Груда и группа как физическая структура

А.Н. Бородин

Хорошо известно [1], что *грудой* называется алгебра G с тернарной операцией $\varphi : G^3 \to G$, удовлетворяющей следующим тождествам:

$$\varphi(\varphi(x,y,z),u,v) = \varphi(x,\varphi(u,z,y),v) = \varphi(x,y,\varphi(z,u,v)), \qquad (1)$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \qquad (2)$$

Если имеют место только тождества (1), то алгебра G называется *полугрудой*. Ее элемент e называется *биунитарным*, если для него выполняется тождество $\varphi(x,e,e) = \varphi(e,e,x) = x$. Таким образом, в груде каждый элемент биунитарен.

В тождествах (1) обращает на себя внимание среднее звено, в котором происходит перестановка второго и четвертого элементов кортежа $< xyzuv >$, что кажется не совсем естественным. С другой стороны, в их правом звене исходный порядок элементов этого кортежа сохраняется. Оказывается, среднее звено тождеств (1) в определении груды может быть опущено.

Лемма 1. *Тождества* (1), (2)*, которым удовлетворяет тернарная операция* φ*, эквивалентны тождествам*

$$\varphi(\varphi(x,y,z),u,v) = \varphi(x,y,\varphi(z,u,v)), \qquad (3)$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \qquad (4)$$

Ясно, что тождества (3), (4) содержатся в тождествах (1), (2) и потому следуют из них. Докажем следование в обратном порядке. Сначала, исходя из более простых тождеств (3), (4), установим не совсем очевидное соотношение: $\varphi(\varphi(x,y,z),u,\varphi(u,z,y)) = x$. Действительно: $\varphi(\varphi(x,y,z),u,\varphi(u,z,y)) = \varphi(\varphi(\varphi(x,y,z),u,u),z,y) = \varphi(\varphi(x,y,z),z,y) = \varphi(x,y,\varphi(z,z,y)) = \varphi(x,y,y) = x$. Далее, опираясь на только что установленное соотношение, будем преобразовывать среднее звено тождеств (1): $\varphi(x,\varphi(u,z,y),v) = \varphi(\varphi(\varphi(x,y,z),u,\varphi(u,z,y)),\varphi(u,z,y),v)$

$= \varphi(\varphi(x,y,z),u,\varphi(\varphi(u,z,y),\ \varphi(u,z,y),v)) = \varphi(\varphi(x,y,z),u,v)$. Таким образом, первое из двух тождеств (1), а именно, равенство левого и среднего звеньев, является следствием тождеств (3), (4). Второе же, то есть равенство левого и правого звеньев, просто совпадает с тождеством (3). Совпадают также тождества (2) и (4), что и завершает доказательство леммы 1.

Определение 1. Алгебра G с тернарной операцией φ называется *грудой*, если эта операция удовлетворяет тождествам (3),(4).

Из леммы 1 следует, что определение груды тождествами (1),(2) по лекциям А.Г.Куроша [1], о чем говорилось в начале Приложения, эквивалентно ее определению тождествами (3),(4).

Лемма 2. *Тождества* $(3),(4)$*, которым удовлетворяет тернарная операция* φ*, эквивалентны тождествам*

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,s),s,z) = \varphi(x,s,\varphi(s,y,z)), \tag{5}$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \tag{6}$$

Запишем тождество (3) для двух кортежей $< xyssz >$ и $< xssyz >$ соответственно, используя также тождества (4): $\varphi(\varphi(x,y,s),s,z) = \varphi(x,y,\varphi(s,s,z)) = \varphi(x,y,z)$ и $\varphi(x,s,\varphi(s,y,z)) = \varphi(\varphi(x,s,s),y,z) = \varphi(x,y,z)$, то есть получаем тождества (5), которые, таким образом, следуют из тождеств (3),(4). С другой стороны, исходя из тождеств (5),(6), очевидно, имеем: $\varphi(\varphi(x,y,z),u,v) = \varphi(\varphi(x,y,z),z,\varphi(z,u,v)) = \varphi(x,y,\varphi(z,z,\varphi(z,u,v))) = \varphi(x,y,\varphi(z,u,v))$. Поскольку при этом совпадают тождества (4) и (6), лемма 2 доказана.

