$
$$\left.+\sin y_i\cdot\sin y_j\right]+\sin z_i\cdot\sin z_j;$$

2) $\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2-\bar{t}^2=1$; $\qquad k_1, k_2<0,\ k_3>0$;

$$\Psi(ij)=\operatorname{ch} z_i\cdot\operatorname{ch} z_j\left[\cos y_i\cdot\cos y_j\cdot\cos(x_i-x_j)+\right.$$
$$\left.+\sin y_i\cdot\sin y_j\right]-\operatorname{sh} z_i\cdot\operatorname{sh} z_j;$$

3) $\bar{x}^2+\bar{y}^2-\bar{z}^2-\bar{t}^2=1$; $\qquad k_1<0,\ k_2, k_3>0$; $\qquad$ (5.4)

$$\Psi(ij)=\operatorname{ch} z_i\cdot\operatorname{ch} z_j\left[\operatorname{ch} y_i\operatorname{ch} y_j\cos(x_i-x_j)-\right.$$
$$\left.-\operatorname{sh} y_i\cdot\operatorname{sh} y_j\right]-\operatorname{sh} z_i\cdot\operatorname{sh} z_j;$$

4) $\bar{x}^2-\bar{y}^2-\bar{z}^2-\bar{t}^2=1$; $\qquad k_1, k_2, k_3>0$;

$$\Psi(ij)=\operatorname{ch} z_i\cdot\operatorname{ch} z_j\left[\operatorname{ch} y_i\cdot\operatorname{ch} y_j\cdot\operatorname{ch}(x_i-x_j)-\right.$$
$$\left.-\operatorname{sh} y_i\cdot\operatorname{sh} y_j\right]-\operatorname{sh} z_i\cdot\operatorname{sh} z_j.$$

Рассмотрим соотношения (III.6). Как указано в § 4.3 переходом к другому базису их можно привести к соотношениям (III.8). Но соотношения (III.6) представляют самостоятельный интерес: аналогично двумерному случаю, решая систему (4.I) с коммутаторами (III.6), можно получить другой вид метрики пространств постоянной кривизны, являющийся обобщением модели Клейна для плоскости Лобачевского в двумерном случае. Не приводя подробных выкладок, запичем полный интеграл системы (4.I) с коммутаторами (III.6):

$$\Psi(ij) = \frac{(x_i - x_j)^2 + K_1(y_i - y_j)^2 + K_2(z_i - z_j)^2}{z_i \cdot z_j} \qquad (5.5)$$

где K_1, K_2 – вещественные числа.

Рассмотрим коммутационные соотношения (III.5):

$$\begin{array}{llll} [1,2]=(1) & [1,4]=(1) & [2,6]=0 & [3,6]=0 \\ [3,1]=(2) & [5,1]=(4) & [4,6]=0 & [5,6]=0 \\ [2,3]=(3) & [4,5]=(5) & [2,4]=\frac{1}{2}(2)-\frac{1}{2}(4) & [3,5]=0 \end{array} \qquad (5.6)$$

$$[1,6]=0\ ;\quad [3,4]=-\tfrac{1}{2}(3)-\tfrac{1}{2}(5)+(6);\quad [2,5]=\tfrac{1}{2}(3)+\tfrac{1}{2}(5)-(6).$$

Решаем систему (4.I) с матрицей (4.I3). Используя (5.6) и таблицу II, найдем явный вид коэффициентов из матрицы (4.I3):

$$T_1 = -x + \vartheta_1;\quad T_3 = -\tfrac{1}{2}x^2 + \vartheta_1 x + \vartheta_3;\quad \Psi_1 = -x + \mu_1;\quad \Psi_3 = -\tfrac{1}{2}x^2 + \mu_1 x + \mu_3;$$

$$T_2 = \vartheta_2;\quad T_4 = \vartheta_2 x + \vartheta_4;\quad \Psi_2 = \mu_2;\quad \Psi_4 = \mu_2 x + \mu_4;$$

где $\vartheta_1, \dots, \vartheta_4, \mu_1, \dots, \mu_4$ – функции от переменных y, z. Как и в § 5.I находим интегралы первого уравнения, вводим переменную $v = x_i - x_j$ и подставляем явный вид коэффициентов $T_1, \dots, T_4$, $\Psi_1, \dots, \Psi_4$. Далее, из второго уравнения вычтем первое, умноженное на x_j, а из четвертого вычтем третье, умноженное на x_j. Получим систему:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-v + \vartheta_{1i} - \vartheta_{1j}) + \frac{\partial f}{\partial y_i}\vartheta_{2i} + \frac{\partial f}{\partial y_j}\vartheta_{2j} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(-\tfrac{1}{2}v^2 + \vartheta_{1i}v + \vartheta_{3i} - \vartheta_{3j}\right) + \frac{\partial f}{\partial y_i}(\vartheta_{2i}v + \vartheta_{4i}) + \frac{\partial f}{\partial y_j}\vartheta_{4j} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-v + \mu_{1i} - \mu_{1j}) + \frac{\partial f}{\partial z_i}\mu_{2i} + \frac{\partial f}{\partial z_j}\mu_{2j} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(-\tfrac{1}{2}v^2 + \mu_{1i}v + \mu_{3i} - \mu_{3j}\right) + \frac{\partial f}{\partial z_i}(\mu_{2i}v + \mu_{4i}) + \frac{\partial f}{\partial z_j}\mu_{4j} = 0.$$

Разрешим первое и второе уравнение относительно $\partial f/\partial y_i$ и $\partial f/\partial y_j$, а третье и четвертое относительно $\partial f/\partial z_i$, $\partial f/\partial z_j$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}{}_i+\frac{1}{\varphi_{2i}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}v^2+v\cdot\sigma_{1j}+\lambda_{1i}-\lambda_{1j}}{v+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}\right)+\frac{\partial f}{\partial y_i}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}{}_j+\frac{1}{\varphi_{2j}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}v^2-v\cdot\sigma_{1i}+\lambda_{1j}-\lambda_{1i}}{v+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}\right)+\frac{\partial f}{\partial y_j}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}{}_i+\frac{1}{\mu_{2i}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}v^2+v\cdot\sigma_{2j}+\lambda_{2i}-\lambda_{2j}}{v+\sigma_{2i}-\sigma_{2j}}\right)+\frac{\partial f}{\partial z_i}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2}{}_j+\frac{1}{\mu_{2j}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}v^2-v\cdot\sigma_{2i}+\lambda_{2j}-\lambda_{2i}}{v+\sigma_{2i}-\sigma_{2j}}\right)+\frac{\partial f}{\partial z_j}=0;
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

где

$$\lambda_1=\varphi_3-\varphi_1\varphi_4/(\varphi_2); \qquad \lambda_2=\mu_3-\mu_1\mu_4/\mu_2;$$
$$\sigma_1=\varphi_4/\varphi_2; \qquad \sigma_2=\mu_4/\mu_2.$$

Переходя к переменной $u=v+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}$ и используя коммутационные соотношения (5.6), можно перейти к системе:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{u}{2\varphi_{2i}}-\frac{\partial f}{\partial y_i}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{u}{2\varphi_{2j}}-\frac{\partial f}{\partial y_j}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{2\mu_{2i}}\left[u-(\sigma_2-\sigma_1)_j\right]-\frac{\partial f}{\partial z_i}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{2\mu_{2j}}\left[u+(\sigma_2-\sigma_1)_i\right]-\frac{\partial f}{\partial z_j}=0.
\end{aligned}
$$

Решая первые два уравнения, найдем их общие интегралы. Возьмем эти интегралы за новые переменные и проведем замену в третьем и четвертом уравнениях. Получим систему:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial q_1}\left[q_1-\sigma_0(z_j)\right]-\frac{\partial f}{\partial z_i}2\mu_2(z_i)=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial q_1}\left[q_1+\sigma_0(z_i)\right]-\frac{\partial f}{\partial z_j}2\mu_2(z_j)=0.
\end{aligned}
$$

Решая ее, окончательно получаем:

$$\Psi(ij) = (x_i - x_j) y_i y_j + z_i - z_j . \tag{5.8}$$

Полное решение системы (5.7) приведено в Приложении Ш.

Эта метрика может быть использована при построении термодинамики равновесных процессов, которая может рассматриваться как феноменологическая теория [31, с.49; 62 , с.144] .

§ 5.2. Трехмерные евклидово и псевдоевклидовы пространства

Рассмотрим соотношения (Ш.9). Отметим, что коэффициенты K_1, K_2, K_3 входят совершенно симметричным образом. Если принять один из коэффициентов равным нулю, то ни одна из аксиом в условии задачи не будет нарушена. Пусть $K_1 = 0$. Тогда имеем:

$$\begin{array}{llll} [1,2]=0 & [1,4]=0 & [2,6]=-K_2(4) & [3,6]=-K_2(5) \\ [3,1]=(2) & [5,1]=(4) & [4,6]=K_3(2) & [5,6]=K_3(3) \\ [2,3]=K_2(1) & [4,5]=K_3(1) & [2,4]=0 & [3,5]=(6) \end{array}$$

$$[1,6]=[2,5]=[3,4]=0, \tag{5.9}$$

где $K_2, K_3 \neq 0$.

Решаем систему (4.1) с матрицей коэффициентов (4.13) и с коммутаторами (5.9). Пользуясь таблицей П и (5.9) найдем явный вид коэффициентов $T_1, \dots, \Psi_4$:

$$\begin{array}{llll} T_1 = \vartheta_1(y,z); & T_3 = \vartheta_1 x + \vartheta_3; & \Psi_1 = \mu_1(y,z); & \Psi_3 = \mu_1 x + \mu_3; \\ T_2 = \vartheta_2(y,z); & T_4 = \vartheta_2 x + \vartheta_4; & \Psi_2 = \mu_2(y,z); & \Psi_4 = \mu_2 x + \mu_4. \end{array} \tag{5.10}$$

Найдем интегралы первого уравнения. Введем переменную $v = x_i - x_j$. Проведем замену переменных в остальных уравнениях системы (4.1) и подставим явный вид коэффициентов $T_1, \dots, \Psi_4$. Разрешим второе и третье уравнения относительно $\partial f/\partial y_i$; $\partial f/\partial y_j$, а четвертое и пятое относительно $\partial f/\partial z_i$; $\partial f/\partial z_j$. Получим систему:

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\varphi_1}{\varphi_2}i + \frac{\lambda_{1i}-\lambda_{1j}}{v+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}\right] + \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\varphi_1}{\varphi_2}j + \frac{\lambda_{1i}-\lambda_{1j}}{v+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}\right] - \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0; \qquad (5.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}i + \frac{\lambda_{2i}-\lambda_{2j}}{v+\sigma_{2i}-\sigma_{2j}}\right] + \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}j + \frac{\lambda_{2i}-\lambda_{2j}}{v+\sigma_{2i}-\sigma_{2j}}\right] - \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0;$$

где $\lambda_1 = \varphi_3 - \varphi_1\varphi_4/\varphi_2$; $\lambda_2 = \mu_3 - \mu_1\mu_4/\mu_3$; $\sigma_1 = \varphi_4/\varphi_2$; $\sigma_2 = \mu_4/\mu_2$.

Распишем некоторые коммутаторы из (5.9):

$$[2,3] = K_2(1): \qquad -\varphi_1^2 + \varphi_{1y}\varphi_4 - \varphi_{3y}\varphi_2 = K_2;$$

$$-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_{2y}\varphi_4 - \varphi_{4y}\varphi_2 = 0; \qquad (5.12)$$

$$[4,5] = K_3(1): \qquad -\mu_1^2 + \mu_{1z}\mu_4 - \mu_{3z}\mu_2 = K_3;$$

$$-\mu_1\mu_2 + \mu_{2z}\mu_4 - \mu_{4z}\mu_2 = 0;$$

$$[2,4] = 0: \qquad -\mu_{1y}\varphi_2 + \varphi_{1z}\mu_2 = 0; \qquad \varphi_{2z} = \mu_{2y} = 0;$$

$$[3,4] = 0: \qquad \varphi_1\mu_1 - \mu_{1y}\varphi_4 + \varphi_{3z}\mu_2 = 0; \qquad \varphi_2\mu_1 + \varphi_{4z}\mu_2 = 0;$$

$$[2,5] = 0: \qquad -\mu_1\varphi_1 - \mu_{3y}\varphi_2 + \varphi_{1z}\mu_4 = 0; \qquad \mu_2\varphi_1 + \mu_{4y}\varphi_2 = 0.$$

Как и в предыдущих случаях в системе (5.11) введем переменную

$$u = v - \int\frac{\varphi_1}{\varphi_2}i\,dy_i + \int\frac{\varphi_1}{\varphi_2}j\,dy_j - \int\Phi_i\,dz_i + \int\Phi_j\,dz_j; \quad \Phi = -\int\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)_z dy + \frac{M}{N}$$

Используя $[2,4]=0$, можно показать, что $\Phi = \Phi(z)$; $\varphi_2 = \varphi_2(y)$; $M.$

Переходя к переменным $\bar{y} = \int\frac{1}{\varphi_2}dy$ и $\bar{z} = \int\frac{1}{\mu_2}dz$, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\lambda_{1i}-\lambda_{1j}}{u+(\sigma_1+\psi_1+\psi_2)_i-(\sigma_1+\psi_1+\psi_2)_j}+\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\lambda_{1i}-\lambda_{1j}}{u+(\sigma_1+\psi_1+\psi_2)_i-(\sigma_1+\psi_1+\psi_2)_j}-\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_j}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\lambda_{2i}-\lambda_{2j}}{u+(\sigma_2+\psi_1+\psi_2)_i-(\sigma_2+\psi_1+\psi_2)_j}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}=0;\\
&\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\lambda_{2i}-\lambda_{2j}}{u+(\sigma_2+\psi_1+\psi_2)_i-(\sigma_2+\psi_1+\psi_2)_j}-\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0;
\end{aligned}\tag{5.12}$$

где $\psi_1=\int \varphi_1\varphi_2^{-1}dy$; $\psi_2=\int \Phi(z)dz$.

$\lambda_{1y}=\varphi_{3y}-\varphi_{1y}\varphi_4/\varphi_2-\varphi_1(\varphi_4/\varphi_2)_y$. Используя $[2,3]=K_2(1)$, получим $\lambda_{1y}=-K_2\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)_y$; отсюда: $\lambda_1=-K_2\bar{y}+\xi(z)$.

$\lambda_{1z}=\xi_z=\varphi_{3z}-\frac{\varphi_4\varphi_{1z}}{\varphi_2}-\frac{\varphi_1\varphi_{4z}}{\varphi_2}$, Используя $[2,4]=0$, $[3,4]=0$, получаем: $\xi_z(z)=0$. То есть: $\lambda_1=-K_2\bar{y}+C_1$. $\lambda_{2z}=\mu_{3z}-\mu_{1z}\mu_4/\mu_2-\mu_1(\mu_4/\mu_2)_z$. Используя $[4,5]=K_3(1)$, получаем: $\lambda_{2z}=-K_3\,\mu_2^{-1}(z)$. Отсюда: $\lambda_2=-K_3\bar{z}+h(y)$, где $\bar{z}=\int\mu_2^{-1}(z)dz$. $\lambda_{2y}=h_y(y)=\mu_{3y}-\mu_{1y}\frac{\mu_4}{\mu_2}-\mu_{4y}\mu_1/\mu_2$. Используя $[2,4]=0$, $[2,5]=0$, получим: $h_y(y)=0$. То есть: $\lambda_2=-K_3\bar{z}+C_2$.

Рассмотрим $\sigma_1=\varphi_4/\varphi_2$ и $\sigma_2=\mu_4/\mu_2$. $\sigma_{1y}=\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\right)_y=-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ (из $[2,3]=K_2(1)$). $\sigma_{2y}=(\mu_4/\mu_2)_y=\mu_{4y}/\mu_2=-\varphi_1/\varphi_2$ (из $[2,5]=0$). То есть $\sigma_{1y}=\sigma_{2y}$.

Так же $\sigma_{1z}=(\varphi_4/\varphi_2)_z=\varphi_{4z}/\varphi_2=-\mu_1/\mu_2$ (из $[3,4]=0$).

$\sigma_{2z}=(\mu_4/\mu_2)_z=-\mu_1/\mu_2$ (из $[4,5]=K_3(1)$). То есть $\sigma_{1z}=\sigma_{2z}$. Следовательно: $\sigma_2=\sigma_1+a_1$, где $a_1=const$.

Рассмотрим выражение $\sigma_1+\psi_1+\psi_2=\varphi_4/\varphi_2+\int\varphi_1\varphi_2^{-1}dy+\int\Phi(z)dz$.

Продифференцируем по y : $(\varphi_4/\varphi_2)_y+\varphi_1/\varphi_2=0$; (из $[2,3]=K_3(1)$).

Продифференцируем по z : $(\varphi_4/\varphi_2)_z+\int(\varphi_1/\varphi_2)_z dy+\varphi(z)=\varphi_{4z}/\varphi_2+\mu_1/\mu_2=$ (из $[3,4]=0$). То есть $\sigma_1+\psi_1+\psi_2=a_2$. Следовательно,

$$\sigma_2+\psi_1+\psi_2=a_1+a_2.$$

Подставляя полученные результаты в (5.12), имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{K_2(\bar y_i-\bar y_j)}{u}-\frac{\partial f}{\partial \bar y_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{K_2(\bar y_i-\bar y_j)}{u}+\frac{\partial f}{\partial \bar y_j}=0; \qquad (5.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{K_3(\bar z_i-\bar z_j)}{u}-\frac{\partial f}{\partial \bar z_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{K_3(\bar z_i-\bar z_j)}{u}+\frac{\partial f}{\partial \bar z_j}=0.$$

Решаем первое уравнение методом характеристик. Его интеграл: $u^2+K_2(\bar y_i-\bar y_j)^2=C$. Введем переменные $\rho_0=\bar y_i$; $\rho_1=C$. Тогда первое уравнение дает $\partial f/\partial\rho_0=0$, второе: $\partial f/\partial\bar y_j=0$. Третье и четвертое:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}2K_3(\bar z_i-\bar z_j)-\frac{\partial f}{\partial \bar z_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}2K_3(\bar z_i-\bar z_j)+\frac{\partial f}{\partial \bar z_j}=0.$$

Решаем первое: $\rho_1+K_3(\bar z_i-\bar z_j)^2=C$. Вводим переменное $q_1=C$. Тогда последнее уравнение дает $\partial f/\partial q_1=0$. Следовательно, интеграл всей системы:

$$C_1=\rho_1+K_3(\bar z_i-\bar z_j)^2.$$

Вернемся к переменным $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$:

$$C_1=(\bar x_i-\bar x_j)^2+K_2(\bar y_i-\bar y_j)^2+K_3(\bar z_i-\bar z_j)^2. \qquad (5.14)$$

При $K_2, K_3>0$, имеем метрику евклидовой плоскости: в остальных случаях – метрики псевдоевклидовых плоскостей.

