Об i_1^k-разложении n-группоидов.

Бородин А.Н. (г.Горно-Алтайск)

2 декабря 2009 г.

Будем считать, что понятия универсальной алгебры, n-арной операции известны (см., например, А.Г.Пинус [1]). Условимся относительно обозначений следовать [2]. Так последовательность $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ будем обозначать через x_m^n, при $m > n$ последовательность x_m^n является пустым множеством, если $m = n$, то последовательность x_m^n состоит из одного элемента x_m. Если же дана последовательность $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, то обозначать ее будем так $x_{i_1}^{i_k}$.

Определение 1. *n-Группоидом (где $n \geq 2$) называется универсальная алгебра $\langle Q; f^n \rangle$ с сигнатурой состоящей из одной n-арной операции f^n.*

С помощью n-арной алгебраической операции f^n n-группоида $\langle Q; f^n \rangle$ мы можем перейти к группоидам меньшей арности, (см., А.И.Мальцев [3]) . Так заменив элементы $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ соответственно на фиксированные элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из Q. Тогда n-арная алгебраическая операция $f^n(x_1^n)$ примет вид $f^n(x_1^{i_1-1}, a_1, x_{i_1+1}^{i_2-1}, a_2, \ldots, x_{i_{k-1}+1}^{i_k-1}, a_k, x_{i_{k+1}}^n)$, то есть получили производную алгебраическую операцию. Очевидно, что ее арность равна n-k. Обозначим эту операцию через f^{n-k}. Сформулируем все вышеизложенное в виде нового определения.

Определение 2. *Отображение $Q^k \to Q$ вида*

$$\iota^{i_1,i_2,..,i_k}_{a_1^{i_1-1}, a_{i_1+1}^{i_2-1}, \ldots, a_{i_k+1}^n}(x_{i_1}, x_{i_2}, .., x_{i_k}) = f^n(a_1^{i_1-1}, x_{i_1}, a_{i_1+1}^{i_2-1}, x_{i_2}, .., x_{i_k}, a_{i_k+1}^n), \quad (1)$$

где $\langle x_{i_1}^{i_k} \rangle \in Q^k$, а $\langle a_1^{i_1-1}, \ldots, a_{i_k+1}^n \rangle \in Q^{n-1}$,назовем (i_1^k)-трансляцией n-группоида $\langle Q; f^n \rangle$.

Множество всех $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$-трансляций n-группоида $\langle Q; f^n \rangle$ для различных кортежей из Q^{n-k} обозначим через $\iota^{i_1^k}$ а его мощность — через $|\iota^{i_1^k}|$.

Определение 3. *n-Группоид $\langle Q; f^n\rangle$ назовем i_1^k-разложимым, если существуют такие $(n-k)$-арная $-f^{n-k}$ и $(k+1)$-арная $-f^{k+1}$ алгебраические операции, для которых выполняется следующее тождество:*

$$f^n(x_1^n) = f^{k+1}(x_{i_1}^{i_k}, f^{n-k}(x_1^{i_1-1}, x_{i_1+1}^{i_2-1}, \ldots, x_{i_k+1}^n). \qquad (2)$$

Замечание. При $k = 1$ получаем $i_1^1 = i_1 = i$ то есть получили как частный случай определение i-разложения n-группоида.

Теорема 1. *n-Группоид $\langle Q; f^n\rangle$, (где $n \geq 2$), с n-арной алгебраической операцией f^n i_1^k-разложим тогда и только тогда, когда $|\iota^{i_1^k}| \leq |Q|$.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость условия $|\iota^{i_1^k}| \leq |Q|$. Предположим, что n-группоид $\langle Q; f^n\rangle$ i_1^k-разложим, то есть выполняется тождество (2) для некоторых операций f^{k+1} и f^{n-k}. Введем отображение φ множества его i_1^k-трансляций $\iota^{i_1^k}$ в Q по следующему правилу:

$$\varphi(\iota^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{a_1^{i_1-1},a_{i_1+1}^{i_2-1},\ldots,a_{i_k+1}^n}) = f^{n-k}(a_1^{i_1-1}, a_{i_1+1}^{i_2-1}, \ldots, a_{i_k+1}^n) \in Q. \qquad (3)$$

