Алгебраическое определение понятия "закон"

А.А. Симонов, Ю.И. Кулаков, Е.Е. Витяев

ABSTRACT. Из анализа ряда геометрических и физических законов строится алгебраическая модель закона. Рассматриваются простейшие случаи алгебр введённых законов, построенных над произвольным полем.

1 Введение

Статью хотелось бы начать с парадоксального высказывания о том, что разбираться в очевидном – это самое сложное. Действительно, когда речь заходит о понятии закона, то на интуитивном уровне всем понятно, что это такое. Но при более пристальном рассмотрении всё становится не так очевидно. Можно сказать, что закон – это некоторое ограничение. Но тогда любое ограничение – закон? Нет. Знание закона должно позволять осуществлять предсказания. Т.е., с одной стороны – это ограниечение, а с другой стороны – предсказание. Иными словами, имея какие-то предварительные данные о поведении объекта, подчиняющегося закону, мы, на основании этих предварительных данных, можем предсказать, как он поведёт себя дальше. Если закон строгий, а предварительных данных достаточно, то предсказание последующего поведения должно быть полным и достоверным.

Если посмотреть на понятие *закон*, как на философскую категорию, то это *устойчивый тип отношений*. Но, что, в данном случае, понимать под *отношениями* и, что такое *устойчивый тип*? Можно ли философскую категорию перевести на математический язык? Можно ли получить *периодическую* таблицу возможных законов, которая позволяла бы говорить, какой тип законов может существовать, а какой исключён? Для того, чтобы ответить на эти вопросы, надо прежде всего понять, как перевести исходные понятия философской категории закона на математический язык. Наверняка эти понятия можно интерпретировать по разному. А раз так, то в зависимости от конкретизации этих понятий, можно говорить о различных типах *законов*.

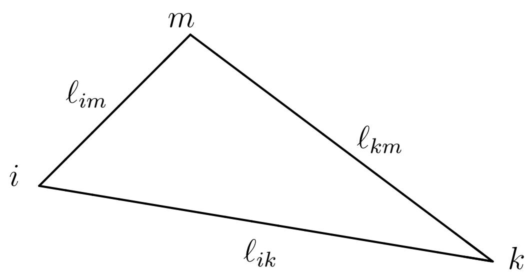
В 60-х годах прошлого века Ю.И. Кулаковым [1, 2] была предложена математическая интерпретация этих понятий, в результате чего были получены определённые утверждения, как относительно существования отношений, так и возможного их вида. Развиваемая теория долгое время работала над гладкими многобразиями, а сами отношения и их связи рассматривались как гладкие функции от своих переменных. В данной работе будет предложен алгебраический подход и рассмотрены простейшие решения.

Геометрия. Перейдём к некоторым примерам, характеризующим суть вопроса. В качестве простейшего примера рассмотрим геометрию. Можно ли говорить, что все точки находятся в некоторой связи? Если да, то в чём эта связь выражается? Действительно, произведя экспериментальные измерения расстояний между точками, можно убедиться, лежат ли точки на прямой, плоскости, в объеме и пр. Рассмотрим конечное множество $\mathfrak{M} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, состоящее из n произвольно расположенных точек евклидовой плоскости. Можно ли утверждать, что, несмотря на совершенно произвольное их расположение, существует вполне определённый закон, которому подчиняются все точки множества $\mathfrak{M}$? Чтобы обнаружить его, рассмотрим все возможные пары точек из $\mathfrak{M}$, их будет $\frac{1}{2}n(n-1)$. Сопоставим каждой паре измеряемую величину, характеризующую взаимное расположение точек. В качестве такой, измеряемой на опыте, величины примем расстояние, измеренное с помощью обычной масштабной линейки.

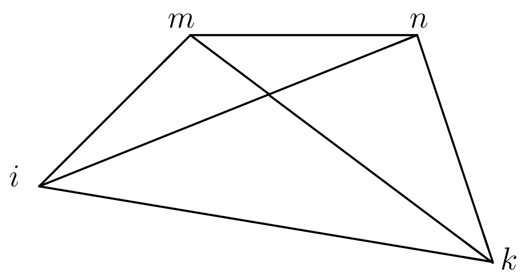
Сопоставляя каждой паре точек (ik) расстояние ℓ_{ik}, мы получим набор опытных данных, полностью характеризующих данное множество $\mathfrak{M}$, который может быть представлен в виде следующей симметричной матрицы:

	i_1	i_2	i_3	$\ldots$	i_n
i_1	0	ℓ_{12}	ℓ_{13}	$\ldots$	ℓ_{1n}
i_2	ℓ_{12}	0	ℓ_{23}	$\ldots$	ℓ_{2n}
i_3	ℓ_{13}	ℓ_{23}	0	$\ldots$	ℓ_{3n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
i_n	ℓ_{1n}	ℓ_{2n}	ℓ_{3n}	$\ldots$	0

Ясно, что взаимные расстояния $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{km}$ между *тремя* произвольными точками $i, k, m \in \mathfrak{M}$ не могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, так как при фиксированных расстояниях ℓ_{ik} и ℓ_{im}, третье расстояние ℓ_{km} может принимать различные значения от $|\ell_{ik} - \ell_{im}|$ до $\ell_{ik} + \ell_{im}$:



Но если взять *четыре* произвольные точки $i, k, m, n \in \mathfrak{M}$, то одно из *шести* взаимных расстояний $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{in}, \ell_{km}, \ell_{kn}, \ell_{mn}$ является двузначной функцией остальных пяти.



Итак, для любых четырёх точек евклидовой плоскости существует функциональная связь между их взаимными расстояниями, вид которой не зависит от выбора этих точек:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 \\ 1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 \\ 1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 \\ 1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

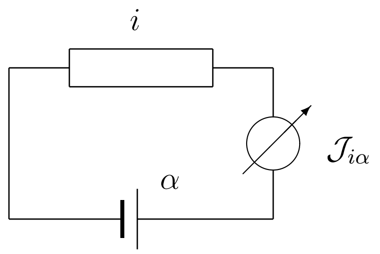
Данный определитель с точностью до коэффициента равен квадрату объёма трёхмерного симплекса, построенного на точках $i, k, m, n \in \mathfrak{M}$. Равенство нулю трёхмерного объёма говорит о том, что все точки лежат в одной плоскости.