§ 5.3. Трехмерные "экзотические" пространства

Рассмотрим коммутационные соотношения (4.18):

$$\begin{array}{llll}
[1,2]=(2) & [1,4]=K(4) & [2,6]=n(2) & [3,6]=-Km(3)\\
[3,1]=K(3) & [5,1]=(5) & [4,6]=Km(4) & [5,6]=-n(5)\\
[2,3]=0 & [4,5]=0 & [2,4]=0 & [3,5]=0
\end{array} \qquad (5.15)$$

$$[1,6]=0; \qquad [2,5]=m(1)+(6); \qquad [3,4]=n(1)+(6);$$

где K, m, n – вещественные числа.

Решаем систему (4.I) с матрицей (4.I3). Найдем явный вид коэффициентов, входящих в (4.I3). Из (5.I5) и таблицы II получаем:

$$T_{1x}=-T_1; \qquad T_{3x}=KT_3; \qquad \Psi_{1x}=-K\Psi_1; \qquad \Psi_{3x}=\Psi_3;$$

$$T_{2x}=-T_2; \qquad T_{4x}=KT_4; \qquad \Psi_{2x}=-K\Psi_2; \qquad \Psi_{4x}=\Psi_4.$$

Отсюда:

$$T_1=\vartheta_1 \exp(-x); \qquad \Psi_1=\mu_1 \exp(-Kx);$$

$$T_2=\vartheta_2 \exp(-x); \qquad \Psi_2=\mu_2 \exp(-Kx);$$

$$T_3=\vartheta_3 \exp Kx; \qquad \Psi_3=\mu_3 \exp x;$$

$$T_4=\vartheta_4 \exp Kx; \qquad \Psi_4=\mu_4 \exp x;$$

где $\vartheta_1,\dots,\vartheta_4,\mu_1,\dots,\mu_4$ – функции от y, z.

Как и в предыдущих случаях решаем первое уравнение системы (4.I), вводим переменное $\vartheta=x_i-x_j$ и подставляем явный вид коэффициентов в уравнения системы (4.I). Разрешив второе и третье уравнения относительно $\partial f/\partial y_i$, $\partial f/\partial y_j$, а четвертое и пятое относительно $\partial f/\partial z_i$, $\partial f/\partial z_j$, после преобразований получим:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}{}_i+\frac{1}{\vartheta_{2i}}\cdot\frac{\bar\lambda_{1j}-\bar\lambda_{1i}\exp K\vartheta}{\bar\sigma_{1j}\exp(-\vartheta)-\bar\sigma_{1i}\exp K\vartheta}\right]+\frac{\partial f}{\partial y_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}{}_j+\frac{1}{\vartheta_{2j}}\cdot\frac{\bar\lambda_{1i}\exp(K-1)\vartheta-\bar\lambda_{1j}\exp(-\vartheta)}{\bar\sigma_{1j}\exp(-\vartheta)-\bar\sigma_{1i}\exp K\vartheta}\right]+\frac{\partial f}{\partial y_j}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}{}_i+\frac{1}{\mu_{2i}}\cdot\frac{\bar\lambda_{2j}\exp(K-1)\vartheta-\bar\lambda_{2i}\exp K\vartheta}{\bar\sigma_{2j}\exp(-\vartheta)-\bar\sigma_{2i}\exp K\vartheta}\right]+\frac{\partial f}{\partial z_i}=0; \tag{5.I6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\left[-\frac{\mu_1}{\mu_2}{}_j+\frac{1}{\mu_{2j}}\cdot\frac{\bar\lambda_{2i}-\bar\lambda_{2j}\exp(-\vartheta)}{\bar\sigma_{2j}\exp(-\vartheta)-\bar\sigma_{2i}\exp K\vartheta}\right]+\frac{\partial f}{\partial z_j}=0;$$

где $\bar{\lambda}_1 = \vartheta_3 - \vartheta_1\vartheta_4/\vartheta_2$; $\qquad \bar{\lambda}_2 = \mu_3 - \mu_1\mu_4/\mu_2$;

$\bar{\sigma}_1 = \vartheta_4/\vartheta_2$; $\qquad \bar{\sigma}_2 = \mu_4/\mu_2$.

Перейдем к переменной $\bar{u} = v - \int(\vartheta_1/\vartheta_2)_i dy_i + \int(\vartheta_1/\vartheta_2)_j dy_j$. Рассмотрим третье уравнение в (5.16) после замены:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left\{\left[-\int\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)_{z_i} dy_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}{}_i\right] + \frac{1}{\mu_{2i}} \cdot \frac{\bar{\lambda}_{2j}\exp(\kappa-1)v - \bar{\lambda}_{2i}\exp\kappa v}{\bar{\sigma}_{2j}\exp(-v) - \bar{\sigma}_{2i}\exp\kappa v}\right\} + \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0.$$

Используя $[2,4] = [3,5] = 0$, можно показать, что выражение в квадратных скобках зависит только от переменной z_i. Обозначим это выражение:

$$\varphi(z) = -\int\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)_z dz + \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Введем переменное $\qquad u = \bar{u} - \int\varphi(z_i)dz_i + \int\varphi(z_j)dz_j =$

$$= v - (\psi_1+\psi_2)_i + (\psi_1+\psi_2)_j; \quad \psi_1 = \int\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}dy; \quad \psi_2 = \int\varphi(z)dz.$$

После преобразований получим:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\exp(\psi_1+\psi_2)_i}{\vartheta_{2i}} \cdot \frac{\lambda_{1j} - \lambda_{1i}\exp\kappa u}{\sigma_{1j}\exp(-u) - \sigma_{1i}\exp\kappa u} + \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\exp(\psi_1+\psi_2)_j}{\vartheta_{2j}} \cdot \frac{\lambda_{1i}\exp(\kappa-1)u - \lambda_{1j}\exp(-u)}{\sigma_{1j}\exp(-u) - \sigma_{1i}\exp\kappa u} + \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0; \qquad (5.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\exp\kappa(\psi_1+\psi_2)_i}{\mu_{2i}} \cdot \frac{\lambda_{2j}\exp(\kappa-1)u - \lambda_{2i}\exp\kappa u}{\sigma_{2j}\exp(-u) - \sigma_{2i}\exp\kappa u} + \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\exp\kappa(\psi_1+\psi_2)_j}{\mu_{2j}}\;\frac{\lambda_{2i} - \lambda_{2j}\exp(-u)}{\sigma_{2j}\exp(-u) - \sigma_{2i}\exp\kappa u} + \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0;$$

где $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1\exp\kappa(\psi_1+\psi_2)$; $\qquad \lambda_2 = \bar{\lambda}_2\exp(\psi_1+\psi_2)$;

$\sigma_1 = \bar{\sigma}_1\exp[(1+\kappa)(\psi_1+\psi_2)]$; $\qquad \sigma_2 = \bar{\sigma}_2\exp[(1+\kappa)(\psi_1+\psi_2)]$.

Используя $[2,4]=[3,5]=0$ и таблицу II, можно показать, что: $\varphi_2^{-1}\exp(\psi_1+\psi_2)=\gamma(y)$; $\mu_2^{-1}\exp K(\psi_1+\psi_2)=\nu(z)$. Используя $[2,3]=[4,5]=0$ и таблицу II, можно показать, что:

$$\begin{aligned} &\lambda_1=\lambda_1(z); \qquad \sigma_1=-\lambda_1(z)\int\gamma(y)\,dy+\xi(z);\\ &\lambda_2=\lambda_2(y); \qquad \sigma_2=-K\lambda_2(y)\int\nu(z)\,dz+h(y). \end{aligned} \tag{5.18}$$

С помощью коммутаторов $[2,4]$, $[3,5]$, $[3,4]$, $[2,5]$ доказывается, что $K\sigma_1=\sigma_2$. Подставив в это соотношение σ_1 и σ_2 из (5.18), найдем:

$$\begin{aligned} &\lambda_1=b\int\nu(z)\,dz+c_1; \qquad \xi(z)=-c_2\int\nu(z)\,dz+t_1/K;\\ &\lambda_2=b\int\gamma(y)\,dy+c_2; \qquad h(y)=-Kc_1\int\gamma(y)\,dy+t_1; \end{aligned}$$

где b, c_1, c_2, t_1 – вещественные числа.

Перейдем к переменным $\bar{y}=\lambda_2(y)$; $\bar{z}=\lambda_1(z)$. Тогда система (5.17) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\bar{z}_j-\bar{z}_i\exp Ku}{\sigma_j\exp(-u)-\sigma_i\exp Ku}+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}_i}=0;\\ &\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\bar{z}_i\exp(K-1)u-\bar{z}_j\exp(-u)}{\sigma_j\exp(-u)-\sigma_i\exp Ku}+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}_j}=0;\\ &\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\bar{y}_j\exp(K-1)u-\bar{y}_i\exp Ku}{\sigma_j\exp(-u)-\sigma_i\exp Ku}+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_i}=0;\\ &\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\bar{y}_i-\bar{y}_j\exp(-u)}{\sigma_j\exp(-u)-\sigma_i\exp Ku}+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}=0; \end{aligned} \tag{5.19}$$

где $\sigma=\sigma_1=-(\bar{z}\bar{y}+t_0)$; $t_0=c_1c_2+t_1b/K$.

Для первого и третьего уравнения составим уравнение $[X_1,X_3]f(ij)=0$. Используя (3.6), получим: $(K-1)t_0=0$.

Возможны два случая:

1) $K\neq 1$, $t_0=0$; 2) $K=1$; $t_0\neq 0$.

Случай $K \neq 1$, $t_0 = 0$.

Решаем первое уравнение системы (5.19). Запишем уравнение характеристик:

$$\frac{d\bar{y}_i}{du} = \frac{\bar{z}_i \exp Ku}{\bar{z}_j - \bar{z}_i \exp Ku}\,\bar{y}_i - \frac{\bar{z}_j \bar{y}_j \exp(-u)}{\bar{z}_j - \bar{z}_i \exp Ku}.$$

Это – линейное уравнение. Его решение:

$$C_1' = [\bar{y}_j \exp(-u) - \bar{y}_i]\cdot[\bar{z}_j - \bar{z}_i \exp Ku]^{\frac{1}{K}}. \tag{5.20}$$

Подставляя полученное решение в остальные уравнения системы (5.19), убеждаемся, что (5.20) является интегралом всей системы. Переходя к переменным $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$, получим:

$$\Psi(ij) = \hat{x}_i \hat{x}_j (\hat{y}_i - \hat{y}_j)(\hat{z}_i - \hat{z}_j)^{1/K}, \tag{5.21}$$

где $\hat{x} = \exp(-\bar{x})$; $\hat{y} = \bar{y}\exp\bar{x}$; $\hat{z} = \bar{z}\exp\bar{x}$; $\bar{x} = x - (\psi_1 + \psi_2)$.
Это решение является обобщением двумерного решения (3.19), известного как метрика двумерного симплициального пространства.

Случай $K = 1$; $t_0 \neq 0$.

Решая систему (5.19) методом характеристик, получим интеграл:

$$\Psi(ij) = \frac{(\hat{y}_i - \hat{y}_j)(\hat{z}_i - \hat{z}_j) + t_0(\hat{x}_i - \hat{x}_j)^2}{\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j} \tag{5.22}$$

Это решение можно привести к виду (5.5).

Перепишем соотношения (4.19).

$$\begin{array}{llll}
[1,2] = (2) + (3); & [1,4] = -(4) + (5) & [2,6] = -(2) & [3,6] = -(3) \\
[3,1] = -(3) & [5,1] = (5) & [4,6] = (4) & [5,6] = (5) \\
[2,3] = 0 & [4,5] = 0 & [2,4] = (6) & [3,5] = 0
\end{array} \tag{5.23}$$

$$[1,6] = 0;\quad [2,5] = -(1) + (6);\quad [3,4] = (1) - (6).$$

Решаем систему (4.1) с матрицей (4.13). Пользуясь (5.23) и таблицей II, найдем явный вид $T_1, \dots, \Psi_4$:

$$-T_{1x} = T_1 + T_3; \quad T_{3x} = -T_3; \quad -\Psi_{1x} = -\Psi_1 + \Psi_3; \quad \Psi_{3x} = \Psi_3;$$
$$-T_{2x} = T_2 + T_4; \quad T_{4x} = -T_4; \quad -\Psi_{2x} = -\Psi_2 + \Psi_4; \quad \Psi_{4x} = \Psi_4.$$

Отсюда получаем:

$$T_1 = (-\vartheta_3 x + \vartheta_1)\exp(-x); \qquad T_3 = \vartheta_3 \exp(-x);$$
$$T_2 = (-\vartheta_4 x + \vartheta_2)\exp(-x); \qquad T_4 = \vartheta_4 \exp(-x);$$
$$\Psi_1 = (-\mu_3 x + \mu_1)\exp x; \qquad \Psi_3 = \mu_3 \exp x;$$
$$\Psi_2 = (-\mu_4 x + \mu_2)\exp x; \qquad \Psi_4 = \mu_4 \exp x;$$

где $\vartheta_1, \dots, \vartheta_4, \mu_1, \dots, \mu_4$ зависят от $z; y$.

Как и в предыдущих вариантах, решаем первое уравнение системы (4.1), вводим переменное $v = x_i - x_j$ и подставляем явный вид коэффициентов. Разрешая второе и третье уравнение системы (4.1) относительно $\partial f/\partial y_i$ и $\partial f/\partial y_j$, а четвертое и пятое относительно $\partial f/\partial z_i$ и $\partial f/\partial z_j$, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\vartheta_3}{\vartheta_4}{}_i - \frac{1}{\vartheta_{4i}}\,\frac{\bar\lambda_{1i} - \bar\lambda_{1j}\exp v}{v - \bar\sigma_{1i} + \bar\sigma_{1j}}\right] + \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\vartheta_3}{\vartheta_4}{}_j + \frac{1}{\vartheta_{4j}}\,\frac{\bar\lambda_{1j} - \bar\lambda_{1i}\exp(-v)}{v - \bar\sigma_{1i} + \bar\sigma_{1j}}\right] - \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0; \qquad (5.24)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\mu_3}{\mu_4}{}_i - \frac{1}{\mu_{4i}}\,\frac{\bar\lambda_{2i} - \bar\lambda_{2j}\exp(-v)}{v - \bar\sigma_{2i} + \bar\sigma_{2j}}\right] + \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\mu_3}{\mu_4}{}_j + \frac{1}{\mu_{4j}}\,\frac{\bar\lambda_{2j} - \bar\lambda_{2i}\exp v}{v - \bar\sigma_{2i} + \bar\sigma_{2j}}\right] - \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0;$$

где $\bar\lambda_1 = \vartheta_1 - \vartheta_2\vartheta_3/\vartheta_4; \qquad \bar\lambda_2 = \mu_1 - \mu_2\mu_3/\mu_4;$

$\bar\sigma_1 = \vartheta_2/\vartheta_4; \qquad \bar\sigma_2 = \mu_2/\mu_4.$

Перейдем к переменной $\bar u = v - \int \frac{\vartheta_3}{\vartheta_4}{}_i\, dy_i + \int \frac{\vartheta_3}{\vartheta_4}{}_j\, dy_j$. Рассмотрим третье уравнение в (5.24) после замены:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\left\{\left[-\int\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4}\right)_{z_i} dy_i+\frac{\mu_3}{\mu_4}i\right]-\frac{1}{\mu_{4i}}\;\frac{\bar{\lambda}_{2i}-\bar{\lambda}_{2j}\exp(-\bar{u}-\psi_{1i}+\psi_{1j})}{\bar{u}-(\bar{\sigma}_2-\psi_1)_i+(\bar{\sigma}_2-\psi_1)_j}\right\}+\frac{\partial f}{\partial z_i}=0;$$

где $\psi_1=\int \varphi_3^{-1}\varphi_4\, dy$.

Используя $[3,5]=0$, можно показать, что выражение в квадратных скобках зависит только от z_i:

$-\int\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4}\right)_{z_i} dy_i+\frac{\mu_3}{\mu_4}i=\varphi(z_i)$. Введем переменное

$$u=\bar{u}-\int\varphi(z_i)\,dz_i+\int\varphi(z_j)\,dz_j=\bar{v}-(\psi_1+\psi_2)_i+(\psi_1+\psi_2)_j,$$

где $\psi_2=\int\varphi(z)\,dz$. После преобразований система (5.24) примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\exp(\psi_1+\psi_2)_i}{\varphi_{4i}}\cdot\frac{\lambda_{1i}-\lambda_{1j}\exp u}{u+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}-\frac{\partial f}{\partial y_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\exp(\psi_1+\psi_2)_j}{\varphi_{4j}}\cdot\frac{\lambda_{1j}-\lambda_{1i}\exp(-u)}{u+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}-\frac{\partial f}{\partial y_j}=0; \qquad (5.25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\exp(-\psi_1-\psi_2)_i}{\mu_{4i}}\cdot\frac{\lambda_{2i}-\lambda_{2j}\exp(-u)}{u+\sigma_{2i}-\sigma_{2j}}-\frac{\partial f}{\partial z_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\;\frac{\exp(-\psi_1-\psi_2)_j}{\mu_{4j}}\;\frac{\lambda_{2j}-\lambda_{2i}\exp u}{u+\sigma_{2i}-\sigma_{2j}}-\frac{\partial f}{\partial z_j}=0;$$

где $\lambda_1=\bar{\lambda}_1\exp(-\psi_1)$; $\lambda_2=\bar{\lambda}_2\exp\psi_1$; $\sigma_1=-\bar{\sigma}_1+\psi_1+\psi_2$; $\sigma_2=-\bar{\sigma}_2+\psi_1+\psi_2$.

