А.Н. Бородин

К теории груд

§1. Введение

Пусть имеется множество Q, элементы которого будем обозначать строчными латинскими буквами, и $n \geq 1$ – натуральное число. Отображение $\omega : Q^n \to Q$, однозначно сопоставляющее всякому кортежу длины n из прямого произведения Q^n некоторый элемент из множества Q, называется, как известно, n-арной *алгебраической операцией* на этом множестве. Будем говорить, что операция ω допускает *деление*, если для любого кортежа $< q_1q_2...q_{n-1} >$ длины $n-1$ из Q^{n-1} и любого элемента q из Q имеет решение каждое из уравнений $q_1q_2...q_{n-1}x = q,\ q_1q_2...xq_{n-1} = q$, ... , $xq_1q_2...q_{n-1} = q$ относительно x. Заметим также, что 0-арной операцией на множестве Q обычно называют фиксирование в нем некоторых его элементов.

Непустое множество Q, на котором заданы алгебраические операции ω различной арности, называется *универсальной алгеброй*. Класс универсальных алгебр называется *многообразием*, если существует такая система тождеств Σ, что алгебра принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда в ней выполняются все тождества системы Σ. Многообразие алгебр обозначается через $M(\omega, \Sigma)$.

А.Г. Курош в своих лекциях [1] привел пример алгебры Q с тернарной операцией ω и следующей системой тождеств Σ:

$$(abc)de = ab(cde), \tag{1.1}$$

$$abb = bba = a. \tag{1.2}$$

Алгебру Q, тернарная операция которой удовлетворяет системе тождеств (1.1), (1.2), называют *грудой*. Согласно теореме Бэра-Вагнера (см. [1]) в каждой груде можно ввести такую бинарную операцию, при которой она становится группой. Многообразие $M(\omega, \Sigma)$, каждая алгебра Q которой является грудой, называется многообразием груд.

Углубив аксиоматику простейшей физической структуры ранга (2,2), автор в приложении [3] к монографии [2] пришел к многообразию $M(\omega, \Sigma)$ алгебр Q с тернарной операцией ω, но с иной, чем у груды, системой тождеств Σ:

$$abc = (abs)sc = as(sbc), \tag{1.3}$$

$$abb = bba = a, \tag{1.4}$$

которое ниже будем называть $\Phi_{(2,2)}$-многообразием.

В §2 изучаются свойства многообразия $\Phi_{(2,2)}$, устанавливается его эквивалентность многообразию груд, для тернарной операции которой оказывается возможным разложение на три бинарные операции, а также на одну бинарную и одну унарную операции.

Далее, в §3 изучается особый тип многообразия $M(\omega,\Sigma)$ с тернарной операцией ω, допускающей деление, и всего одним тождеством в системе Σ:

$$abc = (abs)(tbs)(tbc), \tag{1.5}$$

которое оказывается эквивалентным $\Phi_{(2,2)}$-многообразию и, следовательно, многообразию груд.

В последнем §4 изучается многообразие $M(\omega,\Sigma)$ симметричных груд Q с тернарной операцией ω и системой тождеств Σ, состоящей из тождества (1.3) и тождества

$$bab = a. \tag{1.6}$$

§2. $\Phi_{(2,2)}$-многообразие

Напомним, что тернарная операция в многообразии груд удовлетворяет тождествам (1.1) и (1.2), а в $\Phi_{(2,2)}$-многообразии – тождествам (1.3) и (1.4).

Теорема 2-1. *Многообразие груд и $\Phi_{(2,2)}$-многообразие эквивалентны.*

Действительно, если положить в тождестве (1.1) $c = d = s$ и ввести переобозначение $e \to c$, то получим первое из тождеств (1.3). Второе же из тождеств (1.3) получится, если положить в (1.1) $b = c = s$ и ввести переобозначения $d \to b,\ e \to c$. Тождества (1.2) и (1.4) при этом просто дублируют друг друга. Обратно, используя тождество (1.4), очевидно, имеем: $(abc)de = (abc)c(cde) = ab(cde)$, то есть получаем тождество (1.1) при совпадении тождеств (1.4) и (1.2). Теорема 2-1 доказана.