Расширяя предыдущий пример, можно взять два набора точек $i, k, m, n \in \mathfrak{M}$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{M}$ евклидовой плоскости $\mathfrak{M}$ и рассмотреть взаимные расстояния уже между наборами точек с греческими и латинскими индексами. Для таких произвольных наборов так же существует функциональная связь между их взаимными расстояниями, которая выражается в виде равенства нулю определителя Кэли–Менгера

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \ell_{i\alpha}^2 & \ell_{i\beta}^2 & \ell_{i\gamma}^2 & \ell_{i\delta}^2 \\ 1 & \ell_{k\alpha}^2 & \ell_{k\beta}^2 & \ell_{k\gamma}^2 & \ell_{k\delta}^2 \\ 1 & \ell_{m\alpha}^2 & \ell_{m\beta}^2 & \ell_{m\gamma}^2 & \ell_{m\delta}^2 \\ 1 & \ell_{n\alpha}^2 & \ell_{n\beta}^2 & \ell_{n\gamma}^2 & \ell_{n\delta}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Закон Ома. Обратимся к идее объектов разной природы в противоположность геометрии, где все точки взяты из одного множества. В этом случае, двум точкам из двух разных множеств сопоставляется результат измерительной процедуры, некий аналог *расстояния*.

Рассмотрим множество проводников $\mathfrak{M}$ и множество источника тока $\mathfrak{N}$. При помощи амперметра, для произвольных $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ произведём измерение тока, протекающего в цепи, собранной по схеме:



В данном случае, показания амперметра $\mathcal{J}_{i\alpha}$ – это некоторое *расстояние* между проводником i и источником тока α. Возьмём три произвольных проводника $i, k, m \in \mathfrak{M}$ и два произвольных источника тока $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$. Измерим *шесть* показаний амперметра $\mathcal{J}_{i\alpha}, \mathcal{J}_{i\beta}, \mathcal{J}_{k\alpha}, \mathcal{J}_{k\beta}, \mathcal{J}_{m\alpha}, \mathcal{J}_{m\beta}$. С достаточной степенью точности имеет место соотношение:

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathcal{J}_{i\alpha}^{-1} & \mathcal{J}_{i\beta}^{-1} \\ 1 & \mathcal{J}_{k\alpha}^{-1} & \mathcal{J}_{k\beta}^{-1} \\ 1 & \mathcal{J}_{m\alpha}^{-1} & \mathcal{J}_{m\beta}^{-1} \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

из которого, используя эталонные точки $k, m \in \mathfrak{M}, \beta \in \mathfrak{N}$ можно получить хорошо известный Закон Ома для всей цепи

$$\mathcal{J}_{i\alpha} = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + r_\alpha},$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ – электродвижущая сила и r_α – внутреннее сопротивление источника тока α, R_i – сопротивление проводника i.

Второй закон Ньютона. Рассмотрим, казалось бы, простой закон Ньютона $f = ma$, где m – масса тела, a – его ускорение и f – сила действующая на тело. Сложность возникает, когда попытаемся понять и определить понятия массы и силы, входящих в этот закон. Масса — мера инертности, но это определение неявно использует сам этот закон. Что такое сила? "Это, — говорил Лагранж, — причина, которая производит движение тела или которая стремится произвести движение". Но всё ещё более усугубляется, если воспроизвести полностью традиционную формулировку Второго закона Ньютона: "В инерциальной системе отсчёта произведение ускорения материальной точки на её массу равно по величине и направлению действующей на неё силе". При этом вводится далеко не тривиальное понятие *инерциальной системы отсчёта* и устанавливается связь между тремя физическими величинами — *ускорением, массой* и *силой*, две последние из которых предварительно не определены. Можно ли так сформулировать Второй закон Ньютона, при котором не требуется предварительно определять, что такое масса и что такое сила?

Рассмотрим два множества: множество тел $\mathfrak{M}$ и множество источников сил, или множество акселераторов $\mathfrak{N}$. При этом, если элементы множеств взаимодействуют между собой, то мы можем наблюдать такое взаимодействие в виде изменения скорости тел. Такое изменение — ускорение: $a_{i\alpha}$ тела $i \in \mathfrak{M}$ под воздействием источника силы $\alpha \in \mathfrak{M}$ мы можем измерять.

В данном случае, ускорение $a_{i\alpha}$ — это некоторое *расстояние* между телом i и источником силы α. Возьмём два произвольных тела $i, k \in \mathfrak{M}$ и два произвольных источника силы $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$. Измерим *четыре* ускорения $a_{i\alpha}$, $a_{i\beta}$, $a_{j\alpha}$, $a_{j\beta}$. С достаточной степенью точности имеет место соотношение:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

из которого, используя эталонные точки $k \in \mathfrak{M}, \beta \in \mathfrak{N}$, можно получить хорошо известный Второй закон Ньютона:

$$F_\alpha = m_i a_{i\alpha}.$$

2 Формализация.

Введём несколько определений.

Определение 1. *Алгебраическая система или алгебра $\langle G; \sigma \rangle$ — это множество G (носитель) с заданным на нём набором операций σ (сигнатура), удовлетворяющим некоторой системе аксиом.*

Определение 2. *n–арная операция f на G — это отображение прямого произведения n экземпляров множества в само множество $f : G^n \to G$.*

0–арная операция — это просто выделенный элемент множества G.

Определение 3. *Если алгебра определена на нескольких множествах $G_1, \ldots, G_n$, т.е. носитель алгебры состоит более чем из одного множества, то такая алгебра $\langle G_1, \ldots, G_n; \sigma\rangle$ называется многосортной.*

Определение 4. *Если в алгебре $\langle G; \sigma\rangle$ определены частичные операции $f_i \in \sigma$, действующие не на всём множестве, то такие алгебры называется частичными.*

Определение 5. *Кортеж $(i_1, \ldots, i_n)$ — это упорядоченный набор из n элементов (n — любое натуральное число), называемое его компонентами, построенный над некоторым множеством M. Т.е. если $i_1, \ldots, i_n \in M$, то $(i_1, \ldots, i_n) \in M^n$.*

Рассмотрим частичную многосортную алгебру $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g\rangle$, где

$$f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B,\ g : B^{n+nm+m} \to B$$

— частичные операции (функции). В данном случае, множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — это множества различных объектов. Функция f — измерительная процедура, сопоставляющая двум элементам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ из этих множеств некоторую величину $f(i, \alpha)$ из множества B. Функция g характеризует связь величин, когда одна из них вычисляется на основе всех остальных.