Используя $[3,5]$, $[3,4]$, $[2,5]$, $[2,4]$, можно показать, что:

$$\varphi_4^{-1}\exp(\psi_1+\psi_2)=\gamma(y);\quad \mu_4^{-1}\exp(-\psi_1-\psi_2)=\nu(z);\quad \sigma_2=\sigma_1-2.$$

Используя $[2,3]=[4,5]=0$, можно показать, что: $\lambda_1=\lambda_1(z)$; $\lambda_2=\lambda_2(y)$.

Переходя к переменным $\bar{y}=\int\gamma(y)\,dy$, $\bar{z}=\int\nu(z)\,dz$, перепишем систему (5.25) в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\;\frac{\lambda_1(\bar{z}_i)-\lambda_1(\bar{z}_j)\exp u}{u+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}-\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\;\frac{\lambda_1(\bar{z}_j)-\lambda_1(\bar{z}_i)\exp(-u)}{u+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}-\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_j}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\lambda_2(\bar{y}_i)-\lambda_2(\bar{y}_j)\exp(-u)}{u+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}-\frac{\partial f}{\partial z_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\lambda_2(\bar{y}_j)-\lambda_2(\bar{y}_i)\exp u}{u+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}}-\frac{\partial f}{\partial z_j}=0.$$

Для первого и третьего уравнения составим уравнение $[X_1,X_3]f(ij)=0$. Используя (3.6), найдем:

$$\lambda_1(z)=a_1;\quad \lambda_2(y)=a_2;\quad \sigma_1=-a_2\bar{z}+a_1\bar{y}+a_3$$

где a_1, a_2, a_3 – вещественные числа.

Перейдем к переменным $\tilde{z}=-a_2\bar{z}$; $\tilde{y}=a_1\bar{y}$ и вычтем из первого четвертое уравнение, а из второго – третье:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_i}+\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_j}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_j}+\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{1-\exp u}{u+(\tilde{y}+\tilde{z})_i-(\tilde{y}+\tilde{z})_j}-\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{1-\exp(-u)}{u+(\tilde{y}+\tilde{z})_i-(\tilde{y}+\tilde{z})_j}-\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_j}=0.$$

Решая полученную систему методом характеристик, получим:

$$\psi(ij)=\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_j+\hat{z}_i\hat{x}_j-\hat{z}_j\hat{x}_i}{\hat{x}_i-\hat{x}_j}. \qquad (5.26)$$

Это решение обобщает двумерное решение (3.31).

В этой главе найдены все возможные трехмерные пространства в рамках теории физических структур. Решения (5.3), (5.4), (5.5) описывают пространства постоянной кривизны, (5.8) – нечетномерное "симплектическое" пространство, (5.14) – евклидово и псевдоевклидовы пространства, (5.21), (5.26) – "экзотические" трехмерные пространства.

Отсутствуют (по ФГ)
(4.17) – дуальногельмгольцево пр-во
(4.18) – пространство Гельмгольца.

ГЛАВА УІ. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Создание специальной теории относительности и теории тяготения значительно усилило интерес к четырехмерным пространствам. Пространство и время оказались объединенными в единое 4-мерное многообразие Минковского. Проблема истинной размерности пространства – времени всегда занимала и занимает физиков, математиков, философов [97].

Физический подход к этой проблеме заключается в том, что классическое пространство соответствует отношениям между макроскопическими объектами. Но эти отношения справедливы только в пределах ограниченного масштаба. Современная физика достигла значительных успехов в изучении свойств материи как в малых масштабах (в микромире), так и в больших (в космологии). Вскрыты более глубокие и фундаментальные свойства мира, и для их описания вводятся понятия, отличные от классических.

Сейчас в теоретической физике поставлен вопрос о создании теории, в основу которой были бы положены некие довольно абстрактные закономерности. В такой теории классические пространственно-временные представления не должны быть заложены с самого начала, а должны возникать на определенном этапе развития теории как нечто вторичное.

Еще Б.Риман ставил вопрос "о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве". Он подчеркивал, что подобные вопросы должны решаться с помощью физики. Э.Мах настаивал на том, что "все геометрические определения имеют значение, относительное к масштабу". Имеется достаточное количество работ и других физиков, исследовавших обусловленность геометрических представлений физическими закономерностями в разных масштабах организации материи.

Одним из возможных путей в этом направлении является теория физических структур, разрабатываемая Ю.И.Кулаковым, Г.Г.Михайличенко, Ю.С.Владимировым и другими. Метрика пространства не постулируется, а выводится из более общего предположения о существовании принципа феноменологической симметрии (см. введение, глава I). Отметим, что точно такой же подход оказывается применим не только к геометрии, но и ко всем физическим теориям феноменологического типа.

Общий подход к исследованию физических структур, разрабатываемый в настоящей работе, подобен общему ковариантному подходу, разработанному Ф.И.Федоровым для решения различных задач теоретической физики [102-104] . Подход Ф.И.Федорова обеспечивает такую формулировку физической теории, при которой отпадает необходимость в использовании каких-либо частных систем координат и базисов многомерных пространств, а, следовательно, в явном расписывании по компонентам векторов, функций, матриц и операторов. Физическая информация извлекается из основных уравнений путем последовательного учета и использования инвариантных свойств матриц, входящих в эти уравнения.

В настоящей работе исследование также ведется с учетом симметрии всей системы в целом, не разбивая ее на отдельные уравнения, как это сделано в пионерской работе Г.Г.Михайличенко [85]. Полностью используются инвариантные свойства функциональной матрицы Якоби (типа (2.14)), а переход к частной системе координат совершается на конечной стадии исследования (практического решения системы уравнений).

В § 2.3 приведена постановка задачи о физической структуре ранга $\tau = 6$. Установлено, что ей соответствует система дифференциальных уравнений (2.33) с матрицей коэффициентов (2.34). Показано, что операторы уравнений образуют базис десятимерной алгебры Ли.

§ 6.1. Структура десятимерных алгебр Ли

В главе IУ было установлено, что шестимерные алгебры Ли, соответствующие физической структуре $r = 5$, имеют свои структурные особенности. А именно, каждая шестимерная алгебра Ли состоит из четырех трехмерных подалгебр Ли. Эта особенность является следствием того факта, что шесть уравнений системы (4.1) с матрицей коэффициентов (2.18) разбиваются на четыре группы по три уравнения со следующим характерным свойством для каждой тройки уравнений: i -я часть одного из уравнений является линейной комбинацией с переменными коэффициентами из i -ых частей двух других уравнений; то же относится и к j -ым частям.

Обращаясь к матрице (2.34), видим, что и в данном случае ситуация повторяется.

Отметим, что и в случае произвольной физической структуры ранга r функциональная матрица Якоби будет иметь такой же специфический вид. Слева от матрицы (2.34) находится столбец операторов X_μ, номера которых согласованы с аналогичной матрицей (2.18) для структуры ранга $r = 5$. Выпишем группы по три оператора, обладающие указанным выше свойством. Непосредственно видны следующие группы:

$$(X_1, X_2, X_3),\ (X_1, X_4, X_5),\ (X_1, X_7, X_8),\ (X_2, X_4, X_6),\ (X_2, X_7, X_9),\ (X_4, X_7, X_{10}).$$

В § 4.1. для физической структуры ранга $r = 5$ было использовано соотношение (2.21) с помощью которого операторы X_3, X_5, X_6 были преобразованы в операторы $\overline{X}_3$, $\overline{X}_5$, $\overline{X}_6$, образующие тройку с указанным выше свойством. Найдем аналогичные соотношения и для матрицы (2.34).

В § 2.3 было отмечено, что ранг матрицы (2.34) равен семи. То есть все определители восьмого порядка равны нулю. Выбрав какой-нибудь минор седьмого порядка, не равный нулю, (например, стоящий в левом верхнем углу), можно выписать окаймляющие его три определителя восьмого порядка, равные нулю. Получим три связи на коэффициенты, которые можно использовать в дальнейших вычислениях. Удобно записывать эти связи в едином виде "определителя", имеющего восемь столбцов и десять строк. Преобразуем этот "определитель".

Представим каждый столбец матрицы (2.34) в виде суммы столбцов следующим образом. Например, первый столбец:

$$
\left\| \begin{pmatrix} A_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 A_1^1 \\ \varepsilon_3 A_1^1 \\ \varepsilon_5 A_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 A_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_7 A_2^1 \\ \varepsilon_9 A_2^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_3^1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_4 A_3^1 \\ 0 \\ \varepsilon_8 A_3^1 \\ 0 \\ \varepsilon_{11} A_3^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_4^1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_6 A_4^1 \\ 0 \\ \varepsilon_{10} A_4^1 \\ \varepsilon_{12} A_4^1 \end{pmatrix} (i) \;\Bigg|\; \cdots\cdots \right\|
$$

Таким же образом разобьем остальные столбцы матрицы (2.34). Далее, выписав "определитель" 8x10, разобьем его на сумму "определителей", перебирая сначала i -е столбцы, потом j -е. После группировки членов один из определителей 8-го порядка примет вид:

$$
\Delta(i)\cdot\Delta(j) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon_{1i} & \varepsilon_{2i} & 0 & 0 & \varepsilon_{1j} & \varepsilon_{2j} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{3i} & 0 & \varepsilon_{4i} & 0 & \varepsilon_{3j} & 0 & \varepsilon_{4j} & 0 \\ \varepsilon_{5i} & 0 & 0 & \varepsilon_{6i} & \varepsilon_{5j} & 0 & 0 & \varepsilon_{6j} \\ 0 & \varepsilon_{7i} & \varepsilon_{8i} & 0 & 0 & \varepsilon_{7j} & \varepsilon_{8j} & 0 \end{vmatrix} = 0
$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 & A_1^4 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 & A_2^4 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & A_3^4 \\ A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 & A_4^4 \end{vmatrix}. \qquad (6.I)$$

Как и в случае физической структуры ранга $r = 5$ можно показать, что $\Delta \neq 0$. В оставшемся "определителе" вычтем из первого столбца пятый, из второго – шестой, из третьего – седьмой и из четвертого – восьмой; так же и для других определителей восьмого порядка. Записывая все связи вместе, получим:

$$\left\| \begin{array}{cccc} (\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1j}) & (\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j}) & 0 & 0 \\ (\varepsilon_{3i}-\varepsilon_{3j}) & 0 & (\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{4j}) & 0 \\ (\varepsilon_{5i}-\varepsilon_{5j}) & 0 & 0 & (\varepsilon_{6i}-\varepsilon_{6j}) \\ 0 & (\varepsilon_{7i}-\varepsilon_{7j}) & (\varepsilon_{8i}-\varepsilon_{8j}) & 0 \\ 0 & (\varepsilon_{9i}-\varepsilon_{9j}) & 0 & (\varepsilon_{10i}-\varepsilon_{10j}) \\ 0 & 0 & (\varepsilon_{11i}-\varepsilon_{11j}) & (\varepsilon_{12i}-\varepsilon_{12j}) \end{array} \right\| \qquad (6.2)$$

Напомним, что в (6.2) записаны три определителя четвертого порядка, равные нулю и окаймляющие не равный нулю определитель третьего порядка (в левом верхнем углу). Действительно, если указанный определитель третьего порядка равен нулю, то получим:

$$(\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j})(\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{4j})(\varepsilon_{5i}-\varepsilon_{5j})=0. \qquad (6.3)$$

Пусть, например, первая скобка равна нулю. Тогда $\varepsilon_{2i}=\varepsilon_{2j}=const=\varepsilon_2$. Умножим второе уравнение из (2.33), (2.34) на ε_2 и вычтем из третьего:

$$\varepsilon_{3i}\left[\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}A_1^1(i)+\dots+\frac{\partial f(ij)}{\partial u_i}A_1^4(i)\right]+\varepsilon_{3j}\left[\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}A_1^1(j)+\dots+\frac{\partial f(ij)}{\partial u_j}A_1^4(j)\right]=0.$$

Выпишем первое уравнение: (6.4)

$$\left[\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}A_1^1(i)+\dots+\frac{\partial f(ij)}{\partial u_i}A_1^4(i)\right]+\left[\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}A_1^1(j)+\dots+\frac{\partial f(ij)}{\partial u_j}A_1^4(j)\right]=0.$$

Получили алгебраическую систему из двух уравнений относительно двух неизвестных – квадратных скобок. Система имеет решение в двух случаях:

1) определитель системы равен нулю,
2) неизвестные равные нулю.

Если определитель равен нулю, то ранг всей системы (2.33) уменьшается на единицу, что не допускается.

Если неизвестные равны нулю, то получим:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}A_1^1(i)+\dots+\frac{\partial f(ij)}{\partial u_i}A_1^4(i)=0.$$

Но такое уравнение по аксиоме III (глава I) также не допускается. То есть, $\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j}\neq 0$. Так же можно показать, что ни одна из скобок в (6.3) не равна нулю. Таким образом, действительно, определитель, отмеченный пунктиром в (6.2) не равен нулю.

Выпишем один из определителей четвертого порядка из (6.2):

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1j}) & (\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j}) & 0 & 0 \\ (\varepsilon_{3i}-\varepsilon_{3j}) & 0 & (\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{4j}) & 0 \\ (\varepsilon_{5i}-\varepsilon_{5j}) & 0 & 0 & (\varepsilon_{6i}-\varepsilon_{6j}) \\ 0 & (\varepsilon_{7i}-\varepsilon_{7j}) & (\varepsilon_{8i}-\varepsilon_{8j}) & 0 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.5)$$

Так как $(\varepsilon_{6i}-\varepsilon_{6j})\neq 0$ (по доказанному выше), имеем:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1j}) & (\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j}) & 0 \\ (\varepsilon_{3i}-\varepsilon_{3j}) & 0 & (\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{4j}) \\ 0 & (\varepsilon_{7i}-\varepsilon_{7j}) & (\varepsilon_{8i}-\varepsilon_{8j}) \end{vmatrix}=0. \qquad (6.6)$$

То есть получили соотношение точно такое же, как и (2.21). И таких соотношений в (6.2) – три.

Как и для структуры ранга $r = 5$ можно показать, что с помощью трех соотношений типа (6.6) соответствующие тройки операторов можно преобразовать в операторы, обладающие тем же свойством: i-я часть одного из них является линейной комбинацией из i-ых частей двух других; то же и для j-ых частей. Эти три группы операторов нетрудно выписать с помощью соотношений типа (6.4):

$$(X_3, X_5, X_6),\ (X_3, X_8, X_9),\ (X_5, X_8, X_{10}).$$

И, наконец, из (6.2) нетрудно найти еще одно соотношение типа (6.6). Выбирая последние четыре строки, аналогично найдем еще одну тройку таких операторов: (X_6, X_9, X_{10}).

Таким образом, имеем десять таких троек операторов. Так же, как и для структуры ранга $r = 5$, можно доказать, что тройка операторов, обладающих вышеуказанным свойством, образует трехмерную подалгебру Ли. Следовательно, десятимерные алгебры Ли, соответствующие физической структуре ранга $r = 6$, состоят из десяти трехмерных подалгебр Ли. Совпадение размерности алгебр Ли для структуры ранга $r = 6$ с числом трехмерных подалгебр может быть и случайное...

Для полного решения задачи о физической структуре ранга $r = 6$ необходима классификация десятимерных алгебр Ли. Как уже отмечалось, такой классификации нет. Но если бы она и была, воспользоваться ею было бы очень сложно.

В случае структуры ранга $r = 5$ в главе IУ проведена классификация шестимерных алгебр Ли, исходя из того, что они состоят из четырех трехмерных подалгебр. Для структуры ранга $r = 6$ и такой путь является сложным и громоздким. Но, пользуясь соображениями симметрии и используя результаты, полученные для структуры ранга $\tau = 5$, возможно найти некоторые решения, соответствующие структуре ранга $\tau = 6$.

В главе IУ было показано, как от системы уравнений (2.22) с матрицей коэффициентов (2.18) перейти к системе с матрицей (4.13). Аналогичным образом от системы уравнений (2.33) с матрицей коэффициентов (2.34), соответствующих структуре ранга $\tau = 6$, можно перейти к следующей матрице коэффициентов:

$$\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array}
\left\|\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
T_1(i) & T_2(i) & 0 & 0 & T_1(j) & T_2(j) & 0 & 0 \\
T_3(i) & T_4(i) & 0 & 0 & T_3(j) & T_4(j) & 0 & 0 \\
\Psi_1(i) & 0 & \Psi_2(i) & 0 & \Psi_1(j) & 0 & \Psi_2(j) & 0 \\
\Psi_3(i) & 0 & \Psi_4(i) & 0 & \Psi_3(j) & 0 & \Psi_4(j) & 0 \\
\Theta_1(i) & 0 & 0 & \Theta_2(i) & \Theta_1(j) & 0 & 0 & \Theta_2(j) \\
\Theta_3(i) & 0 & 0 & \Theta_4(i) & \Theta_3(j) & 0 & 0 & \Theta_4(j)
\end{array}\right\| \qquad (6.7)$$

Слева от матрицы стоит столбец из операторов, номера которых соответствуют номерам операторов в (2.34).

Нетрудно заметить "алгоритм" построения матриц типа (6.7) для структур более высокого ранга: при увеличении τ на единицу к матрице добавляются две строки, в каждой из которых находятся по два коэффициента в i -й и j -й частях. Такая структура матрицы является следствием того факта, что $n(n+1)/2$ - мерные алгебры Ли, соответствующие физической структуре ранга $\tau = n+2$, состоят из определенного числа трехмерных подалгебр.

Вернемся к классификации шестимерных алгебр Ли, соответствующих структуре ранга $\tau = 5$. В главе IУ найдены всего шесть вариантов, дающих невырожденные решения. Классификация велась, исходя из коммутационных соотношений для двух трехмерных подалгебр $(X_1, X_2, X_3), (X_1, X_4, X_5)$, так как решалась система из первых пяти уравнений (2.22) с матрицей коэффициентов (4.13). Обращаясь к коммутационным соотношениям, соответствующим каждому варианту, нетрудно заметить, что они разбиваются на две группы. В первой группе коммутаторы для подалгебр $(X_1, X_2, X_3), (X_1, X_4, X_5)$ имеют одинаковую структуру – (Ш.8), (Ш.5), (Ш.6). Во второй группе структура этих подалгебр различная.