Отображение (3) инъективно, так как две различные (i_1^k)-трансляции $\iota^{i_1,i_2,..,i_k}_{a_1^{i_1-1},a_{i_1+1}^{i_2-1},\ldots,a_{i_k+1}^n}$ и $\iota^{i_1,i_2,..,i_k}_{b_1^{i_1-1},b_{i_1+1}^{i_2-1},\ldots,b_{i_k+1}^n}$ имеют в соответствии с определяющей формулой (1) и тождеством (2) два различные образа $f^{n-k}(a_1^{i_1-1}, a_{i_1+1}^{i_2-1}, \ldots, a_{i_k+1}^n)$ и $f^{n-k}(b_1^{i_1-1}, b_{i_1+1}^{i_2-1}, \ldots, b_{i_k+1}^n)$ в Q и потому $|\iota^{i_1^k}| = |f^{n-k}(Q^{n-k})| \leq |Q|$. Перейдем к доказательству достаточности условия теоремы. Если $|\iota^{i_1^k}| \leq |Q|$, то существует хотя бы одно инъективное отображение $\varphi : \iota^{i_1^k} \to Q$. На множестве Q n-группоида $\langle Q; f^n\rangle$ введем еще одну (n-k)-арную алгебраическую операцию f^{n-k} по такой схеме:

$$f^{n-k}(x_1^{i_1-1}, x_{i_1+1}^{x_2-1} \ldots, x_{i_{k+1}}^n) = \varphi(\iota^{i_1^k}_{x_1^{i_1-1},x_{i_1+1}^{i_2-1},\ldots,x_{i_k+1}^n}). \qquad (4)$$

Очевидно, что на множестве ее значений $f^{n-k}(Q^{n-k})$ однозначно определено обратное к φ отображение φ^{-1}. (k+1)-Арную алгебраическую операцию на множестве Q введем следующим образом:

$$f^{k+1}(x_{i_1}^{i_k}, y) = \varphi^{-1}(y)(x_{i_1}^{i_k}) \qquad (5)$$

если $y \in f^{n-k}(Q^{n-k})$. Если же $y \notin f^{n-k}(Q^{n-k})$, то пусть $f^{k+1}(y, x_{i_1}^{i_k})$ будет любым элементом из Q. Тогда, очевидно, имеем тождество

$$f^n(x_1^{i_1-1}, x_{i_1}, x_{i_1+1}^{i_2-1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}^n) =$$

$$= \iota^{i_1^k}_{x_1^{i_1-1},x_{i_1+1}^{i_2-1},\ldots,x_{i_k+1}^n}(x_{i_1}^{i_k}) =$$

$$= \varphi^{-1}(f^{n-k}(x_1^{i_1-1}, x_{i_1+1}^{i_2-1}, \ldots, x_{i_k+1}^{n}))(x_{i_1}^{i_k}) =$$
$$= f^{k+1}(x_{i_1}^{i_k}, f^{n-k}(x_1^{i_1-1}, x_{i_1+1}^{i_2-1}, \ldots, x_{i_k+1}^{n}))$$

с алгебраическими операциями (4) и (5). Теорема доказана.

Список литературы

[1] *А.Г.Пинус*. Основы универсальной алгебры. 2008. Издательство НГТУ. Новосибирск.

[2] *В.Д.Белоусов, М.Д.Сандик*. n-Арные квазигруппы и лупы. Сиб.мат.журнал. Том 7. 1. 1966.

[3] *А.И.Мальцев*. К общей теории алгебраических систем. Матем.сб. Том 35. 1. 1954.