Будем говорить, что на подмножествах $\widehat{\mathfrak{M}^n} \subseteq \mathfrak{M}^n$, $\widehat{B^n} \subseteq B^n$, $\widehat{\mathfrak{N}^m} \subseteq \mathfrak{N}^m$, $\widehat{B^m} \subseteq B^m$ данная алгебра определяет закон ранга $(n+1, m+1)$, если выполнены аксиомы:

A1. *Для любых кортежей $(i_1, \ldots, i_n) \in \widehat{\mathfrak{M}^n}$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \widehat{B^n}$ найдётся единственный элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$, для которого справедливы равенства: $f(i_k, \alpha) = b_k$, где $k \in \{1, \ldots, n\}$;*

A2. *Для любых кортежей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \widehat{\mathfrak{N}^m}$, $(b_1, \ldots, b_m) \in \widehat{B^m}$ найдётся единственный элемент $i \in \mathfrak{M}$, для которого будут справедливы равенства: $f(i, \alpha_k) = b_k$, где $k \in \{1, \ldots, m\}$.*

A3. *Для любых кортежей $(i_0, \ldots, i_n) \in \mathfrak{M}\times \widehat{\mathfrak{M}^n}$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \in \mathfrak{N}\times \widehat{\mathfrak{N}^m}$ справедливо тождество*

$$f(i_0, \alpha_0) = g\left(f(i_0, \alpha_1), \ldots, f(i_0, \alpha_m), f(i_1, \alpha_0), \ldots, f(i_n, \alpha_0), f(i_1, \alpha_1), \ldots, f(i_n, \alpha_m)\right).$$

В последнем равенстве функция g рассматривается над элементами $f(i_j, \alpha_k) \in B$, построенными над всеми парами (i_j, α_k) за исключением (i_0, α_0).

Определение 6. *Для двух многосортных частичных алгебр* $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g\rangle$ *и* $\langle \mathfrak{M}', \mathfrak{N}', B'; f', g'\rangle$ *тройки отображений* $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$, $\chi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$, $\psi : B \to B'$ *задают их гомоморфизм, когда диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} & \stackrel{f}{\to} & B \\ (\lambda \times \chi) \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathfrak{M}' \times \mathfrak{N}' & \stackrel{f'}{\to} & B' \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} B^3 & \stackrel{g}{\to} & B \\ \psi^3 \downarrow & & \downarrow \psi \\ (B')^3 & \stackrel{g'}{\to} & B' \end{array}$$

коммутативны.

Определение 7. *Если гомоморфизмы* λ, χ, ψ *взаимооднозначны, то алгебры* $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g\rangle$, $\langle \mathfrak{M}', \mathfrak{N}', B'; f', g'\rangle$ *изоморфны или, что тоже самое, эквивалентны.*

Определение 8. *Группой называется алгебра* $\langle B; \cdot, ^{-1}, e\rangle$ *с одной бинарной операцией* $(\cdot) : B \times B \to B$, *одной унарной* $(^{-1}) : B \times B \to B$ *и одной нульарной* e, *для которых справедливы аксиомы:*

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, *для произвольных* $x, y, z \in B$;
2. $x \cdot e = e \cdot x = x$,*для произвольного* $x \in B$;
3. $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$, *для произвольного* $x \in B$.

Нульарная операция выделяет элемент $e \in B$, который называется нейтральным элементом группы $\langle B; \cdot, ^{-1}, e\rangle$. Унарная операция $(^{-1}) : B \times B \to B$ сопоставляет каждому элементу $x \in B$ его обратный $x^{-1} \in B$.

Если отказаться от требования ассоциативности, но оставить возможность однозначной разрешимости уравнения $x \cdot y = z$ так, что $x = z/y$ и $y = x\backslash z$, то алгебра $\langle B; \cdot, /, \backslash\rangle$ будет квазигруппой. При этом бинарные операции $(/) : B \times B \to B$ и $(\backslash) : B \times B \to B$ называются правым и левым делением и для них справедливы тождества:

1. $(x \cdot y)/y = (x/y) \cdot y = x$,для произвольных $x, y \in B$;
2. $x\backslash(x \cdot y) = x \cdot (x\backslash y) = y$,для произвольных $x, y \in B$.

Если в квазигруппе $\langle B; \cdot, /, \backslash\rangle$ имеется двусторонний нейтральный элемент $e \in B$, то такая алгебра $\langle B; \cdot, /, \backslash, e\rangle$ будет лупой.

3 Связь алгебраического представления закона ранга (2,2) с теорией измерений

Рассмотрим многосортную алгебру $\langle M, N, B; f, g\rangle$ для закона ранга (2,2) с точки зрения теории измерений в случае, когда $\widehat{M} = M$, $\widehat{N} = N$, $\widehat{B} = B$.

Определение 9. Многосортная алгебра $\langle M, N, B; f, g\rangle$ определяет закон ранга (2, 2), если выполнены следующие аксиомы:

А1. $\forall i \in M,\ \forall b \in B\ \exists! \alpha \in N (f(i, \alpha) = b)$;

А2. $\forall \alpha \in N,\ \forall b \in B\ \exists! i \in M (f(i, \alpha) = b)$;

A3. $\forall i_0, i_1 \in M, \forall \alpha_0, \alpha_1 \in N (f(i_0,\alpha_0) = g\left(f(i_0,\alpha_1),\ f(i_1,\alpha_0),\ f(i_1,\alpha_1)\right))$, где $\exists!$ означает существование единственного элемента $\diamondsuit$

Следуя работе [3], вместо многосортной алгебры $\langle M, N, B; f, g\rangle$ рассмотрим модель $\Im = \langle M \times N; \sim\rangle$, $M \neq \emptyset$, $N \neq \emptyset$, в которой отношение эквивалентности задается равенством

$$(i,\alpha) \sim (j,\beta) \Leftrightarrow f(i,\alpha) = f(j,\beta).$$

Лемма 1. На модели $\Im = \langle M \times N; \sim\rangle$ выполнена аксиома *неограниченной разрешимости* (unrestricted solvability) [4, p.256].

M1. Для любых трех из четырех элементов $i, j \in M$, $\alpha, \beta \in N$ существует единственный четвёртый элемент такой, что $(i,\alpha) \sim (j,\beta)$ $\diamondsuit$

Доказательство. По трем элементам выберем пару, в которой оба элемента присутствуют, например пару (i,α). Для неё определим значение $b = f(i,\alpha)$. По этому значению и третьему элементу j или β, используя одну из аксиом A1 или A2, однозначно получим четвертый элемент $\Box$

Лемма 2. На модели $\Im = \langle M \times N; \sim\rangle$ выполнена аксиома независимости (independent relation) [4, p.249].