Возвращаясь к матрице (6.7), вполне резонно предположить, что и в этом случае решения разбиваются на две подобные группы. В этом предположении рассмотрим группу, для которой коммутаторы подалгебр (X_1, X_2, X_3), (X_1, X_4, X_5), (X_1, X_7, X_8) имеют одинаковую структуру. Для первых двух подалгебр все возможные варианты найдены. Это – (5.1), (5.6), (5.9). Естественно коммутаторы третьей подалгебры записать в одном из указанных вариантов. Понятно, что эти три варианта полностью исчерпывают указанную группу.

Будем искать решения для каждого из указанных вариантов.

§ 6.2. Четырехмерные пространства постоянной кривизны

Рассмотрим вариант, обобщающий (5.1).

$$\begin{aligned}
&[1,2] = \sqrt{K_1}\,(2) && [1,4] = \sqrt{K_1}\,(4) && [1,7] = \sqrt{K_1}\,(7) \\
&[3,1] = \sqrt{K_1}\,(3) && [5,1] = \sqrt{K_1}\,(5) && [8,1] = \sqrt{K_1}\,(8) \\
&[2,3] = K_2\,(1) && [4,5] = K_3\,(1) && [7,8] = K_4\,(1).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Остальные коммутаторы не выписываем. По соображениям симметрии "взаимоотношения" между подалгебрами (1,2,3), (1,4,5), (1,7,8) должны быть одинаковыми, то есть (см. (5.1)):

$$[2,4] = [3,5] = [2,7] = [3,8] = [4,7] = [4,8] = 0. \tag{6.9}$$

При этих предположениях будем решать систему (2.33) с матрицей коэффициентов (6.7). Если мы получим невырожденное решение, то наше предположение о взаимной симметрии подалгебр (I,2,3), (I.4,5), (I,7,8) верно.

Проведем все выкладки, приведенные в приложении II, используя (6.8), (6.9). В результате получим якобиеву систему, обобщающую (П2.2):

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho} E_{1i}(\lambda_{1i}\rho - \lambda_{1j}) + \frac{\partial f(i_j)}{\partial y_i} = 0; \quad \frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho} E_{2i}(\lambda_{2i}\rho - \lambda_{2j}) + \frac{\partial f(i_j)}{\partial z_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho} E_{1j}(\lambda_{1j}\rho - \lambda_{1i}) + \frac{\partial f(i_j)}{\partial y_j} = 0; \quad \frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho} E_{2j}(\lambda_{2j}\rho - \lambda_{2i}) + \frac{\partial f(i_j)}{\partial z_j} = 0;$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho} E_{3i}(\lambda_{3i}\rho - \lambda_{3j}) + \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_i} = 0; \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho} E_{3j}(\lambda_{3j}\rho - \lambda_{3i}) + \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_j} = 0;$$

где $\rho = ch\sqrt{K_1}(\bar{x}_i - \bar{x}_j)$; E_K, λ_K – зависят от аргументов y, z, u .

Так же, как и в Приложении II, решаем первые два уравнения, находим интегралы, делаем замену переменных и приходим к системе обобщающей (П2.10):

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \sigma_1}\left[-T_1(z_i,u_i)\sigma_1 + T_2(z_i,u_i)\,T_6(z_j,u_j)\right] + \frac{\partial f(i_j)}{\partial z_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \sigma_1}\left[-T_1(z_j,u_j)\sigma_1 + T_2(z_j,u_j)\,T_6(z_i,u_i)\right] + \frac{\partial f(i_j)}{\partial z_j} = 0; \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \sigma_1}\left[-F_1(z_i,u_i)\sigma_1 + F_2(z_i,u_i)\,F_6(z_j,u_j)\right] + \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \sigma_1}\left[-F_1(z_j,u_j)\sigma_1 + F_2(z_j,u_j)\cdot F_6(z_i,u_i)\right] + \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_j} = 0.$$

Явный вид функций F_1, F_2, F_6 аналогичен виду T_1, T_2, T_6. Запишем σ_1 в явном виде, используя имеющиеся коммутаторы, (см. Приложение II):

$$\sigma_1 = ch\sqrt{K_2}\,\hat{y}_i \cdot ch\sqrt{K_2}\,\hat{y}_j \cdot ch\sqrt{K_1}\,(\bar{x}_i - \bar{x}_j) - sh\sqrt{K_2}\,\hat{y}_i \cdot sh\sqrt{K_2}\,\hat{y}_j\,,$$

где $\hat{y} = \hat{y}\,(y, z, u)$.

Вполне естественно, что это – решение структуры ранга $r = 4$ при $z, u = const$. В целях дальнейшего обобщения запишем σ_1 в виде:

$$\sigma_1 = \Psi_{r=4}\,.$$

Далее, решая первые два уравнения системы (6.11), точно так же, как и в Приложении II, получим интеграл:

$$C_1 = ch\sqrt{K_3}\,\hat{z}_i \cdot ch\sqrt{K_3}\,\hat{z}_j\,\{\Psi_{r=4}\} - sh\sqrt{K_3}\,\hat{z}_i \cdot sh\sqrt{K_3}\,\hat{z}_j\,;$$

где $\hat{z} = \hat{z}\,(y, z, u)$.

Вполне естественно обозначить его:

$$C_1 = \Psi_{r=5}\,.$$

Вводим новую переменную: $q_2 = C_1 = \Psi_{r=5}$. Стандартным образом проводим замену переменных в последних двух уравнениях системы (6.11) и получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(ij)}{\partial q_2}\left[-R_1(u_i)\,q_2 + R_2(u_i)\cdot R_6(u_j)\right] + \frac{\partial f(ij)}{\partial u_i} = 0;\\ &\frac{\partial f(ij)}{\partial q_2}\left[-R_1(u_j)\,q_2 + R_2(u_j)\cdot R_6(u_i)\right] + \frac{\partial f(ij)}{\partial u_j} = 0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

И, наконец, решая систему (6.12), получим интеграл всей системы (2.33):

$$\Psi_{r=6} = \exp\left(\int R_1(u_i)\,du_i\right)\cdot \exp\left(\int R_1(u_j)\,du_j\right)\cdot q_2 - $$
$$- R_6(u_j)\exp\left(\int R_1(u_j)\,du_j\right)\cdot \int R_2(u_i)\exp\left(\int R_1(u_i)\,du_i\right)du_i\,.$$

Используя коммутационные соотношения, окончательно получаем:

$$\Psi_{r=6} = ch\sqrt{K_4}\,\hat{u}_i \cdot ch\sqrt{K_4}\,\hat{u}_j \left\{ \Psi_{r=5} \right\} - sh\sqrt{K_4}\,\hat{u}_i \cdot sh\sqrt{K_4}\,\hat{u}_j .$$

Или, раскрывая $\Psi_{r=4}$, $\Psi_{r=5}$, имеем:

$$\Psi_{r=6}(ij) = ch\sqrt{K_4}\,\hat{u}_i \cdot ch\sqrt{K_4}\,\hat{u}_j \Big\{ ch\sqrt{K_3}\,\hat{z}_i \cdot ch\sqrt{K_3}\,\hat{z}_j \Big[ch\sqrt{K_2}\,\hat{y}_i \times$$
$$\times ch\sqrt{K_2}\,\hat{y}_j \cdot ch\sqrt{K_1}(x_i - x_j) - sh\sqrt{K_2}\,\hat{y}_i \cdot sh\sqrt{K_2}\,\hat{y}_j \Big] -$$
$$- sh\sqrt{K_3}\,\hat{z}_i \cdot sh\sqrt{K_3}\,\hat{z}_j \Big\} - sh\sqrt{K_4}\,\hat{u}_i \cdot sh\sqrt{K_4}\,\hat{u}_j . \tag{6.13}$$

В зависимости от знака вещественных чисел $K_1, \ldots, K_4$ получаем пять различных четырехмерных пространств постоянной кривизны. Решение невырожденное, и, таким образом, предположение о взаимной симметрии трех подалгебр (6.8) оказалось верным.

В § 5.I отмечено, что соотношения (III.6) можно получить из (III.8) переходом к другому базису. То есть они тоже соответствуют трехмерным пространствам постоянной кривизны. Записывая обобщение (III.6) на случай структуры $r = 6$ (здесь также имеется взаимная симметрия между тремя трехмерными подалгебрами), стандартным образом можно получить решение, обобщающее формулу (5.5):

$$\Psi_{r=6}(ij) = \frac{(x_i - x_j)^2 + C_1 (y_i - y_j)^2 + C_2 (z_i - z_j)^2 + C_3 (u_i - u_j)^2}{u_i \cdot u_j} \tag{6.14}$$

где C_1, C_2, C_3 – вещественные числа.

§ 6.3. Четырехмерное симплектическое пространство, пространство Минковского, евклидово и другие четырехмерные псевдоевклидовы пространства

Рассмотрим вариант, обобщающий (5.6):

$$[1,2] = (1) ; \quad [3,1] = (2) ; \quad [2,3] = (3) ;$$

$$[1,4]=(1);\quad [5,1]=(4);\quad [4,5]=(5);$$
$$[1,7]=(1);\quad [8,1]=(7);\quad [7,8]=(8). \tag{6.15}$$

По соображениям симметрии "взаимоотношения" между подалгебрами должны быть одинаковыми. Используя (5.6), запишем:

$$[2,4]=\tfrac{1}{2}(2)-\tfrac{1}{2}(4);\quad [2,7]=\tfrac{1}{2}(2)-\tfrac{1}{2}(7);\quad [4,7]=\tfrac{1}{2}(4)-\tfrac{1}{2}(7);$$
$$[3,5]=0;\quad [3,8]=0;\quad [5,8]=0; \tag{6.16}$$
$$[2,5]+[3,4]=0;\quad [2,8]+[3,7]=0;\quad [4,8]+[5,7]=0.$$

Решаем систему (2.34) с матрицей коэффициентов (6.7). Проведем все вычисления, приведенные в Приложении Ш, используя (6.15), (6.16). После решения первых трех уравнений получим якобиевую систему, обобщающую (ПЗ.6):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial q_1}\,\frac{[q_1-\sigma_0(z_i,u_i)]}{2\mu_2(z_i,u_i)}-\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}=0;$$
$$\frac{\partial f(ij)}{\partial q_1}\,\frac{[q_1+\sigma_0(z_i,u_i)]}{2\mu_2(z_j,u_j)}-\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=0;$$
$$\frac{\partial f(ij)}{\partial q_1}\,\frac{[q_1-\theta_0(z_j,u_j)]}{2\nu_2(z_i,u_i)}-\frac{\partial f(ij)}{\partial u_i}=0; \tag{6.17}$$
$$\frac{\partial f(ij)}{\partial q_1}\,\frac{[q+\theta_0(z_i,u_i)]}{2\nu_2(z_j,u_j)}-\frac{\partial f(ij)}{\partial u_j}=0;$$

где $\quad q_1=(\bar{x}_i-\bar{x}_j)\,\bar{y}_i\,\bar{y}_j$.

Естественно, что $q_1=\Psi_{r=4}$, так как q_1 – интеграл первых трех уравнений, дающих решение для структуры ранга $r=4$ при $z,u=\mathrm{const}$.

Будем решать систему (6.17). Воспользоваться коммутаторами (6.16) довольно сложно. Легче найти условия на коэффициенты системы, непосредственно составляя уравнения $[X_\mu, X_\nu] f(i_j)=0$ из операторов системы (6.17). Используя формулы (3.6), получим:

$$[X_1, X_2] f(i_j)=0 : \qquad 2\mu_2 \sigma_{0z} + \sigma_0 = 0;$$

$$[X_1, X_3] f(i_j)=0 : \quad \left(\frac{1}{\mu_2}\right)_u = \left(\frac{1}{\nu_2}\right)_z; \quad \frac{\nu_{2z}}{\nu_2} = \frac{1}{2\mu_2}; \tag{6.18}$$

$$[X_1, X_4] f(i_j)=0 : \qquad \theta_{0z} \cdot 2\mu_2 + \theta_0 =$$

$$= -(\sigma_{0u} \cdot 2\nu_2 + \sigma_0) = const = t_1,$$

где $\sigma_{0z} = \partial\sigma_0/\partial z$ и т.д.

Решаем первое уравнение в (6.17).

Его интеграл: $C = (q_i - \sigma_{0j}) \exp \Psi_{1i}$, где $\Psi_1 = \int \frac{dz}{2\mu_2}$.

Введем переменные $\rho_0 = z_i$; $\rho_1 = C_1$. Тогда первое уравнение в (6.17) даст $\partial f(i_j)/\partial\rho_0 = 0$, а остальные уравнения с помощью (6.18) приведутся к виду:

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\rho_1 + C_1(u_i)}{2\mu_2(z_j, u_j)} - \frac{\partial f(i_j)}{\partial z_j} = 0;$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\rho_1 + \sigma_{0j} - \theta_{0j}}{2\nu_2(u_i)} - \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_i} = 0; \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\rho_1 + C_2(u_i)}{2\nu_2(z_j, u_j)} - \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_j} = 0;$$

где $c_1(u) = \sigma_0 \cdot \exp\Psi_1$; $\quad c_2(u) = (\theta_0 - t_1)\exp\Psi_1$.

Составим коммутаторы для системы (6.19):

$$[X_1, X_2] f(i_j)=0 : \qquad (\sigma_0 - \theta_0)_j + (\sigma_{0j} - \theta_{0j})_{z_j} 2\mu_{2j} =$$

$$= c_1(u_i) + C_{1u_i} 2\nu_2(u_i) = const = -t_1;$$

$$[X_1, X_3] f(i_j) = 0: \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right)_u = \left(\frac{1}{\nu_2}\right)_z. \tag{6.20}$$

Решаем первое уравнение в (6.19). Его интеграл $C_i = [\rho_1 + C_1(u_i)] \exp \Psi_{1j}$. Введем переменные $\rho_0 = z_j$, $\rho_1 = C_i$. Тогда первое уравнение в (6.19) даст $\partial f(i_j)/\partial \rho_0 = 0$, а последние два с помощью (6.20) запишутся в виде:

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\rho_1 + C_0(u_j)}{2\nu_2(u_i)} - \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\rho_1 - C_0(u_i)}{2\nu_2(u_j)} - \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_j} = 0; \tag{6.21}$$

где $C_0(u) = (\sigma_0 - \theta_0 + t_1) \exp \Psi_1$.

Из $[X_1, X_2] f(i_j) = 0$ для (6.21) находим:

$$C_0(u) + C_{0u} \cdot 2\nu_2(u) = 0. \tag{6.22}$$

Решаем первое уравнение. Его интеграл :

$$C_i = [\rho_1 + C_0(u_j)] \exp \Psi_2(u_i), \qquad \text{где } \Psi_{2i} = \int \frac{du_i}{2\nu_2(u_i)}.$$

Введем переменные $h_0 = u_i$; $h_1 = C_i$.

Тогда первое уравнение в (6.21) даст $\partial f(i_j)/\partial h_0 = 0$, а второе с помощью (6.22) приведется к виду:

$$\frac{\partial f(i_j)}{\partial h_1} \cdot \frac{h_1 + \bar{c}_0}{2\nu_2(u_j)} - \frac{\partial f(i_j)}{\partial u_j} = 0; \quad \bar{c}_0 = const.$$

Решая это уравнение, получим интеграл всей системы: $C_i = \Psi_{r=6} = (h_1 + \bar{c}_0) \exp \Psi_2(u_j)$. Возвращаясь к переменным: $x_i, \ldots, u_i$, $x_j, \ldots, u_j$, получим:

$$\Psi_{r=6} = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)\, \bar{y}_i \bar{y}_j \cdot \exp[(\Psi_1 + \Psi_2)_i + (\Psi_1 + \Psi_2)_j] +$$

$$+\exp(\psi_1+\psi_2)_i \cdot C_1(u_i)\cdot\exp\psi_{2i} + \exp(\psi_1+\psi_2)_j\cdot C_1(u_j)\exp\psi_{2j} +$$
$$+\bar{C}_0\exp\psi_{2j} - \bar{c}_0\exp\psi_{2i}.$$

Рассмотрим соотношение (6.20). Решая уравнение $c_1(u)+C_{1u}\, 2V_2(u) = -t_1$, получим:

$$c_1(u) = \bar{c}_1\exp[-\psi_2(u)] - t_1.$$

Подставим $C_1(u)$ в интеграл $\psi_{r=6}$ и добавим $\pm\frac{\bar{c}_0\bar{c}_1}{t_1}$:

$$\psi_{r=6}(ij) = (\bar{x}_i-\bar{x}_j)\hat{y}_i\hat{y}_j + (\bar{c}_1 - t_1\exp\psi_{2i})\cdot\exp(\psi_1+\psi_2)_j -$$
$$-(\bar{c}_1 - t_1\exp\psi_{2j})\cdot\exp(\psi_1+\psi_2)_i + \bar{c}_0\exp\psi_{2i} - \bar{c}_0\exp\psi_{2j}\pm$$
$$\pm\bar{c}_0\bar{c}_1/t_1 = (\bar{x}_i-\bar{x}_j)\hat{y}_i\hat{y}_j + (\bar{c}_1 - t_1\exp\psi_{2i})(\exp(\psi_1+\psi_2)_j -$$
$$-\bar{c}_0/t_1) - (\bar{c}_1 - t_1\exp\psi_{2j})(\exp(\psi_1+\psi_2)_i - \bar{c}_0/t_1) =$$
$$= (\bar{x}_i-\bar{x}_j)\hat{y}_i\hat{y}_j + (\hat{z}_i-\hat{z}_j)\hat{u}_i\hat{u}_j;$$

где $\hat{z} = (\exp(\psi_1+\psi_2) - \bar{c}_0/t_1)/(\bar{c}_1 - t_1\exp\psi_2)$; $\hat{u} = \bar{c}_1 - t_1\exp\psi_2$.

Итак, опуская штрихи, имеем:

$$\psi_{r=6}(ij) = (x_i-x_j)y_iy_j + (z_i-z_j)u_iu_j. \tag{6.23}$$

Как известно, полученное выражение является метрикой четырехмерного симплектического пространства.