Теорема 2-2. *В $\Phi_{(2,2)}$-многообразии имеют место следующие тождества:*

$$(abc)cb = a,\ ab(bac) = c,\ a(cba)c = b. \tag{2.1}$$

Полагая в первом тождестве (1.3) $b = c$, имеем $acc = (acs)s$, после чего введем переобозначение $s \to b$ и учтем, что по тождеству (1.4) $acc = a$. Далее из второго тождества (1.3), полагая $b = a$, имеем $c = as(sac)$, после чего введем переобозначения $c \to a,\ a \to b,\ s \to c$. Для вывода третьего тождества системы (2.1) исходим из тождества $(abc)de = a(dcb)e$, которое А.Г.Курош [1] включил в определение груды, но оказалось, как показано автором в приложении [3], излишним, будучи следствием (1.1) и (1.2). Полагая в нем $b = a,\ d = e$ и вводя затем переобозначения $c \to a,\ a \to b,\ e \to c$, завершаем систему тождеств (2.1). Теорема 2-2 доказана.

Теорема 2-3. *Тернарная операция алгебры Q из $\Phi_{(2,2)}$-многообразия является 3-квазигрупповой.*

Леко установить, мспользуя полученные выше тождества (2.1), что каждое из трех уравнений $abx = c,\ ayb = c$ и $zab = c$ для любых элементов a, b, c, имеет единственное решение, задаваемое соответствено выражениями $x = bac,\ y = bca$ и $z = cba$. Теорема 2-3 доказана.

Теорема 2-4. *Тернарная операция алгебры Q из $\Phi_{(2,2)}$-многообразия разложима на три бинарные. Разложение имеет следующий вид:*

$$abc = a * (b \circ c) = a \circ (b \star c), \tag{2.2}$$

$$abc = a \circ \zeta(b) \circ c, \tag{2.3}$$

где $Q(\circ)$ – группа, $Q(*)$ и $Q(\star)$ – квазигруппы, изотопные группе $Q(\circ)$. Изотопия устанавливается равенствами $a * b = a \circ \zeta(b)$ и $a \star b = \zeta(a) \circ b$, где ζ – некоторая подстановка множества Q.

Зафиксируем в двух тождествах (1.3) элемент s, полагая $s = e$, и введем три бинарные операции $a * b = abe$, $a \circ b = aeb$, $a \star b = eab$. В результате получим, очевидно, первые два разложения (2.2). Покажем, что $Q(\circ)$ есть группа. Действительно, $(a \circ b) \circ c = (aeb)ec = (aeb)b(bec) = ae(bec) = a \circ (b \circ c)$. Далее в равенстве $(a*b)\circ c = a\circ(b\star c)$ из разложения (2.2) положим $c = e$. Легко проверяется, что элемент e в группе $Q(\circ)$ является нейтральным. Тогда из равенства $(a*b)\circ e = a\circ(b\star e)$ следует $a * b = a \circ \zeta_1(b)$, где $\zeta_1(b) = b \star e$ – некоторая подстановка множества Q. Аналогично, полагая в том же равенстве из разложения (2.2) $a = e$, получаем $(e * b) \circ c = e \circ (b \star c)$, откуда следует $b \star c = \zeta_2(b) \circ c$, где $\zeta_2(b) = e * b$ – возможно, какя-то другая подстановка множества Q. В действительности же подстановки ζ_1 и ζ_2 совпадают, в чем можно убедиться, заменяя в равенстве $a * b = a \circ \zeta_1(b)$, через которое вводилась первая подстановка, элемент a на нейтральный: $e * b = e \circ \zeta_1(b)$, откуда следует $\zeta_2 = \zeta_1 = \zeta$. А разложение (2.3) естественно следует из второго разложения $abc = a \circ (b \star c)$ из (2.2), в которое подставляется связь $b \star c = \zeta(b) \circ c$. Теорема 2-4 доказана.

Теорема 2-5. *Алгебра $Q(*)$ есть квазигруппа Уорда, а алгебра $Q(\star)$ – квазигруппа Бола.*

То, что обе алгебры являются квазигруппами, тривиально. Покажем, что алгебра $Q(*)$ есть квазигруппа Уорда. Действительно, $a * b = abe = (ab(bce))(bce)e = (ace)(bce)e = (a * c) * (b * c.)$ Аналогично устанавливется, что алгебра $Q(\star)$ есть квазигруппв Бола: $a \star b = eab = e(eca)((eca)ab) = e(eca)(ecb) = (c \star a) \star (c \star b)$. Теорема 2-5 доказана.

§3. $\Phi^*_{(2,2)}$-многообразие, определяемое одним тождеством

В данном параграфе будет рассмотрено многообразие $M(\omega, \Sigma)$ алгебр Q с тернарной операцией ω, допускающей деление, и имеющее всего одно тождество (1.5) в системе Σ:

$$abc = (abs)(tbs)(tbc), \tag{3.1}$$

которое назовем $\Phi^*_{(2,2)}$-многообразием. Это многообразие, как и рассмотренное в предыдущем параграфе §2 $\Phi_{(2,2)}$-многообразие, также возникает при анализе аксиом простейшей физической структуры ранга (2,2), но несколько в другом аспекте.