M2. Для любых $i, j \in M$, $\alpha \in N$, если $(i,\alpha) \sim (j,\alpha)$, то $(i,\beta) \sim (j,\beta)$ для любого $\beta \in N$ $\diamondsuit$

Доказательство. Из аксиомы неограниченной разрешимости следует, что, если $(i,\alpha) \sim (j,\alpha)$, то $i = j$ и, значит, $(i,\beta) \sim (j,\beta)$ для любого $\beta \in N$ $\Box$

Лемма 3. На модели $\Im = \langle M \times N; \sim\rangle$ выполнено условие Рейдемейстера (Reidemeister condition) [4, p.252]:

M3: $(i_0,\alpha_2) \sim (i_2,\alpha_0) \& (i_0,\alpha_3) \sim (i_2,\alpha_1) \& (i_1,\alpha_2) \sim (i_3,\alpha_0) \Rightarrow$
$(i_1,\alpha_3) \sim (i_3,\alpha_1)$, где $i_0, i_1, i_2, i_3 \in M$; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in N$ – произвольные элементы M и N $\diamondsuit$

Доказательство. Сделаем замены в аксиоме A3, $i_0 \leftrightarrow i_1$, $\alpha_0 \to \alpha_3$, $\alpha_1 \to \alpha_2$, получим $f(i_1,\alpha_3) = g\left(f(i_1,\alpha_2),\ f(i_0,\alpha_3),\ f(i_0,\alpha_2)\right)$. Теперь сделаем следующие замены в аксиоме A3, $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_0$, $i_0 \to i_3$, $i_1 \to i_2$, получим $f(i_3,\alpha_1) = g\left(f(i_3,\alpha_0),\ f(i_2,\alpha_1),\ f(i_2,\alpha_0)\right)$. Заметим, что функция g в этих двух равенствах зависит от эквивалентных значений, записанных в посылке аксиомы M3. Поэтому значения функции также должны совпадать $f(i_1,\alpha_3) = f(i_3,\alpha_1)$ $\Box$

Лемма 4. Из условия Рейдемейстера следует аксиома шестиугольника (Hexagon Condition) [5]

M4: $(i_0,\alpha_2) \sim (i_2,\alpha_0) \& (i_0,\alpha_3) \sim (i_2,\alpha_2) \sim (i_3,\alpha_0) \Rightarrow (i_2,\alpha_3) \sim (i_3,\alpha_2)$ $\diamondsuit$

Доказательство. В условии Рейдемейстера сделаем подстановки: $i_1 \to i_2,\ \alpha_1 \to \alpha_2$, получим:

$$(i_0, \alpha_2) \sim (i_2, \alpha_0) \& (i_0, \alpha_3) \sim (i_2, \alpha_2) \& (i_2, \alpha_2) \sim (i_3, \alpha_0) \Rightarrow (i_2, \alpha_3) \sim (i_3, \alpha_2).$$

Объединим две эквивалентности $(i_0, \alpha_3) \sim (i_2, \alpha_2) \& (i_2, \alpha_2) \sim (i_3, \alpha_0)$ в одну $(i_0, \alpha_3) \sim (i_2, \alpha_2) \sim (i_3, \alpha_0)$ и получим аксиому шестиугольника $\square$

В теории измерений аксиомы M1-M4 используются для получения числовых представлений. Например, в [5] доказывается, что, если вместо отношения $\sim$ взять отношение $\succsim$ на $M \times N$, которое является существенным и слабым Архимедовым порядком, удовлетворяющим аналогичным аксиомам независимости, ограниченной разрешимости и аксиоме шестиугольника, то существуют функции $\varphi : M \to Re$ и $\phi : N \to Re$ такие что:

$$(i, \alpha) \succsim (j, \beta) \Leftrightarrow \varphi(i) + \phi(\alpha) \geq \varphi(j) + \phi(\beta).$$

Мы используем аксиомы M1-M4 не для получения числовых представлений, а для получения алгебраического представления закона ранга (2,2).

Определение 10. *Алгебраической моделью закона ранга (2, 2)* будем называть модель $\Im = \langle M \times N; \sim \rangle$, $M \neq \emptyset$, $N \neq \emptyset$, удовлетворяющую аксиомам M1, M3.

В работе [6], со ссылкой на теорию сетей, доказывается, что, если выполнено условие Рейдемейстера (аксиома M3) и две более слабые аксиомы, чем аксиома M1, то модель $\Im = \langle M \times N; \sim \rangle$ отображается в группу. Явное доказательство не приведено. Мы приведём независимое и, связанное с дальнейшим изложением и результатом [7], доказательство того, что на модели $\Im = \langle M \times N; \sim \rangle$ может быть определена группа.

Проанализируем эту модель. Обозначим через $[i, \alpha]$ классы эквивалентных элементов в $M \times N / \sim$, а множество всех классов эквивалентности обозначим через $[M \times N]$. Тогда функция f примет вид $f : \langle i, \alpha \rangle \to (i, \alpha)$.

Зафиксируем произвольные элементы $i_0 \in M,\ \alpha_0 \in N$.

Лемма 5. Следующие отображения взаимно-однозначны.

$$f_{i_0} : N \to [M \times N], \quad f_{i_0}(\alpha) = [i_0, \alpha],\ i_0 \in M,$$

$$f_{\alpha_0} : M \to [M \times N], \quad f_{\alpha_0}(i) = [i, \alpha_0],\ \alpha_0 \in N \diamondsuit$$

Доказательство. Рассмотрим функцию f_{i_0}. Она однозначна, т.к. по аксиоме M1, если $(i_0, \alpha) \sim (i_0, \beta)$, то $\alpha = \beta$. Она взаимно-однозначна и отображает множество N на все множество $[M \times N]$, т.к. в силу аксиомы

M1, для любых $(j,\beta) \in [j,\beta] \in [M \times N]$, $i_0 \in M$ существует единственный элемент $\alpha \in N$ такой что $(i_0,\alpha) \sim (j,\beta)$. Взаимно-однозначность функции f_{α_0} доказывается аналогично $\square$

Определим обратные отображения

$$f_{\alpha_0}^{-1} : [M \times N] \to M, \quad f_{i_0}^{-1} : [M \times N/\sim] \to N.$$

На множестве $[M \times N]$ определим операцию

$$[i,\alpha_0] \bullet [i_0,\alpha] = [f_{\alpha_0}^{-1}([i,\alpha_0]), f_{i_0}^{-1}([i_0,\alpha])] = [i,\alpha].$$

Лемма 6. Операция $\bullet$ определяет на $[M \times N]$ квазигруппу поскольку она однозначно разрешима справа и слева $\diamondsuit$

Доказательство. Докажем, что для произвольных двух элементов $[j,\beta]$, $[i,\alpha] \in [M \times N]$ существуют единственные элементы $x, y \in [M \times N]$ такие, что $x\bullet[j,\beta] = [i,\alpha]$, $[j,\beta]\bullet y = [i,\alpha]$. Рассмотрим первое из равенств. В силу аксиомы M1 для (j,β) и i_0 существуетединственный элемент α' такой, что $(j,\beta) \sim (i_0,\alpha')$, а для (i,α) и α' существуетединственный элемент i' такой, что $(i,\alpha) \sim (i',\alpha')$. Тогда $x = (i',\alpha_0)$ и $[i',\alpha_0] \bullet [i_0,\alpha'] = [i',\alpha']$. Второе равенство доказывается аналогично $\square$

Полученная квазигруппа $\Im = \langle M \times N; \sim, \bullet\rangle$ является лупой, если в ней есть единица.