Рассмотрим вариант, обобщающий (5.9):

$[1,2]=0$	$[1,4]=0$	$[1,7]=0$
$[3,1]=(2)$	$[5,1]=(4)$	$[8,1]=(7)$
$[2,3]=K_1(1)$	$[4,5]=K_2(1)$	$[7,8]=K_3(1)$.

Выкладки совершенно аналогичны тем, которые проведены в § 5.2. Решая первое уравнение системы (2.33) с матрицей коэффициентов

(6.7) и проводя стандартным образом замену переменных, получим систему, обобщающую (5.13):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f(ij)}{\partial \rho}\cdot\frac{K_1(\bar{y}_i-\bar{y}_j)}{\rho}-\frac{\partial f(ij)}{\partial \bar{y}_i}=0;\\
&\frac{\partial f(ij)}{\partial \rho}\cdot\frac{K_1(\bar{y}_i-\bar{y}_j)}{\rho}+\frac{\partial f(ij)}{\partial \bar{y}_j}=0;\\
&\frac{\partial f(ij)}{\partial \rho}\cdot\frac{K_2(\bar{z}_i-\bar{z}_j)}{\rho}-\frac{\partial f(ij)}{\partial \bar{z}_i}=0;\\
&\frac{\partial f(ij)}{\partial \rho}\cdot\frac{K_2(\bar{z}_i-\bar{z}_j)}{\rho}+\frac{\partial f(ij)}{\partial \bar{z}_j}=0;\\
&\frac{\partial f(ij)}{\partial \rho}\cdot\frac{K_3(\bar{u}_i-\bar{u}_j)}{\rho}-\frac{\partial f(ij)}{\partial \bar{u}_i}=0;\\
&\frac{\partial f(ij)}{\partial \rho}\cdot\frac{K_3(\bar{u}_i-\bar{u}_j)}{\rho}+\frac{\partial f(ij)}{\partial \bar{u}_j}=0;
\end{aligned}
\qquad (6.24)
$$

где $\rho=\bar{x}_i-\bar{x}_j$.

Решая систему методом характеристик, окончательно получим интеграл всей системы в виде:

$$C_1=\Psi_{r=6}=(\bar{x}_i-\bar{x}_j)^2+K_1(\bar{y}_i-\bar{y}_j)^2+K_2(\bar{z}_i-\bar{z}_j)^2+K_3(\bar{u}_i-\bar{u}_j)^2; \qquad (6.25)$$

где K_1, K_2, K_3 – вещественные числа.

При $K_1=K_2=K_3=1$ получаем метрику четырехмерного евклидова пространства. При $K_1=K_2=K_3=-1$ получаем метрику пространства Минковского; в остальных случаях – метрики четырехмерных псевдоевклидовых пространств.

Итак, рассмотрены все варианты, в которых подалгебры (X_1, X_2, X_3), (X_1, X_4, X_5), (X_1, X_7, X_8) имеют одинаковую структуру.

Как уже отмечалось, не рассмотрены варианты, в которых структура этих подалгебр различная. То есть задача о нахождении всех феноменологически инвариантных четырехмерных метрик полностью не решена.

§ 6.4. Физические структуры произвольного ранга r

Исследование физической структуры ранга $r = 5$ дает нам возможность увидеть пути полного решения задачи о физической структуре произвольного ранга r. Вернемся к системе (4.I) с матрицей коэффициентов (4.I3). По соображениям симметрии все равно какие уравнения решать сначала: I,2,3 или I,4,5. Результат должен быть одним и тем же с точностью до одной произвольной функции. Рассмотрим, например, вариант I, соответствующий трехмерным пространствам постоянной кривизны. Обратимся к системе (П2.2). Решая уравнения I,2 получим решение в виде: $f(ij) = \chi_1(\Psi_1, z_i, z_j)$, где Ψ_1 - интеграл уравнений I,2. Решая уравнения 3,4, получим: $\chi_2(\Psi_2, y_i, y_j)$, где Ψ_2 - интеграл уравнений 3,4. Эти выражения должны быть равны с точностью до одной произвольной функции

$$\chi_1(\Psi_1, z_i, z_j) = \bar{\chi}_2(\Psi_2, y_i, y_j).$$

Оказывается, что, решая это функциональное уравнение, можно найти интеграл всей системы (П2.2). Его вид:

$$'\Psi = \theta_1(z_i)\theta_1(z_j)\Psi_1 - P_1(z_i)\cdot P_1(z_j). \qquad (6.26)$$

Заметим, что Ψ_1 - интеграл системы из трех уравнений, вид которых в точности соответствует структуре ранга $r = 4$, которая решена полностью. Конечно, можно записать Ψ в виде:

$$\Psi = F_1(y_i)F_1(y_j)\Psi_2 - Q_1(y_i)\cdot Q_1(y_j),$$

где Ψ_2 – также интеграл системы, соответствующей структуре ранга $\tau = 4$.

Таким образом, возникает предположение, что, зная решение, описывающее геометрию двумерных пространств постоянной кривизны (для структуры ранга $\tau = 4$), можно написать рекуррентную формулу для решения, описывающего геометрию n -мерных пространств постоянной кривизны (для структуры ранга $\tau = n+2$), в виде:

$$\Psi_{\tau=n+2} = \theta_{n-2}(i)\,\theta_{n-2}(j)\Big\{\cdots\Big\{\theta_2(i)\,\theta_2(j)\Big[\theta_1(i)\,\theta_1(j)\,\Psi_{\tau=4} -$$

$$- P_1(i)\,P_1(j)\Big] - P_2(i)\cdot P_2(j)\Big\}\cdots\Big\} - P_{n-2}(i)\,P_{n-2}(j)\ ; \qquad (6.27)$$

где $\theta_1(x^1,\dots,x^n),\dots,\ \theta_{n-2}(x^1,\dots,x^n)$ имеют одинаковый вид (то же относится и к $P_1,\dots,P_{n-2}$). Для структур ранга $\tau = 5$ и $\tau = 6$ это предположение подтверждается (формулы (5.3) и (6.13)).

Можно также написать рекуррентную формулу, обобщающую метрику двумерного симплектического пространства:

$$\Psi_{\tau=4} = (x_i - x_j)\, y_i\, y_j . \qquad (3.19)$$

Из § 5.1 можно заметить, что соответствующая формула для структуры ранга $\tau = 5$ получается следующим образом:

$$\Psi_{\tau=5} = z_i\cdot z_j\cdot \Psi_{\tau=4} + (z_i - z_j) = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)\,\bar{y}_i\,\bar{y}_j + z_i - z_j . \qquad (5.8)$$

Из § 6.2 можно заметить, что для $\tau = 6$ соответствующая формула может быть получена по такому же алгоритму:

$$\Psi_{\tau=6} = \Psi_{\tau=5}\cdot u_i\cdot u_j + u_i - u_j = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)\,\bar{y}_i\,\bar{u}_i\,\bar{y}_j\,\bar{u}_j +$$

$$+ u_i u_j (z_i - z_j) + u_i - u_j = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)\,\hat{y}_i\,\hat{y}_j + u_i u_j\Big[\Big(z_i - \frac{1}{u_i}\Big) -$$

$$- \Big(z_j - \frac{1}{u_j}\Big)\Big] = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)\,\hat{y}_i\,\hat{y}_j + (\hat{z}_i - \hat{z}_j)\,u_i\,u_j . \qquad (6.23)$$

Таким образом, и для этого решения можно написать формулу для структуры ранга   :

$$\Psi_{r=n+2} = \theta_{n-2}(i)\theta_{n-2}(j)\Big\{\cdots\Big\{\theta_2(i)\theta_2(j)\Big[\Psi_{r=4} + \theta_1(i) - \theta_1(j) + \theta_1(i) - \theta_1(j)\Big] + \theta_2(i) - \theta_2(j)\Big\}\cdots\Big\} + \theta_{n-2}(i) - \theta_{n-2}(j). \tag{6.28}$$

И, естественно, формула для псевдоевклидовых пространств имеет вид:

$$\Psi_{r=n+2} = (x_i - x_j)^2 + K_1(y_i - y_j)^2 + \cdots + K_{n-1}(v_i - v_j)^2. \tag{6.29}$$

Других решений пока найти не удалось.

Есть основания предполагать, что спектр решений по мере возрастания ранга физической структуры не увеличивается, и все возможные решения для структуры ранга r являются обобщениями решений (может быть и не всех), найденных для структуры ранга $r = 4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы физические структуры на одном множестве. Случай структур на одном множестве является одним из возможных в математической схеме, предназначенной для формулировки основной идеи теории физических структур - идеи "равноправия" физических объектов по отношению к физическому закону, записанному в феноменологически инвариантной форме.

Установлено, что физическая структура ранга r описывает геометрии $n = r - 2$ - мерных пространств. Причем, из всех n-мерных геометрий теория физических структур выделяет феноменологически инвариантные, то есть те, которые удовлетворяют соотношению (2) (см. введение).

С помощью геометрии можно описывать различные физические теории с единой точки зрения. Поиск "физических" геометрий, наиболее адекватно подходящих различным разделам физики, является одной из важных задач теоретической физики.

Для нахождения таких геометрий в рамках теории физических структур автором разработан общий параметрический метод, с помощью которого исследованы физические структуры ранга $r = 4; 5; 6$.

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертации.

1. Установлено, что в теории физических структур появляются алгебры Ли как необходимое следствие аксиом, которые первоначально определены для теории физических структур. Показано, что каждой физической структуре соответствует система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которая в некотором смысле имеет единственное решение. Доказано, что операторы дифференциальных уравнений образуют базис $n(n+1)/2$-мерной алгебры Ли, где $n = r - 2$.

2. С помощью общего параметрического метода исследована физическая структура ранга $\tau = 4$. Найдены все возможные феноменологически инвариантные двумерные геометрии. Таковыми являются: геометрии пространств постоянной кривизны, симплектической плоскости, евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей и три "экзотические" геометрии. Решения получены в виде двух формул, содержащих некоторое количество параметров. Придавая параметрам различные значения, можно получить все указанные геометрии.

3. Исследована физическая структура ранга $\tau = 5$. Ее решения описывают геометрии трехмерных пространств в рамках теории физических структур. В рамках ТФС решение получено впервые.

Структуре ранга $\tau = 5$ соответствуют шестимерные алгебры Ли. Показано, что эти алгебры Ли состоят из четырех трехмерных подалгебр, причем операторы каждой трехмерной подалгебры являются тем "двумерным блоком", который соответствует физической структуре ранга $\tau = 4$.

На основании этого результата разработана классификация шестимерных алгебр Ли в рамках теории физических структур. Установлено, что имеется всего шесть вариантов коммутационных соотношений, приводящих к невырожденным решениям.

4. На основе полученной классификации найдены все возможные феноменологически инвариантные геометрии трехмерных пространств – пространств постоянной кривизны, нечетномерного "симплектического" пространства, евклидова и псевдоевклидовых пространств и две "экзотические" трехмерные геометрии.

5. Рассмотрена физическая структура ранга $\tau = 6$, описывающая геометрии четырехмерных пространств.

Показано, что десятимерные алгебры Ли, соответствующие этой структуре, состоят из десяти трехмерных подалгебр.

Найдены некоторые решения, которые описывают геометрии следующих четырехмерных пространств: пространств постоянной кривизны, симплектического пространства, пространства Минковского, евклидова и псевдоевклидовых пространств.

На основании полученных результатов приведены соображения о возможности исследования физической структуры ранга τ.

Как отмечалось во введении (§ 2) разработанный метод является универсальным, то есть с его помощью можно исследовать физические структуры и на двух множествах.

Исследуя структуры на двух множествах, которые описывают различные физические законы, Г.Г.Михайличенко показал, что каждой структуре ранга (τ, τ) соответствуют два независимых решения, не сводящиеся друг к другу [49].

Исследуя те же структуры общим параметрическим методом, удалось показать, что существует только одно решение. Второе же получается из первого, когда одна из констант, входящих в решение, стремится к нулю [70, с.91].

Так как в решение входит несколько констант, и каждая может стремиться к нулю, то первое решение может сводиться ко второму несколькими способами.

Используя этот результат, Ю.С.Владимиров высказал гипотезу о том, что, например, в случае электрослабых взаимодействий [75, с.61] (структура (5,5;а) наличие этих нескольких (а именно, трех) возможностей приводит к трем поколениям кварков.

Работы в этом направлении продолжаются.

Есть реальные предпосылки к тому, что теория физических структур, представляющая собой особую геометрию, явится важным звеном в цепочке идей по геометризации физики.

Автор приносит свою глубокую благодарность кандидату физ.-мат. наук Г.Г.Михайличенко и особенно научному руководителю доценту Ю.И.Кулакову за многочисленные плодотворные обсуждения и совместную работу; чл.-корр. АН СССР О.А.Ладыженской за интерес к работе и обсуждение результатов; академику АН СССР Ю.Г. Решетняку за полезные замечания и обсуждение; профессору Ю.Г. Косареву за постоянное внимание, редакторскую помощь и многочисленные ценные замечания; профессору Ю.С.Владимирову за стимулирование исследований по четырехмерным пространствам, приложение результатов работы в теории элементарных частиц и большую поддержку в работе; кандидату химических наук Яблонскому Г.С. за полезные замечания и помощь в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ I. ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАНТА I: (Табл.I).

Случай (I.I) (Табл.Ш)

$$[1,2]=k_1(2);\quad [3,1]=k_1(3);\quad [2,3]=k_2(1);$$
$$[1,4]=k_3(4);\quad [5,1]=k_3(5);\quad [4,5]=k_4(1); \qquad (\text{III}.1)$$

где $k_1,\dots,k_4\neq 0.$

Введем обозначения:

$$[2,4]=c_2(2)+c_4(4)+c_6(6);\qquad [2,5]=m_1(1)+\dots+m_6(6);$$
$$[3,4]=n_1(1)+\dots+n_6(6);\qquad [3,5]=t_3(3)+t_5(5)+t_6(6);$$
$$[2,6]=q_2(2)+q_4(4)+q_6(6);\qquad [3,6]=b_3(3)+b_5(5)+b_6(6); \qquad (\text{III}.2)$$
$$[4,6]=g_2(2)+g_4(4)+g_6(6);\qquad [5,6]=e_3(3)+e_5(5)+e_6(6);$$
$$[1,6]=f_1(1)+\dots+f_6(6).$$

Используя (Ш.I), запишем:

$$[1,2,4]=[1,[2,4]]-(k_3+k_1)[2,4]=0;$$
$$[1,2,5]=[1,[2,5]]+(k_3-k_1)[2,5]=0; \qquad (ж)$$
$$[1,3,4]=[1,[3,4]]-(k_3-k_1)[3,4]=0;$$
$$[1,3,5]=[1,[3,5]]+(k_3+k_1)[3,5]=0.$$

Воспользуемся замечанием (3) на с. 85.:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}[1,2]=k_1(2)\\ [1,4]=k_3(4)\end{array}\right\}\longrightarrow [1,6]=f_2(2)+f_4(4)+f_6(6)\\ \left.\begin{array}{l}[1,3]=-k_1(3)\\ [1,5]=-k_3(5)\end{array}\right\}\longrightarrow [1,6]=f_3(3)+f_5(5)+f_6(6)\end{array}\right\}\longrightarrow [1,6]=f_6(6).$$

Подставляя (Ш.2) в (ж) и приравнивая нулю коэффициенты при всех базисных операторах, получим:

$$[1,2,4]:\quad c_2=c_4=0;\quad c_6[f_6-(k_3+k_1)]=0;$$
$$[1,2,5]:\quad m_2=m_5=0;\quad m_1(k_3-k_1)=0;\quad m_3(k_3-2k_1)=0;$$
$$m_4(2k_3-k_1)=0;\quad m_6[f_6+(k_3-k_1)]=0;$$

$[1,3,4]$: $n_3=n_4=0$; $n_1(k_3-k_1)=0$; $n_2(2k_1-k_3)=0$;
$n_5(2k_3-k_1)=0$; $n_6[f_6-(k_3-k_1)]=0$;

$[1,3,5]$: $t_3=t_5=0$; $t_6[f_6+(k_3+k_1)]=0$.

Распишем еще четыре тождества Якоби:

$$[2,3,4]=-n_1k_1(2)+n_5[2,5]+n_6[2,6]-c_6[3,6]-k_2k_3(4)=0;$$

$$[2,3,5]=t_6[2,6]-m_1k_1(3)-m_4[3,4]-m_6[3,6]+k_2k_3(5)=0;$$

$$[2,4,5]=-k_1k_4(2)+m_1k_3(4)+m_3[3,4]-m_6[4,6]+c_6[5,6]=0;$$

$$[3,4,5]=k_1k_4(3)-t_6[4,6]+n_1k_3(5)-n_2[2,5]+n_6[5,6]=0.$$

Если $\underline{n_6=0}$, из $[3,4,5]$: $n_2\neq 0$; в противном случае $k_1k_4(3)=0$, но $k_1k_4\neq 0$.

Из $[1,3,4]$ при $n_2\neq 0\rightarrow 2k_1-k_3=0$; $n_1=n_5=0$. Тогда из $[2,3,4]$: $k_2k_3=0$, но $k_2k_3\neq 0$. Следовательно, $n_6\neq 0$. Аналогично с помощью $[2,3,5]$, $[2,4,5]$ можно доказать, что $m_6\neq 0$. Тогда из $[1,3,4]$, $[1,2,5]$ получаем: $f_6=k_3-k_1=-(k_3-k_1)=0$. То есть $k_3=k_1$. Тогда из $[1,2,5]$ получим $m_3=m_4=0$, из $[1,3,4]$: $n_2=n_5=0$, то есть:

$$[2,5]=m_1(1)+m_6(6); \qquad [3,4]=n_1(1)+n_6(6).$$

Из $[1,2,4]$: $c_6=0$, из $[1,3,5]$: $t_6=0$.

$[2,3,4]$: $n_6[2,6]=n_1k_1(2)+k_1k_2(4)$;

$[2,3,5]$: $m_6[3,6]=-m_1k_1(3)+k_1k_2(5)$;

$[2,4,5]$: $m_6[4,6]=-k_1k_4(2)+m_1k_1(4)$;

$[3,4,5]$: $n_6[5,6]=-k_1k_4(3)-n_1k_1(5)$.