Теорема 3-1. *В $\Phi^*_{(2,2)}$-многообразии выполняются тождества (1.4) и (2.1).*

Полагая в тождестве (3.1) $s = c$, имеем $abc = (abc)(tbc)(tbc)$ или $a = abb$, так как переменные abc и tbc независимы в силу свойств тернарной операции, допускающей деление. Полагая, далее, в тождестве (3.1) $t = a$, имеем $abc = (abs)(abs)(abc)$ или $a = bba$ в силу упомянутых выше свойств тернарной операции. Таким образом, получены оба тождества системы (1.4). Опираясь на них, а также тождество (3.1), установим справедливость тождеств системы (2.1). Положим сначала $c = b$ в тождестве (3.1): $abb = (abs)(tbs)(tbb)$, откуда с учетом тождеств (1.4): $a = (abs)(tbs)t$. Если теперь в последнем результате положить $s = c$ и $t = b$, то получим $a = (abc)(bbc)b$, то есть первое тождество $a = (abc)cb$ системы (2.1). Положим, далее, в тождестве (3.1) $b = a$, учитывая также тождества (1.4): $c = s(tas)(tac)$. Полагая затем $s = a$ и $t = b$, получаем, очевидно, второе тождество $c = ab(bac)$ системы (2.1). В звершение, полагая $a = c = b$ в тождестве (3.1), имеем $b = s(tbs)t$, откуда при $s = a$ и $t = c$ получем третье тождество $b = a(cba)c$ системы (2.1). Теорема 3-1 доказана.

Теорема 3-2. *Многообразия* $\Phi^*_{(2,2)}$ *и* $\Phi_{(2,2)}$ *эквивалентны.*

Выполнение тождеств (1.4) было проверено в доказательстве предыдущей теоремы 3-1. Покажем теперь, что оба тождества (1.3) получаются из одного тождества (3.1). Положив сначала в нем $t = b$ с учетом тождеств (1.4) сразу приходим к первому тождеству $abc = (abs)sc$ системы (1.3). Если же в нем положить $s = b$ и затем ввести переобозначение $t \to s$, то, очевидно, приходим ко второму тождеству $abc = as(sbc)$ этой системы. С другой стороны, согласно теоремам 2-1 и 2-3 тернарная операция для любой алгебры из $\Phi_{(2,2)}$-многообразия является квазигрупповой и потому деление в ней не только возможно, но оно еще и однозначное. Далее по тождествам (1.3) легко получаем равенство $abc = (abs)p(psc)$. Полагая в нем $p = tbs$, очевидно, приходим к тождеству (3.1). Действительно: $abc = (abs)(tbs)((tbs)sc) = (abs)(tbs)(tbc)$. Теорема 3-2 доказана.

§4. $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразие симметричных груд

Симметричной грудой назовем алгебру с тернарной операцией ω и системой Σ, состоящей из тождеств (1.3) и (1.6). Многообразие $M(\omega, \Sigma)$, каждая алгебра которого симметрична, назовем многообразием симметричных груд и обозначим через $\Phi^s_{(2,2)}$.

Теорема 4-1. *В* $\Phi^s_{(2,2)}$*-многообразии тернарная операция абсолютно симметрмчна, то есть* $abc = acb = cba = bac$.

Полагая в первом тождестве (1.3) $s = a$, с учетом тождества (1.6) получаем $abc = bac$, то есть симметрию по перестановке первого и второго сомножителей. Аналогично, полагая во втором тождестве (1.3) $s = c$, получаем $abc = acb$, то есть симметрию по перестановке второго и третьего сомножителей. Симметрия же по перестановке первого и третьего сомножителей есть очевидное следствие первых двух: $abc = bac = bca = cba$. Теорема 4-1 доказана.

Теорема 4-2. *Для любых трех элементов* a, b, c *алгебры* Q *из* $\Phi^s_{(2,2)}$*-многообразия множество* $\{a, b, c, abc\}$ *является ее подалгеброй.*

Утверждение теоремы 4-2 легко проверяется на основе тождеств (1.3) с учетом установленной в предыдущей теореме 4-1 симметрии тернарной операции алгебры по перестановке любых двух элементов.

Теорема 4-3. *Тернарная операция алгебры Q из $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразия может быть представлена разложением $abc = a \circ b \circ c$, где $Q(\circ)$ – абелевя группа, в которой $a^{-1} = a$.*

Доказательсьво этой теоремы очевидным образом повторяет доказательство теоремы 2-4, причем все три бинарные операции в разложении (2.2) оказываются одной и той же операцией коммутативной группы: $a \circ b = aeb = abe = eab$. Поскольку $a \circ a = aae = e$, в абелевой группе $Q(\circ)$ обратный элемент совпадает с самим собой, то есть $a^{-1} = a$.

