Аналитическая геометрия на плоскости.

Что такое прямая, окружность, эллипс и гипербола? Что общего между прямой и окружностью?

Это множество точек, лежащих на двумерной евклидовой плоскости, на котором задана двухпараметрическая физическая структура рода

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{2}{u}{}^*) = 0$$

(В старой терминологии — двухпараметрическая физическая структура ранга (2,3)).

Поясню, что это значит:

Рассмотрим множество точек, лежащих на двумерной евклидовой плоскости:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{i, k, m, \ldots\}$$

и множество эталонов длины

$$\mathfrak{B} = \{\mu, \nu, \lambda, \ldots\}.$$

Например: $\mu =$ см, $\nu =$ дюйм $= 2,54$см, $\lambda =$ фунт $= 30,48$см.

Образуем множество пар:

$$\underline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$
$\beta = (\beta_1, \beta_2)$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Первые эталоны $\alpha_1, \beta_1 \ldots$ предназначены для измерения координат x, вторые $\alpha_2, \beta_2, \ldots$ — предназначены для измерения координат y.

Определение 1. Мы будем говорить, что на множестве точек $\overline{\mathfrak{M}}$ и множестве пар эталонов $\underline{\mathfrak{N}}$ имеет место физическая структура рода

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{2}{u}{}^*) = 0$$

если существует такая числовая функция двух нечисловых переменных

$$\varphi_{\alpha i}$$

называемых **репрезентаторами**, и такая числовая функция шести числовых переменных

$$\Phi(u_{11}, u_{12}, u_{13}, \\ u_{21}, u_{22}, u_{23})$$

называемая **верификатором**, что имеет место следующее тождество относительно всех нечисловых переменных $\alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}}$ и $i, k, m \in \overline{\mathfrak{M}}$

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\alpha m}, \\ \varphi_{\beta i}, \varphi_{\beta k}, \varphi_{\beta m}\end{pmatrix} \equiv 0 \qquad (1)$$

Как следует из блистательной теоремы (theorema egregium) Михайличенко [?] ранга (2,3) холотропно-функциональное уравнение (1) имеет единственное решение

$$\varphi_{\alpha i} = \overset{1}{u}_{\alpha i} = \sigma_\alpha + \xi_\alpha x_i \tag{2}$$

и

$$\begin{array}{r}\Phi(u_{\alpha i}, u_{\alpha k}, u_{\alpha m},\\ u_{\beta i}, u_{\beta k}, u_{\beta m})\end{array} = \overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{2}{u}{}^*) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha m} \\ 0 & u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta m} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{3}$$

На основе этого решения найдём двухпараметрическую физическую структуру рода

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{1}{u}{}^*) = 0$$

для этого перепишем репрезентатора (2) в виде:

$$\overset{1}{u}_{\alpha i} = \alpha_\alpha + \xi_\alpha x_i = \underbrace{\sigma^*_\alpha + \eta_\alpha b}_{\sigma_\alpha} + \underbrace{(\xi^*_\alpha + \eta_\alpha k)}_{\xi_\alpha} x_i =$$

$$= \xi^*_\alpha x_i + \eta_\alpha(b + kx_i) + \sigma^*_\alpha. \tag{4}$$

После подстановки репрезентатора (4) в верификатор (3) получаем определитель, который распадается на произведение двух определителей, один из которых тождественно обращается в нуль:

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{1}{u}{}^*) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha m} \\ 0 & u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta m} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi^*_\alpha & \eta_\alpha & \sigma^*_\alpha \\ 0 & \xi^*_\beta & \eta_\beta & \sigma^*_\beta \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i & x_k & x_m \\ 0 & y_i & y_k & y_m \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \xi^*_\alpha & \eta_\alpha \\ \xi^*_\beta & \eta_\beta \end{vmatrix}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m \\ y_i & y_k & y_m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\equiv 0} \equiv 0$$

где

$$\boxed{y_i = b + kx_i}$$

Итак, множество точек евклидовой плоскости, на котором задана двухпараметрическая физическая структура рода

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{1}{u}{}^*) = 0$$

есть прямая $y = b + kx$ (см. рис. 1)

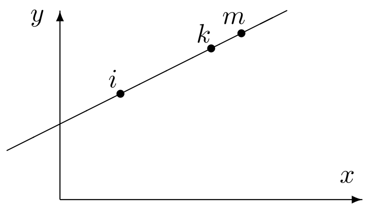

Рис. 1.