Определение 2. Алгебра G с тернарной операцией φ называется *грудой*, если эта операция удовлетворяет тождествам (5),(6).

Лемма 3. *Определение* 1 *и определение* 2 *груды, как алгебры* G *с тернарной операцией* φ*, удовлетворяющей тождествам* $(3),(4)$ *и тождествам* $(5),(6)$ *соответственно, эквивалентны.*

Лемма 3 является прямым следствием леммы 2, устанавливающей эквивалентность тождеств (3), (4) и (5), (6), входящих в определения 1 и 2 груды, соответственно.

Определение груды тождествами (5), (6) имеет существенное преимущество по следующей причине: оказывается, что эти тождества есть прямое следствие принципа феноменологической симметрии в теории физических структур [2]. Главной задачей этой теории, в формулировке ее автора Ю.И.Кулакова, является исследование и обоснование строения физических законов. Возникающие из принципа феноменологической симметрии тождества (5), (6) фактически представляют собой функциональные уравнения относительно тернарной операции φ. Перейдем к определению простейшей физической структуры минимального ранга (2,2).

Пусть имеются три множества $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и G произвольной природы, причем элементы первых двух, а именно $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно. Пусть имеется также функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to G$, сопоставляющая каждой паре $< i\alpha >$ из прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторый элемент $f(i\alpha)$ из множества G. В отношении функции f будем предполагать выполнение следующего условия:

A. Для любых элементов $\beta \in \mathfrak{N}$ и $j \in \mathfrak{M}$ частичные отображения $\mathfrak{M} \times \{\beta\} \to G$ и $\{j\} \times \mathfrak{N} \to G$ соответственно сюръективны, то есть являются отображениями *на* множество G.

Иными словами для произвольного элемента $g \in G$ уравнения $f(i\beta) = g$ и $f(j\alpha) = g$ имеют решения относительно $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, причем элементы $\beta \in \mathfrak{N}$ и $j \in \mathfrak{M}$ тоже произвольные.

Введем еще функцию $F : \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \to G^4$, сопоставляя четырехточечному кортежу $< ij, \alpha\beta >$ из $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ кортеж $< f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta) >$ длины четыре из G^4, элементы которого есть образы всех возможных пар $< i\alpha >, < i\beta >, < j\alpha >, < j\beta >$, упорядоченные по исходному кортежу.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to G$, удовлетворяющая условию **A**, задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *физическую структуру ранга* (2,2), если существует такая тернарная алгебраическая операция $\varphi : G^3 \to G$, что для всех четверок $< ij, \alpha\beta >$ выполняется следующее соотношение:

$$f(i\alpha) = \varphi(f(i\beta), f(j\beta), f(j\alpha)). \tag{7}$$

Соотношение (7), справедливое для любого кортежа $< ij, \alpha\beta > \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$, составляет содержание *принципа феноменологической симметрии* в теории физических структур. Согласно этому принципу образ прямого произведения $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ в G^4 при отображении F не совпадает со всем G^4, а является его некоторым подмножеством. В свою очередь, соотношение (7) налагает на исходную функцию f достаточно сильное ограничение, так как не для всякой такой функции найдется тернарная операция φ, выражающая это соотношение.

Теорема 1. *Тернарная алгебраическая операция φ из определения 3 физической структуры ранга $(2,2)$, устанавливающая феноменологически симметричное соотношение (7), задает на множестве G груду.*