Теорема 4-4. *В $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразии не существует алгебры $Q = \{a, b, c\}$, порядок которой равен 3.*

Предположим противное, то есть что в $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразии существует трехмерная алгебра $Q = \{a, b, c\}$, в которой, например, $abc = a$. Тогда $a(abc)b = aab = b$, но по тождествам (1.3) и симметрии тернарной операции имеем $a(abc)b = ab(bac) = aac = c$, то есть $b = c$ и алгебра $Q = \{a, b, c\}$ оказывается двухэлементной, что противоречит предполагаемой ее трехэлементности, то есть порядку 3. Теорема 4-4 доказана.

Теорема 4-5. *Всякая алгебра Q из $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразия порядка $n \geq 2$ разлагается в теоретико-множественную сумму двухэлементных подалгебр.*

Пусть $Q = \{a, b, c, ...\}$. Рассмотрим двухэлементную подалгебру $Q' = \{a, b\}$. Если $n = 2$, то теорема 4-5 верна. Если же $n \geq 3$, то для любого элемента $c \in Q \backslash Q'$ имеем $abc \in Q \backslash Q'$, так как при $abc \in Q'$ должно быть и $c \in Q'$ (см. доказательство предыдущей теоремы 4-4). Поскольку операция в симметричной груде квазигрупповая, элементы abc для разных $c \in Q \backslash Q'$ различны и исчерпывают все дополнение $Q \backslash Q'$. Пусть $abc = d$. Тогда четверка $\{a, b, c, d\}$ по теореме 4-2 является подалгеброй, а поскольку она по теореме 4-4 не может быть трехэлементной, то $d \neq c$ и потому $n \geq 4$. Если $n = 4$, то теорема 4-5 верна и алгебра Q распадается на две двухэлементные подалгебры $Q' = \{a, b\}$ и $Q'' = \{c, d\}$. Если же $n \geq 5$, то, рассуждая аналогично, доказываем, что, в действительности, $n \geq 6$. Если $n = 6$, то теорема 4-5 верна и алгебра Q распадается на три двухэлементные подалгебры. Если же $n \geq 7$, то, повторяя предыдущие рассуждения, устанавливаем, что, на самом деле, $n \geq 8$ и т.д. Теорема 4-5 доказана.

Теорема 4-6. *Число элементов конечной алгебры порядка $n \geq 2$ из $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразия четно.*

Эта теорема есть, очевидно, простое следствие предыдущей теоремы 4-5.

Теорема 4-7. *Если алгебра Q из $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразия содержит подалгебру Q', порядок которой равен n, то порядок самой алгебры Q больше или равен $2n$.*

Пусть $Q' = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Так как Q' является подалгеброй в Q, то существует такой элемент $a \in Q$, который не принадлежит подалгебре Q'. Покажем, что для любых двух элементов b_i, b_j из нее произведение ab_ib_j также ей не принадлежит. Действительно, если $ab_ib_j = b_k$, то из $ab_kb_k = a$ получим $a = a(ab_ib_j)b_k = b_ib_jb_k = b_l$, что означает $a \in Q'$ в противоречие с выбором элемента $a \notin Q'$. Из теоремы

2-3 следует, что при различных элементах $b_i,\ i = 1, ..., n$ и фиксированных $b \in Q',\ a \in Q \backslash Q'$ произведения $ab_ib \in Q \backslash Q'$ различны. Таким образом, в дополнении $Q \backslash Q'$ имеется не менее n различных элементов, а во всей алгебре Q – не менее $2n$. Теорема 4-7 доказана.

Теорема 4-8. *В $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразии нет такой алгебры Q, порядок которой был бы равен 6.*

Предположим противное, то есть что алгебра $Q = \{a, b, c, d, e, f\}$, содержащая 6 элементов, принадлежит многообразию $\Phi^s_{(2,2)}$. Два элемента a, b образуют двумерную подалгебру. Присоединив к ним элемент c и произведение abc, получим четырехэлементную подалгебру $Q' = \{a, b, c, abc\}$. Согласно предыдущей теореме 4-7 порядок самой алгебры Q не может быть меньше 8, хотя в ней всего 6 элементов. Полученное противоресие и доказывает теорему 4-8.

Литература

1. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. М., 1974.

2. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, Горно-Алтайск: ГАГУ, 2003.

3. Бородин А.Н. Груда и группа как физическая структура. Приложение к [2].