Если от переменных x, y перейти к переменным

$$X = x^2, \qquad Y = y^2,$$

то хорошо известные центральные кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, пара пересекающихся прямых, в новых координатах X, Y имеют вид лучей (гипербола и пара пересекающихся прямых) и конечных отрезков (окружности и эллипсы), определённых в первом квадранте

1. окружность $X + Y = 1$,
2. гипербола $X - Y = 1$,
3. гипербола $X - Y = -1$
4. пара пересекающихся прямых $X - Y = 0$ (см. рис. 2.)

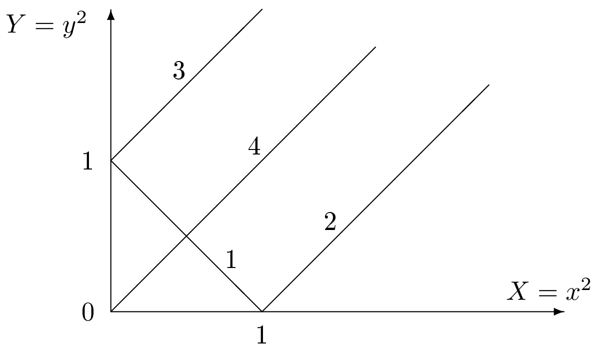

Рис. 2. Центральные кривые второго порядка.

Аналитическая геометрия в трёхмерном пространстве.

Что такое плоскость, сфера, эллипсоид, конус, однополосный и двуполостный гиперболоид?

Что общего между плоскостью и центральной поверхностью второго порядка?

Плоскость и центральная поверхность второго порядка являются подмножествами евклидова трёхмерного пространства, на которых задана трёхпараметрическая физическая структура рода

$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;ikmn}(\overset{3}{u}{}^*) \equiv 0$$

(в старой терминологии — трёхпараметрическая физическая структура ранга (3,4)).

Поясню, что это значит: Рассмотрим множество точек трёхмерного евклидова пространства:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{i, k, m, \ldots\}$$

и множество троек эталонов длины

$$\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$
....

Первые эталоны $\alpha_1, \beta_1 \ldots$ предназначены для измерения координат x, вторые $\alpha_2, \beta_2, \ldots$ — для измерения координат y, и наконец третьи эталоны $\alpha_3, \beta_3, \ldots$ — для измерения координаты z.

Определение 2. Мы будем говорить, что на множестве точек $\overline{\mathfrak{M}}$ и множестве троек эталонов $\underline{\mathfrak{N}}$ имеет место физическая структура рода

$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;ikmn}(\overset{2}{u}) \equiv 0$$

если существует такая числовая функция двух нечисловых переменных

$$\varphi_{\alpha i}$$

называемых **репрезентаторами**, и такая числовая функция двенадцати числовых переменных

$$\begin{aligned}\Phi(&u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14},\\ &u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24},\\ &u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{34})\end{aligned}$$

называемая **верификатором**, что имеет место следующее тождество относительно всех нечисловых переменных $\alpha, \beta, \gamma \in \underline{\mathfrak{N}}$ и $i, k, m, n \in \overline{\mathfrak{M}}$

$$\begin{aligned}\Phi(&\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\alpha m}, \varphi_{\alpha n},\\ &\varphi_{\beta i}, \varphi_{\beta k}, \varphi_{\beta m}, \varphi_{\beta n}, \quad \equiv 0\\ &\varphi_{\gamma i}, \varphi_{\gamma k}, \varphi_{\gamma m}, \varphi_{\gamma n})\end{aligned} \tag{5}$$

Как следует из упомянутой выше теоремы Михайличенко [?] холотропно-функциональное уравнение ранга (3,4) (5) имеет единственное решение

$$\varphi_{\alpha i} = \overset{2}{u}_{\alpha i} = \sigma_\alpha + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_2 x^2(i) \tag{6}$$