Лемма 7. Элемент $e = [i_0,\alpha_0]$ является единицей в квазигруппе $\Im = \langle M \times N; \sim, \bullet\rangle \quad \diamondsuit$

Доказательство. Для элемента $[q] \in [M \times N]$, и элементов $i_0 \in M$, $\alpha_0 \in N$ по аксиоме M1, существуют элементы $i \in M$, $\alpha \in N$ такие что $(i,\alpha_0) \sim (i_0,\alpha) \sim q$. Тогда $q \bullet e = [i,\alpha_0] \bullet [i_0,\alpha_0] = [i,\alpha_0] = q$ и $e \bullet q = [i_0,\alpha_0] \bullet [i_0,\alpha] = [i_0,\alpha] = q$ $\square$

Лупа является группой, если она ассоциативна.

Лемма 8. Если на квазигруппе $\Im = \langle M \times N; \sim, \bullet\rangle$ выполнена аксиома M3 (условие Рейдемейстера), то она ассоциативна и является группой $\diamondsuit$

Доказательство. В аксиоме M3 произведем замену, увеличив индексы всех элементов на единицу

$$(i_1,\alpha_3) \sim (i_3,\alpha_1) \& (i_1,\alpha_4) \sim (i_3,\alpha_2) \& (i_2,\alpha_3) \sim (i_4,\alpha_1) \Rightarrow (i_2,\alpha_4) \sim (i_4,\alpha_2).$$

Введем обозначения $p_1 = [i_1,\alpha_0]$, $p_2 = [i_2,\alpha_0]$, $p_3 = [i_3,\alpha_0]$, $p_4 = [i_4,\alpha_0]$, $q_1 = [i_0,\alpha_1]$, $q_2 = [i_0,\alpha_2]$, $q_3 = [i_0,\alpha_3]$, $q_4 = [i_0,\alpha_4]$. Тогда аксиома M3 перейдет в аксиому

$$p_1 \bullet q_3 = \mathrm{p}_3 \bullet q_1 \& p_1 \bullet q_4 = p_3 \bullet q_2 \& p_2 \bullet q_3 = p_4 \bullet q_1 \Rightarrow p_2 \bullet q_4 = p_4 \bullet q_2.$$

Для любых x, y, z сделаем следующие подстановки $p_1 = e$, $p_2 = x$, $p_3 = y$, $p_4 = x \bullet y$, $q_1 = e$, $q_2 = z$, $q_3 = y$, $q_4 = y \bullet z$, получим:

$$y = y \& y \bullet z = y \bullet z \& x \bullet y = \mathrm{x} \bullet y \Rightarrow x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z.$$

Поскольку посылка правила, очевидно, выполнена, то имеет место заключение, которое представляет собой ассоциативность $\square$

Следствие 1. Алгебраической моделью закона ранга (2, 2) является группа $\Im = \langle M \times N; \sim, \bullet \rangle$ $\diamondsuit$

4 Общие результаты.

Рассмотрим простейший случай алгебраической системы $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ ранга $(2, 2)$, незначительно изменив формулировку теоремы из [7].

Теорема 1 (Ионин). *Алгебра* $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ *при условии* $\widehat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}, \widehat{B} = B, \widehat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}, \widehat{B} = B$ *изоморфна алгебре* $\langle B, B, B; \cdot, g \rangle$, *где* $\langle B; \cdot, ^{-1}, e \rangle$ *– группа, а отображения*

$$f(x, u) = x \cdot u,$$

$$f(x, u) = g(f(x, v), f(y, u), f(y, v)) = f(x, v) \cdot (f(y, v))^{-1} \cdot f(y, u).$$

Действительно, в силу аксиом А1 и А2 для произвольных $k \in \mathfrak{M}, \gamma \in \mathfrak{N}, t \in B$, построим отображения

$$f_k : \mathfrak{N} \to B, \; f_\gamma : \mathfrak{M} \to B$$

в виде

$$f_k(\alpha) = f(k, \alpha) \;\; \text{и} \;\; f_\gamma(i) = f(i, \gamma).$$

Тогда тройка отображений (f_γ, f_k, id) будет задавать переход к эквивалентной алгебре $\langle B, B, B; f', g \rangle$, где

$$f'(x, y) = f(f_\gamma^{-1}(x), f_k^{-1}(y)).$$

При помощи произвольного $e \in B$ и отображения $f_1(x) = f'(x, e)$, перейдём к эквивалентной алгебре

$$(f_1^{-1}, id, id) : \langle B, B, B; f', g \rangle \to \langle B, B, B; f'', g \rangle$$

с отображением $f''(x, y) = f'(f_1^{-1}(x), y)$, для которой будет выполнено

$$f''(x, e) = f'(f_1^{-1}(x), e) = f_1(f_1^{-1}(x)) = x.$$

Аналогично, при помощи функции $f_2(x) = f''(e,x)$ перейдём к эквивалентной алгебре с отображением

$$f'''(x,y) = f''(x, f_2^{-1}(y)).$$

На множестве B определим операцию $x \cdot y = f'''(x,y)$, тогда для неё справедливо

$$x \cdot e = e \cdot x = x,$$

т.о. с учётом A1 и A2 алгебра $\langle B; \cdot, e\rangle$ будет лупой.

Для произвольных $x, y, u, v \in B$ справедливо тождество $x \cdot u = g(x \cdot v, y \cdot u, y \cdot v)$. Тогда для кортежей (x, e) и $(y \cdot z, y)$ получается тождество

$$x \cdot (y \cdot z) = g(x \cdot y, e \cdot (y \cdot z), e \cdot y) = g(x \cdot y, y \cdot z, y),$$

с другой стороны для кортежей $(x \cdot y, y)$ и (z, e):

$$(x \cdot y) \cdot z = g((x \cdot y) \cdot e, y \cdot z, y \cdot e) = g(x \cdot y, y \cdot z, y),$$

т.о., определённая выше операция будет ассоциативной, следовательно, $\langle B; \cdot, ^{-1}, e\rangle$ – группа.

Для группы можно записать тождество $x \cdot u = (x \cdot v) \cdot (y \cdot v)^{-1} \cdot (y \cdot u)$ так, что

$$g(x, z, y) = x \cdot z^{-1} \cdot y. \tag{3}$$

Любое другое выражение для g будет его производным, с точностью до изоморфного преобразования алгебры $\langle B, B, B; \cdot, g\rangle$. □

Следствие 2. Если, вместо множества B, рассмотрим произвольное поле F, то количество неизоморфных алгебр $\langle F, F, F; \cdot, g\rangle$ над полем F будет совпадать с количеством неизоморфных групп, построенных над полем F. Если $|F| < \infty$, то количество таких групп определяется только мощностью множества F. Если $|F| = p$, где p–простое, то это будет единственная циклическая группа. Если $F = \mathbb{R}$, а функция f гладкая по своим аргументам, то, с точностью до изоморфизма, это будет единственная аддитивная операция [2].