Положим в соотношении (7) $i = j: \ f(i\alpha) = \varphi(f(i\beta), f(i\beta), f(i\alpha))$ и $\alpha = \beta: \ f(i\alpha) = \varphi(f(i\alpha), f(j\alpha), f(j\alpha))$. В соответствии с условием **A** пары переменных $f(i\alpha), f(i\beta)$ и $f(i\alpha), f(j\alpha)$ независимы. Вводя для них обозначение $x = f(i\alpha), \ y = f(i\beta)$ в первом случае и $x = f(i\alpha), \ y = f(j\alpha)$ – во втором, получаем тождества (6). Для получения же основных тождеств (5) в определении 2 груды возьмем в множестве $\mathfrak{M}$ дополнительно к паре $< ij >$ третий элемент k и запишем соотношение (7) еще для других двух кортежей $< ik, \alpha\beta >$ и $< jk, \alpha\beta >$:

$$\left.\begin{array}{l} f(i\alpha) = \varphi(f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha)), \\ f(j\alpha) = \varphi(f(j\beta), f(k\beta), f(k\alpha)). \end{array}\right\} \qquad (7')$$

Из трех соотношений $(7), (7')$ легко устанавливаем равенство

$$\varphi(f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha)) = \varphi(f(i\beta), f(j\beta), \varphi(f(j\beta), f(k\beta), f(k\alpha))),$$

с независимыми по условию **A** переменными $f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha), f(j\beta)$. Вводя для них обозначение $x = f(i\beta), \ y = f(k\beta), \ z = f(k\alpha), \ s = f(j\beta)$, получаем вторoе из двух тождеств (5). Первое же из тождеств (5) получим аналогично, беря дополнительно к паре $< \alpha\beta >$ третий элемент γ из множества $\mathfrak{N}$. Запишем соотношение (7) еще для других двух кортежей $< ij, \alpha\gamma >$ и $< ij, \beta\gamma >$:

$$\left.\begin{array}{l} f(i\alpha) = \varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha)), \\ f(i\beta) = \varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\beta)). \end{array}\right\} \qquad (7'')$$

Из трех соотношений $(7), (7'')$ следует равенство

$$\varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha)) = \varphi(\varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\beta)), f(j\beta), f(j\alpha)),$$

с независимыми по условию **A** переменными $f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha), f(j\beta)$. Вводя для них обозначение $x = f(i\gamma),\ y = f(j\gamma),\ z = f(j\alpha),\ s = f(j\beta)$, приходим к первому из тождеств (5). Таким образом, установлены все тождества (5),(6), входящие в определение 2 груды, что и завершает доказательство теоремы 1.

Обратим теперь внимание на различную роль тождеств (5) и (6) в определении 2 груды. Первые из них явно основополагающие, имеющие характер функциональных уравнений, определяющих груду, вторые же отражают частные ее свойства. Поэтому имеет смысл в новом определении груды сохранить тождества (5), а тождества (6) заменить некоторым более естественным усдовием, налагаемым на тернарную операцию φ. Это условие можно плучить из того же феноменологически симметричного соотношения (7) для физической структуры ранга (2,2).

Лемма 4. *Тернарная алгебраическая операция* φ *из определения* 3 *физической структуры ранга* $(2,2)$ *удовлетворяет следующему необходимому условию:*

B. *Для любых двух элементов* $q, h \in G$ *частичные отображения* $x \mapsto \varphi(x,q,h),\ x \mapsto \varphi(q,x,h),\ x \mapsto \varphi(q,h,x)$ *сюръективны.*

Рассмотрим сначала первое отображение $x \mapsto \varphi(x,q,h)$. По условию **A** найдется такая пара $< j\alpha >$, для которой $f(j\alpha) = h$. Далее, по тому же условию **A** для точек $j \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ предыдущей пары найдутся такие точки $i \in \mathfrak{M}$ и $\beta \in \mathfrak{N}$, для которых $f(j\beta) = q$ и $f(i\alpha) = p$, где p – произвольный элемент из G. Но тогда, полагая $x = f(i\beta)$, по соотношению (7) получаем $p = \varphi(x,q,h)$. То есть у произвольного элемента $p \in G$ при частичном отображении $x \mapsto \varphi(x,q,h)$ имеется хотя бы один прообраз, что и доказывает сюръективность этого отображения. Сюръективность оставшихся частичных отображений $x \mapsto \varphi(q,x,h)$ и $x \mapsto \varphi(q,h,x)$ устанавливается совершенно аналогично. Лемма 4 доказана.