Переходя к операторам $(\bar 2)=(2)/m_6$; $(\bar 3)=(3)/n_6$, окончательно получаем (штрихи опустим):

$$\begin{array}{lll} [1,2]=k_1(2) & [1,4]=k_1(4) & [2,6]=k_1\bar n_1(2)+k_1\bar k_2(4) \\ [3,1]=k_1(3) & [5,1]=k_1(5) & [4,6]=-k_1k_4(2)+k_1\bar m_1(4) \\ [2,3]=\bar k_2(1) & [4,5]=k_4(1) & [2,4]=0 \end{array} \qquad (III.3)$$

$$[3,6] = -\bar{m}_1 k_1 (3) + k_1 \bar{k}_2 (5) \qquad [1,6] = 0$$
$$[5,6] = -k_1 k_4 (3) - k_1 \bar{n}_1 (5) \qquad [2,5] = \bar{m}_1 (1) + (6)$$
$$[3,5] = 0 \qquad [3,4] = \bar{n}_1 (1) + (6), \qquad (III.3)$$

где $\bar{k}_2 = k_2 / m_6 n_6$; $\bar{n}_1 = n_1 / n_6$; $\bar{m}_1 = m_1 / m_6$; $k_1, \bar{k}_2, k_4 \neq 0$.

Случай (I.I) разобран полностью.

Случай (2.2) (Табл.Ш)

$$[1,2] = k_1 (1); \quad [3,1] = k_2 (2); \quad [2,3] = k_1 (3);$$
$$[1,4] = k_3 (1); \quad [5,1] = k_4 (4); \quad [4,5] = k_3 (5);$$

где $k_1, \ldots, k_4 \neq 0$.

Перейдем к операторам $(\bar{2}) = (2)/k_1$; $(\bar{3}) = (3)/k_2$; $(\bar{4}) = (4)/k_3$; $(\bar{5}) = (5)/k_1$ (штрихи опустим):

$$[1,2] = (1); \quad [3,1] = (2); \quad [2,3] = (3); \quad [1,4] = (1); \quad [5,1] = (4); \quad [4,5] = (5).$$

Раскроем тождества Якоби:

$$[1,2,4] = [1,[2,4]] = 0; \quad [1,2,5] = [1,[2,5]] + [2,4] + (4) = 0;$$
$$[1,3,4] = [1,[3,4]] + [2,4] - (2) = 0; \quad [1,3,5] = [1,[3,5]] + [3,4] + [2,5] = 0.$$

Подставляя явный вид коммутаторов из (Ш.2), имеем:

$$[1,2,4]: \quad (c_2 + c_4)(1) + c_6 [1,6] = 0;$$
$$[1,2,5]: \quad (m_2 + m_4)(1) + (c_2 - m_3)(2) + (c_4 - m_5 + 1)(4) + c_6 (6) + m_6 [1,6] = 0; \qquad (III.4)$$
$$[1,3,4]: \quad (n_2 + n_4)(1) + (c_2 - n_3 - 1)(2) + (c_4 - n_5)(4) + c_6 (6) + n_6 [1,6] = 0;$$
$$[1,3,5]: \quad -t_3 (2) - t_5 (4) + t_6 [1,6] + [3,4] + [2,5] = 0.$$

Если $c_6 \neq 0$, то из $[1,2,4]$: $[1,6] = -(1)(c_2 + c_4)/c_6$. Подставляя $[1,6]$ в $[1,3,4]$ получим $c_6 = 0$. То есть $c_6 = 0$;

$$c_2 + c_4 = 0; \quad [2,4] = c_2 ((2) - (4)).$$

Возможны два варианта: $n_6 \neq 0$; $n_6 = 0$.

Вариант $n_6 \neq 0$.

Введем $(\bar{6}) = n_6(6) + n_2(2) + n_4(4)$. При этом все подалгебры сохраняются. Действительно, подалгебры (I,2,3), (I,4,5), (2,4,6) сохраняются. Рассмотрим матрицу (4.2). При введении оператора $(\bar{6})$ меняется только шестая строчка. Соотношение (3.2I) сохраняется, а, следовательно, сохраняется и подалгебра (3,5,6).

Тогда $[3,4] = n_1(1) + n_3(3) + n_5(5) + (\bar{6})$; из $[1,3,4]$:

$$[1,\bar{6}] = (n_3 - c_2 + 1)(2) + (n_5 + c_2)(4)$$

Подставляя полученные соотношения и выражения (Ш.2) в остальные тождества Якоби, после несложных выкладок окончательно получим:

$$\begin{array}{llll} [1,2] = (1) & [1,4] = (1) & [2,6] = 0 & [3,\bar{6}] = 0 \\ [3,1] = (2) & [5,1] = (4) & [4,6] = 0 & [5,\bar{6}] = 0 \\ [2,3] = (3) & [4,5] = (5) & [2,4] = \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{2}(4) & [3,5] = 0 \end{array} \qquad (\text{Ш}.5)$$

$$[1,\bar{6}] = 0; \quad [2,5] = \tfrac{1}{2}(3) + \tfrac{1}{2}(5) - (\bar{6}); \quad [3,4] = -\tfrac{1}{2}(3) - \tfrac{1}{2}(5) + (\bar{6}).$$

Вариант $n_6 = 0$.

Предположим $m_6 \neq 0$. Тогда из $[1,2,5]$ в (Ш.4) получим: $[1,6] = f_1(1) + f_2(2) + f_4(4)$. Подставляя $[1,6]$ в $[1,3,5]$, имеем: $m_6 = 0$. То есть, $m_6 = 0$. Тогда из (Ш.4):

$$\left.\begin{array}{ll} [1,2,5]: & m_2 + m_4 = 0; \quad m_3 - c_2 = 0; \quad m_5 + c_2 - 1 = 0; \\ [1,3,4]: & n_2 + n_4 = 0; \quad n_3 - c_2 + 1 = 0; \quad n_5 + c_2 = 0; \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$m_5 + n_3 = 0; \quad m_3 + n_5 = 0; \quad n_3 + 1 = m_3; \quad m_5 - 1 = n_5.$$

Используя полученные соотношения, из $[2,3,4]$ получим:

$$n_1 = 0; \quad 2n_2 + m_2 = 0.$$

Предположим: $t_6 = 0$. Тогда из $[1,3,5]$:

$t_3 = -t_5$; $m_1 = 0$; $m_3 = -n_3 = m_5 = -n_5 = c_2 = \frac{1}{2}$. Из $[2,3,5]$: $m_2 = n_2 = t_3 = t_5 = 0$. С учетом этих соотношений, имеем:

$$[2,4] = \tfrac{1}{2}(2) - \tfrac{1}{2}(4); \quad [3,4] = -\tfrac{1}{2}(3) - \tfrac{1}{2}(5); \quad [2,5] = \tfrac{1}{2}(3) + \tfrac{1}{2}(5); \quad [3,5] = 0.$$

Перейдем к операторам: $(\bar{2})=(2)-(4)$; $(\bar{3})=(3)-(5)$:

$$\left.\begin{array}{l}[\bar{2},5]=\frac{1}{2}(\bar{3});\\ [3,5]=0\end{array}\right\} \longrightarrow [5,1]=m_1(1). \text{ Но } [5,1]=(4).$$

То есть предположение $t_6=0$ неверно.

Следовательно $t_6\neq 0$. Введем оператор $(\bar{6})=t_6(6)+t_3(3)+t_5(5)$. Как и в случае $n_6\neq 0$ можно показать, что все подалгебры сохраняются. Исследуя тождества Якоби, окончательно находим:

$$\begin{array}{llll} [1,2]=(1) & [1,4]=(1) & [2,6]=-n(2)+(6) & [3,6]=-n(3)\\ [3,1]=(2) & [5,1]=(4) & [4,6]=n(4)+(6) & [5,6]=n(5)\\ [2,3]=(3) & [4,5]=(5) & [2,4]=(2)-(4) & [3,5]=(6) \end{array} \qquad (\text{III}.6)$$

$$[1,6]=-(3)+(5)\ ;\quad [2,5]=-n(1)+(3)\ ;\quad [3,4]=n(1)-(5).$$

Упростим соотношения, перейдя к операторам $(\bar{6})=(6)-n(2)$; $(\bar{4})=(4)-(2)$; $(\bar{5})=(5)-(3)-n(1)$; $(\bar{2})=-(2)$. Получим:

$$\begin{array}{llll} [\bar{2},\bar{4}]=(\bar{4}) & [\bar{2},1]=(1) & [\bar{5},\bar{4}]=-2n(1) & [\bar{5},\bar{6}]=2n(3)\\ [\bar{6},\bar{2}]=(\bar{6}) & [3,\bar{2}]=(3) & [1,\bar{5}]=-(\bar{4}) & [3,\bar{5}]=(\bar{6})\\ [\bar{4},\bar{6}]=-2n(\bar{2}) & [1,3]=(\bar{2}) & [\bar{4},1]=0 & [\bar{6},3]=0 \end{array} \qquad (\text{III}.7)$$

$$[1,\bar{6}]=(\bar{5})\ ;\quad [\bar{2},\bar{5}]=0\ ;\quad [3,\bar{4}]=-(\bar{5}).$$

Обратим внимание на коммутаторы двух первых подалгебр в (III.7). Они по форме точно такие же, как и в случае (I.I) III.3). Но при исследовании случая (I.I) получили единственно возможное решение (III.3). Значит, (III.3) и (III.7) с точностью до переобозначений должны совпадать. Введем в (III.3) операторы:

$$(\bar{2})=(2)-\frac{\bar{m}_1}{K_4}(4);\quad (\bar{3})=(3)+\frac{\bar{n}_1}{K_4}(5).$$

После преобразований получим соотношения, сравнивая которые с (III.7), найдем: $\bar{m}_1+\bar{n}_1=0$. Тогда (III.3) с операторами (2), (3) будут иметь вид (штрихи опустим):

$$[1,2]=K_1(2)\ ;\quad [3,1]=K_1(3)\ ;\quad [2,3]=K_2(1)\ ;$$

$$[1,4]=K_1(4);\quad [5,1]=K_1(5);\quad [4,5]=K_4(1)\ ;$$

$$[2,6] = K_1 K_2 (4);\quad [4,6] = -K_1 K_4 (2);\quad [2,4] = 0;$$
$$[3,6] = K_1 K_2 (5);\quad [5,6] = -K_1 K_4 (3);\quad [3,5] = 0;$$
$$[1,6] = 0;\quad [2,5] = (6);\quad [3,4] = (6). \qquad (Ш.8)$$

Случай I.2 (Табл.Ш).

$$[1,2] = K_1(2) \qquad [1,4] = K_3(1) \qquad [1,2,4] = [1,[2,4]] + K_3(2) - K_1[2,4] = 0$$
$$[3,1] = K_1(3) \qquad [5,1] = K_4(4)$$
$$[2,3] = K_2(1) \qquad [4,5] = K_3(5) \qquad [1,2,5] = [1,[2,5]] + K_4[2,4] - K_1[2,5] = 0.$$

Подставив $[2,4]$ из (Ш.2), получим:

$$C_6[1,6] = -C_4K_3(1) + K_3(2) + C_4K_1(4) + K_1C_6(6).$$

Если $C_6 = 0$, то отсюда: $K_3 = 0$, что не может быть.
То есть $C_6 \neq 0$, и $\quad [1,6] = f_1(1) + f(2) + f_4(4) + f_6(6).$
Подставив $[1,6]$ в $[1,2,5]$ и раскрыв тождество, получим $K_4C_6 = 0$.
Но $K_4C_6 \neq 0$. То есть случай (I.2) решения не имеет.
Аналогичным образом доказывается, что случай (I.3), (2.3) из таблицы Ш не имеют решения.

Случай 4.4 (Табл.Ш).

Проводя аналогичные выкладки, получим:

$$[1,2] = K_1(3) \qquad [1,4] = K_1(5) \qquad [2,6] = -K_2(4) \qquad [3,6] = -K_2(5)$$
$$[3,1] = (2) \qquad [5,1] = (4) \qquad [4,6] = K_3(2) \qquad [5,6] = K_3(3)$$
$$[2,3] = K_2(1) \qquad [4,5] = K_3(1) \qquad [2,4] = K_1(6) \qquad [3,5] = (6)$$
$$[1,6] = [2,5] = [3,4] = 0. \qquad (Ш.9)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ П. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (5,2).

Выпишем некоторые коммутаторы из (5.I); пользуясь таблицей П:

$$[2,3]=\kappa_2(1):\quad -2\sqrt{\kappa_1}\,\psi_1\psi_3+\psi_{1y}\psi_4-\psi_{3y}\psi_2=\kappa_2;$$

$$-\sqrt{\kappa_1}\,(\psi_2\psi_3+\psi_1\psi_4)+\psi_{2y}\psi_4-\psi_{4y}\psi_2=0;$$

$$[4,5]=\bar\kappa_4(1):\quad -2\sqrt{\kappa_1}\,\mu_1\mu_3+\mu_{1z}\mu_4-\mu_{3z}\mu_2=\bar\kappa_4;$$

$$-\sqrt{\kappa_1}\,(\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_4)+\mu_{2z}\mu_4-\mu_{4z}\mu_2=0; \qquad (\text{П2.I})$$

$$[2,4]=0:\quad \psi_{2z}\mu_2=\sqrt{\kappa_1}\,\psi_2\mu_1;\quad \mu_{2y}\psi_2=\sqrt{\kappa_1}\,\mu_2\psi_1;\quad \psi_{1z}\mu_2=\mu_{1y}\psi_2;$$

$$[3,5]=0:\quad -\psi_{4z}\mu_4=\sqrt{\kappa_1}\,\psi_4\mu_3;\quad -\mu_{4y}\psi_4=\sqrt{\kappa_1}\,\mu_4\psi_3;\quad \psi_{3z}\mu_4=\mu_{3y}\psi_4;$$

$$[2,5]-[3,4]=0:\quad -\sqrt{\kappa_1}\,(\psi_4\mu_1+\psi_2\mu_3)+\psi_{2z}\mu_4-\psi_{4z}\mu_2=0;$$

$$\sqrt{\kappa_1}\,(\mu_2\psi_3+\mu_4\psi_1)+\mu_{4y}\psi_2-\mu_{2y}\psi_4=0;$$

$$\sqrt{\kappa_1}\,(\psi_1\mu_3+\psi_3\mu_1)-\psi_{1z}\mu_4+\psi_{3z}\mu_2=0.$$

В первое соотношение из $[2,5]-[3,4]=0$ подставим ψ_{2z} из $[2,4]=0$ и ψ_{4z} из $[3,5]=0$, получим:

$$\left(\frac{\psi_2}{\mu_2}-\frac{\psi_4}{\mu_4}\right)(\mu_1\mu_4-\mu_2\mu_3)=0.$$

Если $\mu_1\mu_4+\mu_2\mu_3=0$, то и $\psi_1\psi_4-\psi_2\psi_3=0$. Но это ведет к потере ранга системы (4.I) (см. (4.I3)), что не допускается. То есть $\psi_4/\psi_2=\mu_4/\mu_2$.

Система (5.2) состоит из двух подсистем вида (3.9) в двумерном случае. С помощью полученных соотношений преобразуем подсистемы так же, как и (3.9) (см. § 3.I). После преобразований получим:

$$\frac{\partial f}{\partial u}E_{1i}(\lambda_{1i}u-\lambda_{1j})+\frac{\partial f}{\partial y_i}=0;\qquad \frac{\partial f}{\partial u}E_{2i}(\lambda_{2i}u-\lambda_{2j})+\frac{\partial f}{\partial z_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}E_{1j}(\lambda_{1j}u-\lambda_{1i})+\frac{\partial f}{\partial y_j}=0;\qquad \frac{\partial f}{\partial u}E_{2j}(\lambda_{2j}u-\lambda_{2i})+\frac{\partial f}{\partial z_j}=0; \qquad (\text{П2.2})$$

где $\quad u=ch\sqrt{\kappa_1}\left[v+\tfrac12\ln(\psi_4/\psi_2)_i-\tfrac12\ln(\psi_4/\psi_2)_j\right];$

$$\lambda_1=(\vartheta_3-\vartheta_1\vartheta_4/\vartheta_2)(\vartheta_4/\vartheta_2)^{-\frac{1}{2}};\quad \lambda_2=(\mu_3-\mu_1\mu_4/\mu_2)(\mu_4/\mu_2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$E_1=\frac{1}{2}(\vartheta_4\vartheta_2)^{-\frac{1}{2}};\qquad E_2=\frac{1}{2}(\mu_4\mu_2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для первого и второго уравнения системы (П2.2) (μ = I; ν = 2) из (3.6) получим:

$$\frac{\partial\lambda_{1i}}{\partial y_i}=E_{1i}(\lambda_{1i}^2+a_1);\qquad \frac{\partial\lambda_{1j}}{\partial y_j}=E_{1j}(\lambda_{1j}^2+a_1). \tag{П2.3}$$

Для $\mu=1;\ \nu=3$: $\dfrac{\partial(E_1\lambda_1)_i}{\partial z_i}=\dfrac{\partial(E_2\lambda_2)_i}{\partial y_i}$;

$$\frac{\partial E_{1i}}{\partial z_i}-E_{1i}E_{2i}\lambda_{2i}=0;\qquad \frac{\partial E_{2i}}{\partial y_i}-E_{1i}E_{2i}\lambda_{1i}=0. \tag{П2.4}$$

Для $\mu=1;\ \nu=4$:

$$\frac{\partial\lambda_{2i}}{\partial y_i}=E_{1i}(\lambda_{1i}\lambda_{2i}+C_1);\qquad \frac{\partial\lambda_{1i}}{\partial z_i}=E_{2i}(\lambda_{1i}\lambda_{2i}+C_1). \tag{П2.5}$$

Для μ = 2; ν = 4: соотношения (П2.4) со значком (j) .
Для μ = 2; ν = 3: соотношения (П2.5), где значок (i) заменяется значком (j) .
Для μ = 3; ν = 4:

$$\frac{\partial\lambda_{2i}}{\partial z_i}=E_{2i}(\lambda_{2i}^2+a_2);\qquad \frac{\partial\lambda_{2j}}{\partial z_j}=E_{2j}(\lambda_{2j}^2+a_2). \tag{П2.6}$$

Если подставить в (П2.4), (П2.5), (П2.6) явные выражения функций $\lambda_1,\lambda_2,E_1,E_2$, то с помощью (П2.I) получим:

$$a_1=-2K_2;\qquad C_1=0;\qquad a_2=-2K_3. \tag{П2.7}$$

Решаем первое уравнение системы (П2.2) методом характеристик. Его интегралы:

$$u\cdot\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}\,dy_i\right)+\lambda_{1j}\int E_{1i}\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}\,dy_i\right)dy_i = C_1;$$

$$y_j = C_2;\quad z_i = C_3;\quad z_j = C_4.$$

Введем переменные $\rho_0 = X_i$; $\rho_1 = C_1$.