Проверяем полученный результат. Если функцию (3) над множеством $\mathbb{R}$ записать в изоморфном мультипликативном виде, то придём к выражению (2) из закона Ньютона.

Определение 11. Для произвольного множества B определим диагональ

$$\triangle_{B^n} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n | x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee \ldots \vee x_{n-1} = x_n\}.$$

Иными словами, кортеж $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит диагонали $\triangle_{B^n}$, когда в этом кортеже хотя бы два элемента x_i и x_j при $i \neq j$ совпадают: $x_i = x_j$.

Определение 12. Группа $T_n(B)$ преобразования множества B называется точно n–транзитивной, если для любых двух неравных кортежей $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (y_1, y_2, \dots, y_n) \in B^n \setminus \triangle_{B^n}$, найдётся единственный элемент группы $g \in T_n(B)$, для которого справедливо $g(x_i) = y_i$ для $i \in \{1, \dots, n\}$.

Рассмотрим далее произвольное поле F.

Теорема 2. *Алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, F; f, g \rangle$ ранга $(3, 2)$ при условии, что $\widehat{\mathfrak{M}^2} = \mathfrak{M}^2 \setminus \triangle_{\mathfrak{M}^2}$, $\widehat{F^2} = F^2 \setminus \triangle^2_{F^2}$, $\widehat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$, $\widehat{F} = F$, изоморфна алгебре $\langle F, F^2 \setminus \triangle_{F^2}, F; f', g' \rangle$ такой, что при помощи отображения $f' : F \times (F^2 \setminus \triangle_{B^2}) \to F$ можно построить точно дважды транзитивную группу $T_2(F)$.*

Для произвольных $k_1 \neq k_2 \in \mathfrak{M}$, $\gamma \in \mathfrak{N}$, воспользовавшись аксиомами A1 и A2, при помощи биективных отображений

$$f_1 : \mathfrak{M} \to F, \;\; F_1 : \mathfrak{N} \to F^2 \setminus \triangle_F,$$

определённых в виде

$$f_1(i) = f(i, \gamma), \; F_1(\alpha) = (f(k_1, \alpha), f(k_2, \alpha)),$$

перейдём к изоморфной алгебре $\langle F, \widehat{F^2}, F; f', g \rangle$ с функцией

$$f'(x, y, z) = f(f_1^{-1}(x), F_1^{-1}(y, z)).$$

При помощи функции

$$f_2(x) = f'(x, 1, 0),$$

где $1, 0 \in F$ и тройки отображений (f_2^{-1}, id, id) перейдём к изоморфной алгебре с функцией

$$f''(x, y, z) = f'(f_2^{-1}(x), y, z).$$

Далее, при помощи ещё одного отображения

$$F_2(y, z) = (f''(1, x, y), f''(0, x, y)),$$

перейдём к изоморфной алгебре $\langle F, \widehat{F^2}, F; f''', g \rangle$ с функцией

$$f'''(x, y, z) = f''(x, F_2^{-1}(y, z)).$$

Обратим внимание, что из построения, для данной функции справедливы тождества:

$$f'''(1, y, z) = y, f'''(0, y, z) = z, f'''(x, 1, 0) = x. \qquad (4)$$

На множестве $\widehat{F^2}$ определим операцию

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'''(x_1, y_1, y_2) \\ f'''(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix},$$

тогда алгебра $\langle \widehat{F^2}; \cdot \rangle$, с учётом аксиом A1 и A2, будет квазигруппой, а с учётом тождеств (4) – лупой. Для проверки ассоциативности, введённой операции, построим новое отображение $G : \widehat{F^2}^3 \to \widehat{F^2}$ в виде

$$G\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} g(x_1, y_1, y_2, z_1, z_2) \\ g(x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \end{pmatrix}.$$

Тогда, аналогично теореме 1, сравнивая отображение G, построенное, с одной стороны над двумя кортежами

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ и } \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right),$$

а с другой стороны над кортежами

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \text{ и } \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

тогда придём к ассоциативности введённой операции. Следовательно $\langle \widehat{F^2}; \cdot, ^{-1}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ — группа.

Построенная группа преобразований множества $\widehat{F^2}$ будет точно транзитивной, тогда эта же группа, как группа преобразований множества F, будет точно дважды транзитивной. Известно, что почтиобласть (а, в частном случае, почтиполе, тело или поле) связана с единственной, с точностью до изоморфизма, точно дважды транзитивной группой преобразования почтиобласти [8, 9].

Функция G будет иметь такой же вид (3), как и в теореме 1, тогда функцию g можно записать в виде

$$g(x, y_1, y_2, z_1, z_2) = f'''\left(x, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right).$$

С учётом (4) функцию f''' можно записать [10] в виде

$$f'''(x, y, z) = x(y - z) + z,$$

справедливом как для поля F, так и для почтиполя или почтиобласти. $\square$

Следствие 3. Над некоторыми конечными полями F можно построить групповую операцию

$$\tau : F^* \times F^* \to F^*,$$

где $F^* = F \setminus \{0\}$ так, что $\langle F^*; \tau, E_\tau, 1\rangle$ — группа, не изоморфная мультипликативной группе $\langle F^*; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ поля F. В этом случае алгебра $\langle F; \tau, +, E_\tau, -, 1, 0\rangle$ будет почтиполем [11] и над соответствующими полями F будет несколько решений для функции f, приводящих к неизоморфным группам $T_2(F)$. Помимо всегда существующего решения

$$f^{(1)}(x, y, z) = x(y - z) + z,$$

будут ещё решения

$$f^{(i)}(x, y, z) = \tau_i(x, y - z) + z$$

в количестве, зависящем от количества возможных неизоморфных групповых операций τ_i. Наличие таких операций и их количество зависит от конкретного поля F. Над полем вещественных чисел для гладких f имеется единственное решение.

Следствие 4. Над полем F выражение $g(x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = x_1$ можно записать в неявном виде, при помощи равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Сравнивая определитель из следствия 3 с определителем из закона Ома, приходим к тому, что закон Ома в точности соответствует рассматриваемому типу законов ранга (3,2).

Рассмотрим алгебру $\left\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \overline{F}; f, g\right\rangle$ ранга $(4, 2)$ над расширенным полем $\overline{F} = F \cup \{\infty\}$ с актуальной бесконечностью ∞.