Условие **B** имеет более привычную для алгебраистов эквивалентную форму:

B′. Для любых трех элементов p, q, h из множества G каждое из уравнений $p = \varphi(x,q,h),\ p = \varphi(q,x,h)$ и $p = \varphi(q,h,x)$ имеет решение относительно x.

Заменим не совсем естественные тождества (6) в определении (2) груды более естественным условием $\mathbf{B}$, которое также является следствием феноменологической симметрии.

Определение 4. Алгебра G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей условию $\mathbf{B}$ (или эквивалентному ему условию $\mathbf{B}'$), называется грудой, если для нее выполняются следующие два тождества:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x,y,z)=\varphi(\varphi(x,y,s),s,z),\\ \varphi(x,y,z)=\varphi(x,s,\varphi(s,y,z)).\end{array}\right\} \tag{8}$$

Лемма 5. *Определение 2 и определение 4 груды как алгебры G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей четырем тождествам (5),(6) или при условии $\mathbf{B}$ двум тождествам (8) соответственно, эквивалентны.*

Тождества (5) и (8) совпадают, поэтому сначала из условия $\mathbf{B}$ и тождеств (8) получим тождества (6). Запишем первое из тождеств (8) для кортежа $< xyyy >$, а второе для кортежа $< yyxy >$: $\varphi(x,y,y)=\varphi(\varphi(x,y,y),y,y)$, $\varphi(y,y,x)=\varphi(y,y,\varphi(y,y,x))$. По условию $\mathbf{B}$ отображения $x\mapsto\varphi(x,y,y)$ и $x\mapsto\varphi(y,y,x)$ сюръективны. Введя соответствующие переобозначения элементов $\varphi(x,y,y)$ и $\varphi(y,y,x)$ из G, получаем тождества (6). Покажем теперь, что условие $\mathbf{B}$ есть следствие тождеств (5),(6). Предположим противное, то есть что найдутся такие три элемента p,q,h из множества G, что одно из трех уравнений условия $\mathbf{B}'$ не имеет решения. Без ограничения общности доказательства предположим, что не имеет решения уравнение $p=\varphi(x,q,h)$. Запишем первое из тождеств (5) для кортежа $< phhq >$: $\varphi(p,h,h)=\varphi(\varphi(p,h,q),q,h)$, откуда, используя одно из тождеств (6), получаем: $p=\varphi(\varphi(p,h,q),q,h)$. Таким образом, уравнение $p=\varphi(x,q,h)$ имеет решение $x=\varphi(p,h,q)$, что противоречит сделанному предположению. Два других уравнения из условия $\mathbf{B}'$ исследуются аналогично. Устанавливаемые при этом противоречия и показывают, что условие $\mathbf{B}'$ (или эквивалентное ему условие $\mathbf{B}$) является следствием тождеств (5),(6). Лемма 5 доказана.

Условие $\mathbf{B}$, на первый взгляд может показаться слишком сильным, тем более, что в доказательстве леммы 5 при получении тождеств (6) условие $\mathbf{B}$ использовалось не в полном объеме, поскольку имела значение только сюръективность отображений $x\mapsto\varphi(x,y,y)$ и $x\mapsto\varphi(y,y,x)$ для произвольного элемента y. Сформулируем это более слабое условие:

C. Для любого элемента $q \in G$ сюръективны частичные отображения, задаваемые функциями $x \mapsto \varphi(x,q,q)$ и $x \mapsto \varphi(q,q,x)$.

Более привычный по форме и эквивалентный вариант этого условия будет следующий:

C′. Для любых двух элементов $p, q \in G$ каждое из уравнений $p = \varphi(x,q,q)$ и $p = \varphi(q,q,x)$ имеет решение относительно $x \in G$.

Заметим, однако, что слабое условие **C** кажется менее естественным, чем сильное и "полнокровное" условие **B**.

Определение 5. Алгебра G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей условию **C** (или эквивалентному ему условию **C′**) и тождествам (8), называется грудой.

