Об i-разложении n-группоидов.

Бородин А.Н. (г.Горно-Алтайск)

15 октября 2009 г.

n-Группоидом (где $n \geq 2$) называется универсальная алгебра $\langle Q; f^n \rangle$ с сигнатурой состоящей из одной n-арной операции f^n. Следуя Мальцеву[?] напомним понятие *i-трансляции* n-группоида, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение 1. *Отображение*

$$\iota^i_{a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n}(x) = f^n(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \tag{1}$$

где $x \in Q$, и $\langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle \in Q^{n-1}$, n-группоида в себя называется его i-трансляцией.

Множество всех i-трансляций n-группоида $\langle Q; f^n \rangle$ для различных кортежей из Q^{n-1} обозначим через ι^i, а его мощность — через $|\iota^i|$.

Для обычного группоида $\langle Q; f \rangle$ с бинарной алгебраической операцией $f : Q \times Q \to Q$ две его трансляции $\iota^1_a(x) = f(x, a)$ и $\iota^2_a(x) = f(a, x)$ называют правой и левой, обозначая через R_a и L_a. Очевидно, что $|R| \leq |Q|$ и $|L| \leq |Q|$, так как соответствующие отображения $Q \to R$ и $Q \to L$ сюрьективны.

Определение 2. *n-Группоид $\langle Q; f^n \rangle$ назовем i-раложимым, если существуют такие бинарная — $\circ$ и (n-1)-арная — f^{n-1} алгебраические операции, для которых выполняется следующее тождество:*

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = x_i \circ f^{n-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n). \tag{2}$$

Ясно, что обычный группоид $\langle Q; f \rangle$ с бинарной операцией f разложим, причем его 1-разложимость выражается в тождестве (2) операциями $x \circ y = f(x, y)$ и $f^1 = Id$, а 2-разложимость — операциями $x \circ y = f(y, x)$ и $f^1 = Id$. Условия i-разложимости произвольного группоида выражает следующая теорема.

Теорема 1. *n-Группоид $\langle Q; f^n \rangle$, (где $n \geq 2$), с n-арной алгебраической операцией f^n i-разложим тогда и только тогда, когда $|\iota^i| \leq |Q|$.*

Доказательство. Замечания после определений 1 и 2 в отношении обычного группоида $\langle Q; f\rangle$ доказывают эту теорему для случая $n = 2$. Пусть теперь $n > 2$. Докажем сначала необходимость условия $|\iota^i| \leq |Q|$. Предположим, что n-группоид $\langle Q; f^n\rangle$ i-разложим, то есть выполняется тождество (2) для некоторых операций $\circ$ и f^{n-1}. Введем отображение φ множества его i-трансляций ι^i в Q по следующему правилу:

$$\varphi(\iota^i_{a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n}) = f^{n-1}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in Q. \qquad (3)$$

Отображение (3) инъективно, так как две различные i-трансляции $\iota^i_{a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n}$ и $\iota^i_{a'_1,\ldots,a'_{i-1},a'_{i+1},\ldots,a'_n}$ имеют в соответствии с определяющей формулой (1) и тождеством (2) два различные образа $f^{n-1}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ и $f^{n-1}(a'_1, \ldots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \ldots, a'_n)$ в Q и потому $|\iota^i| = |f^{n-1}(Q^{n-1})| \leq |Q|$.

Перейдем к доказательству достаточности условия теоремы. Если $|\iota^i| \leq |Q|$, то существует хотя бы одно инъективное отображение $\varphi : \iota^i \to Q$. На множестве Q n-группоида $\langle Q; f^n\rangle$ введем еще одну (n-1)-арную алгебраическую операцию по такой схеме:

$$f^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(\iota^i_{x_1,\ldots,x_{n-1}}). \qquad (4)$$

Очевидно, что на множестве ее значений $f^{n-1}(Q^{n-1})$ однозначно определено обратное к φ отображение φ^{-1}. Бинарную алгебраическую операцию на множестве Q введем следующим образом:

$$y \circ x = \varphi^{-1}(x)(y), \qquad (5)$$

если $x \in f^{n-1}(Q^{n-1})$ и $y \in Q$. Если же $x \notin f^{n-1}(Q^{n-1})$ и $y \in Q$, то пусть $y \circ x$ будет любым элементом из Q. Тогда, очевидно, имеем тождество

$$f^n(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \iota^i_{x_i,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n}(x_i) =$$

$$= \varphi^{-1}(f^{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n))(x_i) =$$

$$= x_i \circ f^{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

с алгебраическими операциями (4) и (5). Теорема доказана.

Список литературы

[1] *А.И.Мальцев.* К общей теории алгебраических систем. 1954.