Тогда первое уравнение дает $\partial f/\partial\rho_0 = 0$.

Второе уравнение после замены (используем (П2.3)):

$$\frac{\partial f}{\partial\rho_1}\Big\{\lambda_{1j}E_{1j}\rho_1+\Big[q_1\int E_{1i}\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}\,dy_i\right)dy_i -$$

$$-\lambda_{1i}\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}\,dy_i\right)\Big]E_{1j}\Big\}+\frac{\partial f}{\partial y_j}=0.$$

Как и в двумерном случае из (П2.3) получим:

$\lambda_1 = -\sqrt{2K_2}\,th\sqrt{2K_2}\,\hat{y}$, где $\hat{y} = \int E_1\,dy + \theta(z)$; (при $\lambda_1^2 < -2K_2$).

Тогда: $-\int E_1\lambda_1\,dy = \ln ch\sqrt{2K_2}\,\hat{y}$; $\int E_1\exp\left(-\int E_1\lambda_1\,dy\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2K_2}}\,sh\sqrt{2K_2}\,\hat{y}$;

и выражение в квадратных скобках равно нулю. Второе уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho_1}\lambda_{1j}E_{1j}\rho_1+\frac{\partial f}{\partial y_j}=0.$$

Проведем замену в третьем уравнении:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho_1}\Big[E_{2i}(\lambda_{2i}u-\lambda_{2j})\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}\,dy_i\right)-u\cdot\int E_{1i}\lambda_{1i}\,dy_i\,\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}\,dy_i\right)+$$

$$+\lambda_{1j}\int\Big(\frac{\partial E_{1i}}{\partial z_i}-E_{1i}\int\frac{\partial(E_1\lambda_1)_i}{\partial z_i}\,dy_i\Big)\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}\,dy_i\right)dy_i\Big]+\frac{\partial f}{\partial z_i}=0.$$

Из (П2.4) находим:

$$\int\partial(E_1\lambda_1)/\partial z\cdot dy=\int\partial(E_2\lambda_2)/\partial y\cdot dy=E_2\lambda_2-(E_2\lambda_2)(\bar{y},z)=E_2\lambda_2+T_1(z);$$

где $\bar{y} = const$.

Из $\partial E_2/\partial y = E_1\lambda_1 E_2$ получаем: $E_2\exp\left(-\int E_1\lambda_1\,dy\right) = E_2(\bar{y},z) = T_2(z)$.

Используя полученные соотношения, после преобразований имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho_1}\left[T_1(z_i)\,\rho_1+T_2(z_i)\lambda_{2j}\right]-\frac{\partial f}{\partial z_i}=0.$$

И, наконец, четвертое уравнение из (П2.2) после замены переменных имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\left[E_{2j}(\lambda_{2j}u-\lambda_{2i})\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}dy_i\right)+\frac{\partial \lambda_{1j}}{\partial z_j}\int E_{1i}\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}dy_i\right)dy_i\right]+\frac{\partial f}{\partial z_j}=0.$$

Используя соотношение $\partial\lambda_1/\partial z = E_2\lambda_2\lambda_1$ (из (П2.5), (П2.7) при $C_1 = 0$), получим:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\left\{\lambda_{2j}E_{2j}\rho_1+\left[-\lambda_{2i}\exp\left(-\int E_{1i}\lambda_{1i}dy_i\right)\right]E_{2j}\right\}+\frac{\partial f}{\partial z_j}=0.$$

Из (П2.5): $\partial\lambda_2/\lambda_2 = E_1\lambda_1/\partial y$. Отсюда:

$$\lambda_2\exp\left(-\int E_1\lambda_1 dy\right)=\lambda_2(\bar{y},z)=-T_6(z). \qquad (П2.8)$$

Подставляя в уравнение, имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\left[\lambda_{2j}E_{2j}\rho_1+T_6(z_i)E_{2j}\right]+\frac{\partial f}{\partial z_j}=0.$$

Выпишем 2,3,4 уравнения системы (П2.2) после замены:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\lambda_{1j}E_{1j}\rho_1+\frac{\partial f}{\partial y_j}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\left[T_1(z_i)\rho_1+T_2(z_i)\lambda_{2j}\right]-\frac{\partial f}{\partial z_i}=0; \qquad (П2.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\left[\lambda_{2i}E_{2j}\rho_1+T_6(z_i)E_{2j}\right]+\frac{\partial f}{\partial z_j}=0.$$

Решая первое уравнение методом характеристик, найдем интеграл:

$$C_1=\rho_1\cdot\exp\left(-\int E_{1j}\lambda_{1j}dy_j\right).$$

Введем переменные: $\sigma_0 = y_j$; $\sigma_1 = C_1$.

Тогда первое из (П2.9) дает $\partial f/\partial\sigma_0 = 0$.

Используя соотношения (П2.4), (П2.3), второе и третье уравнения из (П2.9) после замены преобразуются к виду:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\left[-T_1(z_i)\sigma_1 + T_2(z_i)T_6(z_i)\right] + \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\left[-T_1(z_i)\sigma_1 + T_2(z_i)T_6(z_i)\right] + \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0. \qquad (\text{П2.10})$$

Решая первое уравнение, найдем интеграл:

$$C_1 = \sigma_1 \exp\left(\int T_1(z_i)dz_i\right) - T_6(z_i)\int T_2(z_i)\exp\left(\int T_1(z_i)dz_i\right)dz_i$$

Проведем последнюю замену: $q_0 = z_i$; $q_1 = C_1$.

Тогда первое из (П2.10) дает $\partial f/\partial q_0 = 0$, а второе

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\left\{\left[-T_1(z_i)\sigma_1 + T_2(z_i)T_6(z_i)\right]\exp\left(\int T_1(z_i)dz_i\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial T_6(z_i)}{\partial z_i}\int T_2(z_i)\exp\left(\int T_1(z_i)dz_i\right)dz_i\right\} + \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0.$$

Напомним, что $T_1(z) = -(E_2\lambda_2)(\bar{y}_1 z)$; $T_2(z) = E_2(\bar{y}_1 z)$; $T_6(z) = -\lambda_2(\bar{y}_1 z)$, где $\bar{y} = const$. Из (П2.6) при $\bar{y} = const$ имеем: $\partial T_6/\partial z = -T_1(z)T_6(z) - a_2 T_2(z)$. Подставляя, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\left\{-T_1(z_i)q_1 + T_2(z_i)\left[-\lambda_2(\bar{y}_1 z)_i \exp\left(-\int E_2(\bar{y}_1 z_i)\lambda_2(\bar{y}_1 z_i)dz_i\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a_2 \int E_2(\bar{y}_2, z_i)\exp\left(-\int E_2(\bar{y}_1 z_i)\lambda_2(\bar{y}_1 z_i)dz_i\right)dz_i\right]\right\} + \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0.$$

Из (П2.6), (П2.7):

$$T_6(z) = -\lambda_2(\bar{y}_1 z) = \sqrt{2K_3}\,\mathrm{th}\sqrt{2K_3}\,\hat{z}; \quad \hat{z} = \int E_2(\bar{y}_1 z)dz + C$$

(при $\lambda_2^2 < 2K_3$). Тогда: $\int T_1(z)dz = -\int(E_2\lambda_2)(\bar{y}_1 z)dz = \ln \mathrm{ch}\sqrt{2K_3}\,\hat{z}$

$$\int T_2(z)\exp\left(-\int(E_2\lambda_2)(\bar{y}_1 z)dz\right)dz = \frac{1}{\sqrt{2K_3}}\,\mathrm{sh}\sqrt{2K_3}\,\hat{z};$$

и выражение в квадратных скобках равно нулю. Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}T_1(z_i)q_1 - \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0.$$

Его интеграл (следовательно, интеграл всей системы (П2.2)) имеет вид: $C = q_1 \exp\left(\int T_1(z_i)dz_i\right)$.

А решение системы (4.I): $f(ij)=\chi(C_1)$, где χ - произвольная функция. Возвращаясь к переменным $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$, получим:

$$C_1=\Big\{ch\sqrt{K_1}(\bar{x}_i-\bar{x}_j)\cdot\exp\Big(-\int E_{1i}\lambda_{1i}dy_i-\int E_{1j}\lambda_{1j}dy_j\Big)+$$
$$+\lambda_{1j}\exp\Big(-\int E_{1i}\lambda_{1i}dy_i\Big)\cdot\int E_{1i}\exp\Big(-\int E_{1i}\lambda_{1i}dy_i\Big)dy_i\Big\}\exp\Big[\int T_1(z_i)dz_i+$$
$$+\int T_1(z_j)dz_j\Big]-T_2(z_j)\exp\Big(\int T_1(z_j)dz_j\Big)\cdot\int T_2(z_i)\exp\Big(\int T_1(z_i)dz_i\Big)dz_i\,.$$

Подставляя полученные выше выражения и используя (П2.7), получим:

$$C_1=ch\sqrt{\bar{K}_3}\,\hat{z}_i\cdot ch\sqrt{\bar{K}_3}\,\hat{z}_j\Big[ch\sqrt{\bar{K}_2}\,\hat{y}_i\cdot ch\sqrt{\bar{K}_2}\,\hat{y}_j\cdot ch\sqrt{K_1}(\bar{x}_i-\bar{x}_j)-$$
$$-sh\sqrt{\bar{K}_2}\,\hat{y}_i\cdot sh\sqrt{\bar{K}_2}\,\hat{y}_j\Big]-sh\sqrt{\bar{K}_3}\,\hat{z}_i\cdot sh\sqrt{\bar{K}_3}\,\hat{z}_j\;; \qquad (\text{П2.II})$$

где $\bar{K}_2=2K_2$; $\bar{K}_3=2K_3$.

ПРИЛОЖЕНИЕ III. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (5.7).

Распишем некоторые коммутаторы из (5.6), пользуясь таблицей II:

$$
\begin{aligned}
&[2,3]=(3): && -\vartheta_1^2-2\vartheta_3+\vartheta_{1y}\vartheta_4-\vartheta_{3y}\vartheta_2=0;\\
& && -\vartheta_1\vartheta_2-\vartheta_4+\vartheta_{2y}\vartheta_4-\vartheta_{4y}\vartheta_2=0;\\
&[4,5]=(5): && -\mu_1^2-2\mu_3+\mu_{1z}\mu_4-\mu_{3z}\mu_2=0;\\
& && -\mu_1\mu_2-\mu_4+\mu_{2z}\mu_4-\mu_{4z}\mu_2=0;\\
&[2,4]=\tfrac{1}{2}(2)-\tfrac{1}{2}(4): && -\mu_{1y}\vartheta_2+\vartheta_{1z}\mu_2+\tfrac{1}{2}\vartheta_1-\tfrac{1}{2}\mu_1=0;\\
& && \vartheta_{2z}\mu_2=\tfrac{1}{2}\vartheta_2;\quad \mu_{2y}\vartheta_2=\tfrac{1}{2}\mu_2;\\
&[3,5]=0: && -\mu_3+\vartheta_3-\mu_{1y}\vartheta_4-\mu_{3y}\vartheta_2+\vartheta_{1z}\mu_4+\mu_2\vartheta_{3z}=0;\\
& && \vartheta_1\mu_3-\mu_1\vartheta_3-\mu_{3y}\vartheta_4+\vartheta_{3z}\mu_4=0;
\end{aligned}
\tag{П3.I}
$$

$$\vartheta_2\mu_1+\mu_4\vartheta_{2z}+\mu_2\vartheta_{4z}=0;\qquad \mu_2\vartheta_1+\mu_{2y}\vartheta_4+\mu_{4y}\vartheta_2=0;$$

$$\vartheta_2\mu_3+\vartheta_{4z}\mu_4=0;\qquad \mu_2\vartheta_3+\mu_{4y}\vartheta_4=0.$$

В системе (5.7) перейдем к переменной

$$u=\sigma+\sigma_{1i}-\sigma_{1j}=\sigma+\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}i-\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}j.$$

Тогда первое уравнение запишется в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left\{\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}i+\frac{\partial(\vartheta_4/\vartheta_2)_i}{\partial y_i}+\frac{\vartheta_{4i}}{\vartheta_{2i}^2}\right]+\frac{1}{\vartheta_{2i}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}u^2+(\lambda_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2)_i-(\lambda_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2)_j}{u}\right\}+\frac{\partial f}{\partial y_i}=0.$$

С помощью коммутатора $[2,3]=(3)$ (соотношения (П3.I)) нетрудно показать, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Из $[3,5]=0$ рассмотрим соотношение: $\mu_2\vartheta_1+\mu_{2y}\vartheta_1+\mu_{4y}\vartheta_2=0$. Подставив сюда $\mu_{2y}=\mu_2/2\vartheta_2$ из $[2,4]$ и $\mu_{4y}=-\mu_2\vartheta_3/\vartheta_4$ из $[3,5]$, получим: $\lambda_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2=0$. Тогда первое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{u}{2\vartheta_{2i}}-\frac{\partial f}{\partial y_i}=0.$$

Аналогично, второе уравнение примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{u}{2\varphi_{2j}}-\frac{\partial f}{\partial y_j}=0.$$

Перейдем к переменной u в третьем уравнении (5.7):

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}{}_i+\frac{\partial\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\right)_i}{\partial z_i}+\frac{1}{\mu_{2i}}\,\frac{-\frac{1}{2}(u-\sigma_{1i}+\sigma_{1j})^2+(u-\sigma_{1i}+\sigma_{1j})\sigma_{2j}+\lambda_{2i}-\lambda_{2j}}{u+(\sigma_2-\sigma_1)_i-(\sigma_2-\sigma_1)_j}\right]+\frac{\partial}{\partial z}$$

Используя [2,4] и [3,5], можно показать, что:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}{}_i+\frac{\partial\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_2}\right)_i}{\partial z_i}=-\frac{1}{2\mu_{2i}}\left(\sigma_{1i}+\sigma_{2i}\right).$$

В коэффициенте при $\partial f/\partial u$ приведем выражение к общему знаменателю. После преобразований числитель дроби будет иметь вид:

$$-\left[u+(\sigma_2-\sigma_1)_i-(\sigma_2-\sigma_1)_j\right]^2+\left[u+(\sigma_2-\sigma_1)_i-(\sigma_2-\sigma_{1j})\right](\sigma_2-\sigma_1)_i+$$
$$+(2\lambda_2-\sigma_2^2)_i-(2\lambda_2-\sigma_2^2)_j.$$

Из [3,5] в (П3.1) рассмотрим соотношение: $\mu_2\varphi_1+\mu_4\varphi_{2z}+\mu_2\varphi_{4z}=0$. Подставив сюда $\varphi_{2z}=\varphi_2/2\mu_2$ из [2,4] и $\varphi_{4z}=-\varphi_2\mu_3/\mu_4$ из [3,5], получим: $2\lambda_2-\sigma_2^2=0$. Окончательно, третье уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{1}{2\mu_{2i}}\left[-u+(\sigma_2-\sigma_1)_j\right]+\frac{\partial f}{\partial z_i}=0.$$

Аналогично, четвертое уравнение после замены запишется в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{1}{2\mu_{2j}}\left[-u-(\sigma_2-\sigma_1)_i\right]+\frac{\partial f}{\partial z_j}=0.$$

Выпишем полученную систему:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{u}{2\varphi_{2i}}-\frac{\partial f}{\partial y_i}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{u}{2\varphi_{2j}}-\frac{\partial f}{\partial y_j}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{1}{2\mu_{2i}}\left[u-(\sigma_2-\sigma_1)_j\right]-\frac{\partial f}{\partial z_i}=0; \qquad \text{(П3.2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{2\mu_{zj}}\left[u+(\sigma_2-\sigma_1)_i\right]-\frac{\partial f}{\partial z_j}=0.$$

Решая первое уравнение, найдем интеграл: $u\cdot\exp\left(\int\frac{dy_i}{2\varphi_{zi}}\right)=C$.
Введем переменные: $\rho_0=y_i$; $\rho_1=C$. Тогда, первое уравнение дает $\partial f/\partial\rho_0=0$. Второе уравнение из (П3.2) после замены:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho_1}\rho_1-\frac{\partial f}{\partial y_j}\cdot 2\varphi_{zj}=0. \qquad \text{(П3.3)}$$

Третье уравнение после замены:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho_1}\left\{\frac{1}{2\mu_{zi}}\left[u-(\sigma_2-\sigma_1)_j\right]\exp\left(\int\frac{dy_i}{2\varphi_{zi}}\right)-u\cdot\int\left(\frac{1}{2\varphi_{zi}}\right)_{z_i}dy_i\,\exp\left(\int\frac{dy_i}{2\varphi_{zi}}\right)\right\}-\frac{\partial f}{\partial z_i}=0.$$

Из $[2,4]$ в (П3.1) находим $\left(1/2\varphi_z\right)_z=\left(1/\mu_z\right)_y$. Отсюда:
$\int\left(\frac{1}{2\varphi_{zi}}\right)_{z_i}dy_i=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_{zi}}-\frac{1}{\mu_z(\bar{y},z_i)}\right)$, где $\bar{y}=const$. Из $[2,4]$:
$1/2\varphi_z=\mu_{zy}/\mu_z$. Тогда: $(2\mu_z)^{-1}\cdot\exp\left(\int\frac{dy}{2\varphi_z}\right)=\left[2\mu_z(z)\right]^{-1}$.
Подставив полученные выражения в уравнение, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho_1}\cdot\frac{1}{2\mu_z(z_i)}\left[\rho_1-(\sigma_2-\sigma_1)_j\right]-\frac{\partial f}{\partial z_i}=0. \qquad \text{(П3.4)}$$