Лемма 6. *Определение 2 и определение 5 груды как алгебры G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей четырем тождествам* $(5), (6)$ *или при условии* **C** *двум тождествам* (8) *эквивалентны.*

Доказательство леммы 6 в первой его части получения тождеств (6) повторяет соответствующую часть доказательства леммы 5, а сюръективность отображений $x \mapsto \varphi(x,q,q)$ и $x \mapsto \varphi(q,q,x)$, требуемая условием **C**, есть непосредственное следствие тождеств (6).

Теорема 2. *Все четыре определения груды, а именно, определения* $1, 2, 4, 5$ *эквивалентны между собой.*

Теорема 2 является совокупным следствием лемм 3, 5, 6, устанавливающих эквивалентность пар определений 1 и 2, 2 и 4, 2 и 5, а также транзитивности этого отношения эквивалентности.

Пусть имеется груда G с тернарной алгебраической операцией φ и пусть e – некоторый ее фиксированный элемент. Определим на множестве G бинарную алгебраическую операцию по формуле

$$xy = \varphi(x,e,y). \tag{9}$$

Теорема 3 (Бэра-Вагнера [1]). *Множество G с бинарной алгебраической операцией* (9) *является группой.*

Нейтральным элементом будет, очевидно, фиксированный элемент

e, поскольку в силу тождеств (6) $xe = \varphi(x, e, e) = x$ и $ex = \varphi(e, e, x) = x$. Обратный к x элемент x^{-1} определится выражением: $x^{-1} = \varphi(e, x, e)$, так как в силу тождеств (5), (6) имеем: $xx^{-1} = \varphi(x, e, \varphi(e, x, e)) = \varphi(x, x, e) = e$, $x^{-1}x = \varphi(\varphi(e, x, e), e, x) = \varphi(e, x, x) = e$. Ассоциативность же бинарной операции (9) есть следствие только тождеств (5): $(xy)z = \varphi(\varphi(x, e, y), e, z) = \varphi(\varphi(x, e, y), y, \varphi(y, e, z)) = \varphi(x, e, \varphi(y, e, z)) = x(yz)$, что и завершает доказательство теоремы 3.

Заметим, что исходная тернарная алгебраическая операция φ для груды однозначно выражается через бинарное групповое умножение (9) по следующей формуле:

$$\varphi(x, y, z) = xy^{-1}z, \tag{10}$$

поскольку $xy^{-1}z = \varphi(\varphi(x, e, \varphi(e, y, e)), e, z) = \varphi(\varphi(x, y, e), e, z) = \varphi(x, y, z)$. Группы, получаемые из груды с помощью двух фиксированных элементов e и e', изоморфны между собой, причем их изоморфизм задается отображением $x \mapsto \varphi(x, e, e')$.

Таким образом, функциональные уравнения (5),(6), являющиеся следствием принципа феноменологической симметрии для физической структуры ранга (2,2), своими решениями определяют не только груду с тернарной операцией φ, но и группу с бинарной операцией (9). То есть группа как одна из универсальных алгебр выделена тем, что ее естественным истоком является принцип феноменологической симметрии. Функциональные уравнения (5),(6) впервые были получены при исследовании действительной физической структуры ранга (2,2), когда $G = R$ [3]. В этом частном случае были найдены все их решения: $\varphi(x, y, z) = \psi^{-1}(\psi(x) - \psi(y) + \psi(z))$, где ψ – произвольная функция одной переменной с отличной от нуля производной, а ψ^{-1} – обратная к ней функция. Представляет, очевидно, интерес поиск решения уравнений (5),(6) и для других множеств G, например, $G = R^2$. Такие задачи возникают при классификации двуметрических физических структур, когда паре $< i\alpha > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется не одно число, а два: $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), f^2(i\alpha)) \in R^2$ [4].

Автор выражает благодарность проф. Г.Г.Михайличенко и участникам научного семинара по теории физических структур в Горно-Алтайском университете за поддержку данного исследования и многочисленные обсуждения предварительных результатов.

Литература

1. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года. М. 1974.

2. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск: НГУ, 1968.

3. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. Дополнение к [2], С.175–226.

4. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры и комплексные числа//Докл. АН СССР, 1991, Т.321, №4, С.677-680.