Теорема 3. *Алгебра* $\left\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \overline{F}; f, g\right\rangle$ *ранга* $(4, 2)$ *при условии, что* $\widehat{\mathfrak{M}^3} = \mathfrak{M}^3 \setminus \triangle_{\mathfrak{M}^3}$, $\widehat{\overline{F}^3} = \overline{F}^3 \setminus \triangle_{\overline{F}^3}$, $\widehat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$, $\widehat{\overline{F}} = \overline{F}$ *изоморфна алгебре* $\langle \overline{F}, \overline{F}^3 \setminus \triangle_{\overline{F}^3}, \overline{F}; f, g\rangle$, *такой, что при помощи отображения* $f : \overline{F} \times \left(\overline{F}^3 \setminus \triangle_{\overline{F}^3}\right) \to \overline{F}$ *можно построить точно трижды транзитивную группу* $T_3(\overline{F})$.

Для произвольных, попарно неравных $k_1, k_2, k_3 \in \mathfrak{M}, \gamma \in \mathfrak{N}$, воспользовавшись аксиомами A1 и A2, при помощи биективных отображений

$$f_1 : \mathfrak{M} \to \overline{F},\ F_1 : \mathfrak{N} \to \overline{F}^3 \setminus \triangle_{\overline{F}^3},$$

определённых в виде

$$f_1(i) = f(i, \gamma),\ \ F_1(\alpha) = (f(k_1, \alpha), f(k_2, \alpha), f(k_3, \alpha)),$$

перейдём к изоморфной алгебре $\langle \overline{F}, \overline{F}^3 \setminus \triangle_{\overline{F}^3}, \overline{F}; f', g\rangle$ с функцией

$$f'(x, y, z, t) = f(f_1^{-1}(x), F_1^{-1}(y, z, t)).$$

Далее, при помощи функции

$$f_2(x) = f'(x, 1, 0, \infty),$$

где $1, 0, \infty \in \overline{F}$ и тройки отображений (f_2^{-1}, id, id), перейдём к изоморфной алгебре с функцией

$$f''(x, y, z, t) = f'(f_2^{-1}(x), y, z, t),$$

а затем, при помощи отображения

$$F_2(y, z, t) = (f''(1, x, y), f''(0, x, y), f''(\infty, x, y)),$$

перейдём к изоморфной алгебре $\langle \overline{F}, \overline{F}^3 \setminus \triangle_{\overline{F}^3}, \overline{F}; f''', g\rangle$ с функцией

$$f'''(x, y, z, t) = f''(x, F_2^{-1}(y, z, t)).$$

Обратим внимание, что из построения для данной функции справедливы тождества:

$$f'''(1, y, z, t) = x, f'''(0, y, z, t) = z, f'''(\infty, y, z, t) = t, f'''(x, 1, 0, \infty) = x. \tag{5}$$

На множестве $\overline{F}^3 \setminus \triangle_{\overline{F}^3}$ определим операцию

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'''(x_1, y_1, y_2, y_3) \\ f'''(x_2, y_1, y_2, y_3) \\ f'''(x_3, y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix},$$

тогда алгебра $\langle \widehat{\overline{F}^3}; \cdot \rangle$, с учётом аксиом A1 и A2, будет квазигруппой, а с учётом тождеств (5) – лупой. Для проверки ассоциативности данной операции, аналогично теореме 2, построим новое отображение $G : \widehat{\overline{F}^3}^3 \to \widehat{\overline{F}^3}$, при помощи которого, аналогично, придём к ассоциативности введённой операции. Следовательно, $\langle \widehat{\overline{F}^3}; \cdot, ^{-1}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \infty \end{pmatrix} \rangle$ — группа, а из построения как группа преобразований множества $\overline{F}$ будет точно трижды транзитивной. Для построения точно трижды транзитивных групп в [12] было введено КТ–поле, являющееся парой (B, ε), где B — почтиобласть, ε — автоморфизм мультипликативной группы почтиобласти. Для автоморфизма ε справедливо тождество

$$\varepsilon(1 - \varepsilon(x)) = 1 - \varepsilon(1 - x)$$

для $x \in B \setminus \{1, 0\}$. КТ–поле, с точностью до изоморфизма, связано с единственной точно трижды транзитивной группой преобразований КТ–поля. В частном случае, когда КТ–поле является расширенным полем $\overline{F}$, тогда автоморфизм $\varepsilon(x) = x^{-1}$, а точно трижды транзитивная группа преобразования $\overline{F}$ — группа проективных преобразований расширенного поля $\overline{F}$. $\square$

Следствие 5. Произвольный элемент группы $\widehat{\overline{F}^3}$, при $x_3 \neq \infty, 0$ с учётом (5), можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_3\left(x_1 x_3^{-1}\right) \\ \varphi_3\left(x_2 x_3^{-1}\right) \\ \infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \infty \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \infty \end{pmatrix},$$

если $x_3 = 0$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon\left(x_1\right) \\ \varepsilon\left(x_2\right) \\ \infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \infty \\ 0 \end{pmatrix},$$

где отображения

$$\varphi_2, \varphi_3, \varepsilon : \overline{F} \to \overline{F}$$

определяются в виде

$$\varphi_2(x) = f'''(x, 0, 1, \infty), \ \ \varepsilon(x) = f'''(x, 1, \infty, 0), \ \ \varphi_3(x) = f'''(x, \infty, 0, 1),$$

при этом справедливо равенство

$$\varphi_2 \varepsilon \varphi_2(x) = \varepsilon \varphi_2 \varepsilon(x) = \varphi_3(x) \ \text{ и } \ \varepsilon^2(x) = x.$$

Действие автоморфизма мультипликативной группы ε естественно расширяется на всё множество $\overline{F}$ так, что $\varepsilon(0) = \infty$ и $\varepsilon(\infty) = 0$. В этом случае функцию f''' можно записать

$$f'''(x,y_1,y_2,y_3)=\begin{cases}\tau_i\left(x,(y_1-y_2)\right)+y_2, & y_3=\infty\\ \varepsilon\left(\tau_i\left(x,\left(\varepsilon\left(y_1\right)-\varepsilon\left(y_2\right)\right)\right)+\varepsilon\left(y_2\right)\right), & y_3=0\\ \varphi_3\left(\tau_i\left(x,\left(\varphi_3\left(y_1y_3^{-1}\right)-\varphi_3\left(y_2y_3^{-1}\right)\right)\right)+\varphi_3\left(y_2\right)\right)y_3, & y_3\neq\infty,0\end{cases}, \tag{6}$$

где τ_i – мультипликативная группа, при $i=1$ — это мультипликативная группа поля F, а при $i>1$ мультипликативная группа почтиполей, построенных над данным полем, если такое построение возможно.