Аналогично, четвертое уравнение из (П3.2) после замены:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho_1}\,\frac{1}{2\mu_{zj}}\left[\rho_1+(\sigma_2-\sigma_1)_i\exp\left(\int\frac{dy_i}{2\varphi_{zi}}\right)\right]-\frac{\partial f}{\partial z_j}=0. \qquad \text{(П3.5)}$$

Решаем (П3.3). Его интеграл: $\rho_1\cdot\exp\left(\int\frac{dy_i}{2\varphi_{zi}}\right)=C_1$.
Введем переменные: $q_0=y_j$; $q_1=C_1$.
Тогда (П3.3) дает: $\partial f/\partial q_0=0$. (П3.4) после замены:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\left[\rho_1-(\sigma_2-\sigma_1)_j\right]e^{\int\frac{dy_j}{2\varphi_{zj}}}-\frac{\partial f}{\partial z_i}2\mu_z(z_i)=0.$$

Рассмотрим выражение $(\sigma_2-\sigma_1)\exp\left(\int\frac{dy}{2\varphi_z}\right)=\sigma_0$. С помощью коммутаторов $[2,3]$, $[2,4]$, $[3,5]$ можно показать, что оно зависит только от переменной z. Тогда (П3.4) запишется в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\left[q_1-\sigma_0(z_i)\right]-\frac{\partial f}{\partial z_i}2\mu_2(z_i)=0\,.$$

Аналогично (П3.5) примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\left[q_1+\sigma_0(z_i)\right]-\frac{\partial f}{\partial z_j}2\mu_2(z_j)=0. \qquad \text{(П3.6)}$$

Решаем первое из этих двух уравнений.
Его интеграл: $\left[q_1-\sigma_0(z_j)\right]\exp\left(\int\frac{dz_i}{2\mu_2(z_i)}\right)=C$.
Введем переменные $\xi_0=z_i$; $\xi_1=C$. Тогда первое дает $\partial f/\partial\xi_0=0$, а второе:

$$\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\left\{\left[q_1+\sigma_0(z_i)\right]\exp\left(\int\frac{dz_i}{2\mu_2(z_i)}\right)+2\mu_2(z_j)\cdot\frac{\partial\sigma_0(z_j)}{\partial z_j}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(\int\frac{dz_i}{2\mu_2(z_i)}\right)\right\}-\frac{\partial f}{\partial z_j}2\mu_2(z_j)=0.$$

С помощью коммутаторов $[2,4]$, $[3,5]$ (соотношения (П3.I) можно показать, что: $\partial\sigma_0(z)/\partial z=-\sigma_0(z)/2\mu_2(z)$.
Откуда: $\sigma_0(z)\exp\left(\int dz/2\mu_2(z)\right)=const=C_1$. (П3.7)
где $C_1=const$. Подставляя в уравнение, после преобразований получим:

$$\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\left[\xi_1+C_1\right]-\frac{\partial f}{\partial z_j}2\mu_2(z_j)=0.$$

Интеграл последнего уравнения, а, следовательно, и всей системы (4.I), имеет вид:

$$C_i=(\xi+C_1)\exp\left(\frac{dz_j}{2\mu_2(z_j)}\right).$$

Вернемся к переменным $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$:

$$C_i=(x_i-x_j)\exp\left[\int\frac{dy_i}{2\vartheta_{2i}}+\int\frac{dy_j}{2\vartheta_{2j}}+\int\frac{dz_i}{2\mu_2(z_i)}+\int\frac{dz_j}{2\mu_2(z_j)}\right]-$$

$$-\sigma_0(z_j)\exp\int\frac{dz_j}{2\mu_z(z_j)}\cdot\exp\int\frac{dz_i}{2\mu_z(z_i)}+c_1\exp\int\frac{dz_j}{2\mu_z(z_j)}.$$

Учитывая (П3.7), окончательно получим:

$$C=(\bar{x}_i-\bar{x}_j)\,\bar{y}_i\,\bar{y}_j+\bar{z}_i-\bar{z}_j; \qquad (\text{П}3.8)$$

где $\bar{x}=-x+\vartheta_4/\vartheta_2$; $\bar{y}=\exp\left[\int\frac{dy}{2\vartheta_2}+\int\frac{dz}{2\mu_z}\right]$; $\bar{z}=-c_1\exp\left(\int\frac{dz}{2\mu_z}\right)$.

Общее решение системы :

$f(i_j)=\chi(C)$, где χ - произвольная функция.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. - М.: Наука, 1970. - с.8.
2. Райдер Л. Элементарные частицы и симметрия. - М.: Наука, 1983.
3. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в 4-х т. М.: Наука, 1967. - т.4. - с.280.
4. Шахов В.П., Ускеев С.Ш. О путях формализации законов физики. //Сборник "Вопросы кибернетики". - М., 1982. - с.136.
5. Проблемы Гильберта //Сб. под ред. Александрова П.С. - М., 1969. - с.360.
6. Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. - М.: Наука, 1989. - с.15.
7. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии //Об основаниях геометрии: Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. - М.: ГИТТЛ, 1956. - с.309-341.
8. Эйнштейн А. Собрание научных трудов: в 4-х т. - М.: Наука, 1966. - т.2. - 181 с.
9. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. - М.: Мир, 1979. - с.34.
10. Клиффорд В. Здравый смысл точных наук. - М., 1910.
11. Уилер Дж. Предвидение Эйнштейна. - М.: Мир, 1970.
12. Уилер Дж., Мизнер Ч., Торн К. Гравитация. - М.: Наука, 1977.
13. Мах Э. Познание и заблуждение. М., 1909.
14. Мах Э. Время и пространство. //Новые идеи в математике. СПб.: Образование, 1913, № 2.
15. Лоренц Г.А., Пуанкаре А., Эйнштейн А., Минковский Г. Принцип относительности. //Сборник работ классиков релятивизма. - Л., 1935.

16. Принцип относительности. //Сборник работ по специальной теории относительности. - М.: Атомиздат, 1973 г.
17. Паули В. Теория относительности. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947.
18. Эйнштейн А. Собрание научных трудов: в 4-х т. - М.: Наука, 1965. - с.530-600.
19. Бергман П.Г. Введение в теорию относительности. - М.: ИЛ, 1947.
20. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г.А. Гравитация. - Киев.: Наук. думка, 1985.
21. Дирак П.А.М. Общая теория относительности. - М.: Атомиздат, 1978.
22. Федоров Ф.И. Проективные операторы в теории элементарных частиц. //ЖЭТФ. - 1958. - т.35, вып.2. - с.493-500.
23. Федоров Ф.И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля. //Докл. АН СССР. - 1968. - т.179, № 4. - с.802-805.
24. Федоров Ф.И. Матричная форма уравнений Эйнштейна для гравитационного поля. //Классическая и квантовая теория гравитации. - Минск, 1976. - с.15-20.
25. Федоров В.И., Бабичев Л.Ф., Кувшинов В.И. Универсальные нелинейные уравнения первого порядка в скалярной электродинамике, теории гравитации, Весса-Зумино, калибровочной суперсимметрии. //Современные проблемы общей теории относительности. - Минск, 1979. - с.125-143.
26. Федоров Ф.И., Бабичев Л.Ф., Кувшинов В.И. Лагранжев формализм для уравнений первого порядка в теории калибровочной суперсимметрии. //Докл. АН СССР. - 1980. - т.253, № 5. - с.1088-1091.
27. Владимиров Ю.С., Мицкевич Н.В., Хорски Я. Пространство, время, гравитация. - М.: Наука, 1984. - с.188.

28. An introduction to Kaluza-Klein theory. Ed. H.C.Lee. Singapore, World Scientific, 1982.

29. Сингер А. Дифференциальная геометрия, расслоенные пространства и физические теории. //Физика за рубежом. - М.: Мир, 1983, - с.8.

30. Марков М.А. О единстве и многообразии форм материи в физической картине мира. //Наука и жизнь. - М.: Наука, 1982. № 7. - с.9.

31. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск, 1968. - 226 с.

32. Кулаков Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. //Докл. АН СССР. - 1970. - т.193, № 1. - с.73-75.

33. Кулаков Ю.И. О новом виде симметрии, лежащей в основании теорий феноменологического типа. //Докл. АН СССР. - 1971. - т.201, № 3. - с.570-572.

34. Кулаков Ю.И. Теория физических структур как абстрактная физическая теория. //В кн.: Системный метод и современная наука. - Новосибирск, 1971, выпуск 1. - с.92-102.

35. Kulakov Y.I., Protasiewicz T.I. Phenomenological Symmetry and the Foundations of Physics. - Abstracts IV Int. Congress of Logical, Methodology and Philosophy of Science. Romania. Buharest, 1971.

36. Кулаков Ю.И. Основные положения теории физических структур // Teorie a Metoda . - Прага, 1972. - т.4, № 1. - с.85-90.

37. Kulakov Y.I., Protasiewicz T.I. Phenomenological Symmetry and the Foundations of Physics // Int. Logical Review. - Italy, 1973, N 7. - P.98-101.

38. Kulakov Y.I. Theorie der Physikalishen Structuren und Das 6 Problem von Hilbert. //Abstracts V Int. Congress of Logical, Methodology and Philosophy of Science. Ontario, Canada, 1975.

39. Kulakov Yu.I. On the unified physical image of nature // Abstracts VIII Int. Congress of Logical, Methodology and Philosophy of Science. - Moscow, 1987. - V.2. - P.63-66.

40. Kulakov Yu.I. Physical structure as a new level of physics. - Mathematical reality // Abstracts XIII Int. Wittgenstein Symposium. - Kirchberg am Wechsel. Osterreich., 1988. - P.43.

41. Кулаков Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур. //Сиб.мат.журнал, 1971. - т.XII, № 5. - с.1142.

42. Михайличенко Г.Г. Методы решения некоторых уравнений теории физических структур. //Вопросы теории и методики преподавания физики, (научные труды, выпуск 71). - Новосибирск, НГПИ, 1971. - с.3-12.

43. Кулаков Ю.И. Основания физики как математическая теория инвариантов. //Методологический анализ теоретических и экспериментальных оснований физики гравитации. - Киев: Наукова думка, 1973. - с.227-234.

44. Бирюков Б.В., Кулаков Ю.И., Новик И.Б. "Физикалистский" и теоретико-системный аспекты кибернетики. //Управление, информация, интеллект. (Под ред. Берга А.И.) - М.: Мысль, 1976. - с.43-70.

45. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. //Докл. АН СССР. - 1972. - т.206, № 5. - с.1056-1058.

46. Михайличенко Г.Г. Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными. //Укр. мат. журнал, 1973. - т.25, № 5. - с.589-598.

47. Михайличенко Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2). //Сиб. мат. журнал, 1973. - т.14, № 5. - с.1057-1064.

48. Михайличенко Г.Г. Об одной задаче в теории физических структур. //Сиб. мат. журнал, 1977. - т.18, № 6. - с.1342-1355.

49. Михайличенко Г.Г. Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона: Автореф. дис. канд. физ.-мат.наук: 01.01.01; 01.04.02. - Новосибирск, 1973. - 14 с.

50. Кулаков Ю.И. О физических структурах. - Киев, 1971. - 24 с. - (Препринт/АН УССР; 71-19).

51. Кулаков Ю.И. Основания физики как математическая теория инвариантов. //Тезисы Ш Всесоюзного симпозиума по философским вопросам релятивистской физики и космологии. - Киев, 1970.

52. Овчинников Н.Ф. К проблеме единства физического знания. // Природа. - 1971, № 2. - с.106-110.

53. Кулаков Ю.И. Ньютоновская механика с точки зрения теории физических структур. //Teorie a Metoda . - Прага, 1972. - т.4, № 3. - с.59-78.

54. Кулаков Ю.И. О возможности сведения законов физики к законам геометрии. //Классическая и квантовая теория гравитации. - Минск, 1976. - с.59-60.

55. Кулаков Ю.И. К теории физических структур. //Принципы симметрии. - М.: Наука, 1978. - с.141-152.

56. Кулаков Ю.И. К вопросу обоснования теории тяготения. //Тезисы докладов Ш советской гравитационной конференции. - Ереван, 1972. - с.85-88.

57. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур. //Докл. АН СССР. - 1970. - т.193, № 5. - с.985-987.

58. Кулаков Ю.И. Структура и единая физическая картина мира. //Вопросы философии. - 1975, № 2. - с.15-26.

59. Кулаков Ю.И. Теория физических структур и Шестая проблема Гильберта. //Системный метод и современная наука. - Новосибирск, 1976. - с.156-161.

60. Михайличенко Г.Г. Физические структуры. //Некоторые вопросы квантовой теории поля, нелинейной оптики и молекулярных взаимодействий. //Научные труды, выпуск 86. - Новосибирск, НГПИ, 1973. - с.18-26.

61. Кулаков Ю.И. О необходимости новой постановки проблемы в теоретической физике. //Физическая теория, философско-методологический анализ. - М.: Наука, 1980. - с.192-209.

62. Кулаков Ю.И. О теории физических структур. //Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. /Записки научных семинаров ЛОМИ. - Л.: Наука, 1983. - т.127, вып.15. - с.103-151.

63. Кулаков Ю.И. К вопросу об общей теории физических структур. //Тезисы докладов на Всесоюзном симпозиуме по теории познания. - М., Физический институт АН СССР, 1970. - с.58-60.

64. Михайличенко Г.Г. Понятие массы. //Некоторые вопросы теоретической физики (Научные труды, выпуск 79). - Новосибирск, НГПИ, 1973. - с.4-11.

65. Кулаков Ю.И. Время как физическая структура. //Моделирование и прогнозирование в экологии. /Межвузовский сборник научных трудов. - Рига, Латв.Гос.унив., 1980. - с.23-43.

66. Кулаков Ю.И., Сычева Л.С. Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике./Исследовательские программы в современной науке. - Новосибирск, 1987. - с.99-120.

67. Кулаков Ю.И. Время как физическая структура. //Развитие учения о времени в геологии. - Киев: Наукова Думка, 1982. - с.126-150.

68. Кулаков Ю.И. Теория размерности физических величин. I. // Моделирование в пленочной электромеханике. - Новосибирск, 1985. - Вып.110: Вычислительные системы. - с.52-88.

69. Кулаков Ю.И. Теория размерности физических величин.II. // Машинный анализ сложных структур. - Новосибирск, 1986. - Вып. 118: Вычислительные системы. - с.5-28.

70. Кулаков Ю.И. Естественная таблица химических элементов. // Структурный анализ символьных последовательностей. - Новосибирск, 1984. - Вып. 101: Вычислительные системы. - с.89--91.

71. Byakov V.M., Kulakov Y.I., Rumer Y.B., Fet A.I. Group-Theoretical Classification of Chemical Elements. - (Препринт ИТЭР, ч.I,II, 1976; ч.III, 1977).

72. Жирмунский А.В., Кузьмин В.И. Критические уровни в процессах развития биологических систем. - М.: Наука, 1982.

73. Жирмунский А.В., Кузьмин В.И. Модель критических уровней развития систем. - Владивосток, 1986. - 45 с. - (Препринт/ АН СССР. ДВНЦ. Институт биологии моря; № 17).

74. Румер Ю.Б. Спинорный анализ. - М., - Л., 1936.

75. Владимиров Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3.3). //Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. - Новосибирск, 1988. - Вып.125: Вычислительные системы. - с.42-61.

76. Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю. Теория прямого межчастичного взаимодействия. - М.: Энергоатомиздат, 1986. - 134 с.

77. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. - В кн.: Ю.И.Кулаков. Элементы теории физических структур. - Новосибирск. 1968. - с.175-226.

78. Mikhaylitchenko G.G. Géométries á deux dimensions dane la théorie de structures physiques. - C.R. Acad. Sci., Paris, 1981. - t.293. - Serie 1-529.

79. Михайличенко Г.Г. Групповая и феноменологическая симметрия в геометрии. - Новосибирск, НГПИ, 1981. - 16 с.

80. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии. //Докл. АН СССР. - 1983. - т.269, № 2. - с.284-288.

81. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрия в геометрии двух множеств. //Докл. АН СССР. - 1985. - т.284, № 1. - с.39-43.

82. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметрии в геометрии. //Сиб.мат.журнал, 1984. - т.25, № 5. - с.99-113.

83. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости. //Сиб.мат.журнал, 1982. - т.23, № 5. - с.132-141.

84. Михайличенко Г.Г. Метрика плоской геометрии как двухточечный инвариант. /Ред. журн. "Сиб.мат.журнал". - Новосибирск, 1985, № 5. - с.198.

85. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. //Докл. АН СССР. - 1981. - т.260, № 4. - с.803-805.

86. Blumental L.M. Theory and application of distance geometry. - Oxford, 1953.

87. Фок В.А. Принципиальное значение приближенных методов в теоретической физике. //Успехи физических наук. - 1936. - т.16, № 8. - с.1070-1083.

88. Фридрикс К.О. Асимптотические явления в математической физике. //Математика. - 1952, № 2. - 89.

89. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. - М.: И.Л., 1947. - с.16.

90. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М., 1963. - с.73.

91. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. - М.: Наука, 1966. - с.61.

92. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. - ОНТИ, 1934. - с.60.

93. Постников М.М. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1988. - с.22.

94. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука, 1986. - с.197.

95. Хамермеш М. Теория групп и ее приложение к физическим проблемам. - М., Мир, 1966. - с.359.

96. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М., 1958. - с.215.

97. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства - времени и объединение взаимодействий. - М.: Изд. МГУ, 1987.

98. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. - М.: Наука, 1982.

99. ХелгассонС. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. - М.: Мир, 1964.

100. Thurston W. The geometry and topology of 3-manifolds. - Princeton, 1978.

101. Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. - М.: Мир, 1986. - с.132.

102. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. - М.: Наука, 1979.

103. Ковариантные методы в теоретической физике; физика элементарных частиц и теория относительности: Сб. научн. тр. /АН БССР. Ин-т физики. - Минск, 1981. - 160 с.

104. Федоров Ф.И. Ковариантное вычисление матричных элементов. //Изв. вузов. Физика. - 1980, вып.2. - с.32-45.