Функция G будет иметь такой же вид (3), как и в теореме 1 и 2, тогда функцию g можно записать в виде

$$g(x,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3)=f'''\left(x,\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right).$$

Следствие 6. Для конечных элементов поля вещественных чисел выражение $g(x_2,\ y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3)=x_1$ можно записать [15] в неявном виде, при помощи равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_1x_2 & 1\\ y_1 & z_1 & y_1z_1 & 1\\ y_2 & z_2 & y_2z_2 & 1\\ y_3 & z_3 & y_3z_3 & 1\end{vmatrix}=0, \tag{7}$$

которое будет справедливым и для произвольного поля F.

Следствие 7. Если ввести новую мультипликативную операцию, совпадающую с обычной, за исключением двух особых точек 0 и ∞, для которой, как обычно, выполняется

$$0\cdot x=0,\ \ \infty\cdot x=\infty,$$

но, при умножении справа

$$x\cdot 0=\varphi_2(x)=f'''(x,0,1,\infty),\ \ x\cdot\infty=\varphi_3(x)=f'''(x,\infty,0,1).$$

Следовательно,

$$\infty\cdot 0=\infty,\ \ 0\cdot\infty=0$$

и, кроме того,

$$0\cdot 0=\infty\cdot\infty=1$$

так, что операция взятия обратного $E:\overline{F}\to\overline{F}$ расширяется на всё множество $E(x)\cdot x=1$. В этом случае

$$f'''(x,y_1,y_2,y_3)=\varphi_3(\varphi_2(x\cdot\varphi_2\left(\varphi_3\left(y_1\cdot y_3^{-1}\right)\varphi_2E\varphi_3\left(y_2\cdot y_3^{-1}\right)\right)))\cdot y_3.$$

При этом, в алгебраической системе $\left\langle \overline{F};\cdot,E,\varphi_2,\varphi_3,1,0,\infty\right\rangle$, операции будут определены на всём множестве $\overline{F}$, в отличие от частичной алгебраической системы расширенного поля – $\left\langle \overline{F};\cdot,+,^{-1},-,1,0,\infty\right\rangle$, когда операции $(\cdot,^{-1},-)$ определены частично.

5 Заключение.

В соответствии с теоремой Жордана [13] среди конечных групп отсутствуют точно транзитивные группы более третьего порядка, за исключением симметрических, знакопеременных групп и групп Матье. Среди топологических групп также отсутствуют точно транзитивные группы более третьего порядка [14]. По этой причине, для дальнейших исследований надо переходить к решениям над другими подгруппами $\widehat{\mathfrak{M}^n}$ и к рассмотрению случаев с $m>1$.

В случае, когда множество B это поле вещественное чисел $\mathbb{R}$, а функции f и g — гладкие, были найдены все возможные решения [15]. Запишем полученные решения с точностью до локально обратимой замены координат в многообразиях $\mathfrak{M}=\mathbb{R}^m, \mathfrak{N}=\mathbb{R}^n$ и масштабного преобразования $\psi(f)\to f$, где ψ – произвольная гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной, причём $m\le n$:
$m=n\ge 1$:

$$\begin{cases} f(i,\alpha)=x_i^1\xi_\alpha^1+\ldots+x_i^{m-1}\xi_\alpha^{m-1}+x_i^m\xi_\alpha^m, \\ \begin{vmatrix} f(i_1,\alpha_1) & \cdots & f(i_1,\alpha_{m+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(i_{m+1},\alpha_1) & \cdots & f(i_{m+1},\alpha_{m+1}) \end{vmatrix}=0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} f(i,\alpha)=x_i^1\xi_\alpha^1+\ldots+x_i^{m-1}\xi_\alpha^{m-1}+x_i^m+\xi_\alpha^m, \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & f(i_1,\alpha_1) & \cdots & f(i_1,\alpha_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f(i_{m+1},\alpha_1) & \cdots & f(i_{m+1},\alpha_{m+1}) \end{vmatrix}=0, \end{cases} \tag{9}$$

$m = n - 1 \geq 2$:

$$\begin{cases} f(i,\alpha) = x_i^1\xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^m\xi_\alpha^m + \xi_\alpha^{m+1}, \\ \begin{vmatrix} 1 & f(i_1,\alpha_1) & \cdots & f(i_1,\alpha_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f(i_{m+2},\alpha_1) & \cdots & f(i_{m+2},\alpha_{m+1}) \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Т.о., в случае $m = n > 1$ имеется два и только два неэквивалентных решения (8) и (9). В случае $m = n - 1 > 1$ такое решение будет единственным. Для всех остальных пар значений натуральных чисел m и n, при оговоренном условии $m \leq n$, решений не существуют.

Список литературы

[1] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г.Г). Новосибирск, Изд–во НГУ, 1968, с. 226.

[2] *Кулаков Ю.И.* Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. ДАН СССР, 1970, т. 193, 1, стр. 72–75.

[3] *Vityaev E.E.* Numerical, algebraic and constructive representations of one physical structure. In: Logico-Mathematical foundations of problem MOZ (Method of Regularities Determination), (Computational Systems, v.107), 1985, Novosibirsk, p.40-51. (in Russian).

[4] *Krantz DH, Luce RD, Suppes P, Tversky A.* Foundations of Measurement v.1-3, Acad. Press, NY, London. 1971, 1989, 1990.

[5] *Edi Karni.* The Hexagon Condition and Additive Representation for Two Dimensions: An Algebraic Approach // Journal of Mathematical Psychology 42, 393-399, (1998).

[6] *Taylor, MA.* Relational Systems with a Thomsen or Reidemeister Cancellation Condition // Journal of Mathematical Psychology, 9, pp.456-458 (1972).

[7] *Ионин В.К.* Абстрактные группы как физические структуры. Системология и методологические проблемы информационно–логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. с. 40–43.

[8] *Karzel H.* Inzidenzgruppen I. Lecture Notes by Pieper, I. and Sorensen, K., University of Hamburg (1965), 123-135.

[9] *Karzel H.* Zusammenhange zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permu-tationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechtecksaxiom, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32(1968), 191-206.

[10] *А.А. Симонов* О соответствии между почтиобластями и группами. Алгебра и Логика. 2006, 45, 2.

[11] Zassenhaus H. Uber endliche Fastcorper, Abh. Math Sem. Hamburg, 11 (1936), 187–220.

[12] *Kerby W., Wefelscheid H.* Uber eine scharf 3-fach transitiven Gruppen zugeordnete algebraische Struktur. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37 (1972), 225-235.

[13] *Jordan C.* Recherches sur les substitutions, J. Math. Pures Appl. (2) 17 (1872), 351–363.

[14] *Tits J.* Sur les groupes doublement transitif continus, Comment. Math, Helv. 26 (1952) 203–224.
Sur les groupes doublement transitif continus: correction et complements, Comment. Math, Helv. 30 (1956) 234–240.

[15] *Михайличенко Г.Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур. ДАН СССР, 1972, т. 206, 5, с. 1056–1058.