и

$$\begin{array}{l}\Phi(u_{\alpha i}, u_{\alpha k}, u_{\alpha m}, u_{\alpha n},\\ \quad u_{\beta i}, u_{\beta k}, u_{\beta m}, u_{\beta n},\\ \quad u_{\gamma i}, u_{\gamma k}, u_{\gamma m}, u_{\gamma n})\end{array} = \overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;ikmn}(\overset{2}{u}) =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha m} & u_{\alpha n} \\ 0 & u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta m} & u_{\beta n} \\ 0 & u_{\gamma i} & u_{\gamma k} & u_{\gamma m} & u_{\gamma n} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (7)$$

На основе этого решения найдём трехпараметрическую физическую структуру рода

$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;ikmn}(\overset{2}{u}{}^{*}) \equiv 0$$

для этого перепишем репрезентатора (6) в виде:

$$\overset{2}{u}_{\alpha i} = \sigma_\alpha + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_2 x^2(i) =$$

$$= \underbrace{\sigma^*_\alpha + \eta_\alpha b}_{\sigma_\alpha} + \underbrace{(\overset{*}{\xi}(\alpha)_1 + \eta_\alpha p)}_{\xi(\alpha)_1} x_i + \underbrace{(\overset{*}{\xi}(\alpha)_2 + \eta_\alpha q)}_{\xi(\alpha)_2} y_i =$$

$$= \overset{*}{\xi}(\alpha)_1 x_i + \overset{*}{\xi}(\alpha)_2 y_i + \eta_\alpha(b + p x_i + q y_i) + \sigma^*_\alpha. \qquad (8)$$

После подстановки репрезентатора (8) в верификатор (7) получаем определитель, который распадается на произведение двух определителей, один из которых тождественно обращается в нуль:

$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;ikmn}(\overset{2}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha m} & u_{\alpha n} \\ 0 & u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta m} & u_{\beta n} \\ 0 & u_{\gamma i} & u_{\gamma k} & u_{\gamma m} & u_{\gamma n} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \overset{*}{\xi}_1(\alpha) & \overset{*}{\xi}_2(\alpha) & \eta_\alpha & \overset{*}{\sigma}_\alpha \\ 0 & \overset{*}{\xi}_1(\beta) & \overset{*}{\xi}_2(\beta) & \eta_\beta & \overset{*}{\sigma}_\beta \\ 0 & \overset{*}{\xi}_1(\gamma) & \overset{*}{\xi}_2(\gamma) & \eta_\gamma & \overset{*}{\sigma}_\gamma \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i & x_k & x_m & x_n \\ 0 & y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & z_i & z_k & z_m & z_n \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \overset{*}{\xi}_1(\alpha) & \overset{*}{\xi}_2(\alpha) & \eta_\alpha \\ \overset{*}{\xi}_1(\beta) & \overset{*}{\xi}_2(\beta) & \eta_\beta \\ \overset{*}{\xi}_1(\gamma) & \overset{*}{\xi}_2(\gamma) & \eta_\gamma \end{vmatrix}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ z_i & z_k & z_m & z_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\equiv 0} \equiv 0$$

где

$$\boxed{z_i = b + p x_i + q y_i}$$

Итак, под множеством точек трёхмерного евклидова пространства, на котором задана трехпараметрическая физическая структура рода

$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;ikmn}(\overset{2}{u}) \equiv 0$$

является плоскость $z = b + px + qy$ (см. рис. 3)

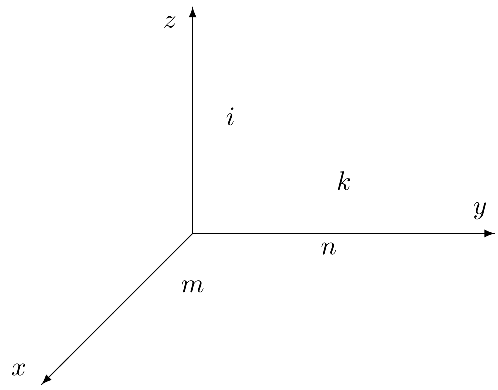

Рис. 3.

Если от переменных x, y, z перейти к переменным

$$X = x^2, \quad Y = y^2, \quad Z = z^2,$$

то хорошо известные центральные поверхности второго порядка: сфера, эллипс, конус, двуполостный и однополостный гиперболоиды в новых координатах X, Y, Z имеют вид полуограниченных плоскостей (конус, однополосный и двуполостный гиперболоиды) и конечных кусков плоскостей (сфера, эллипсоид).

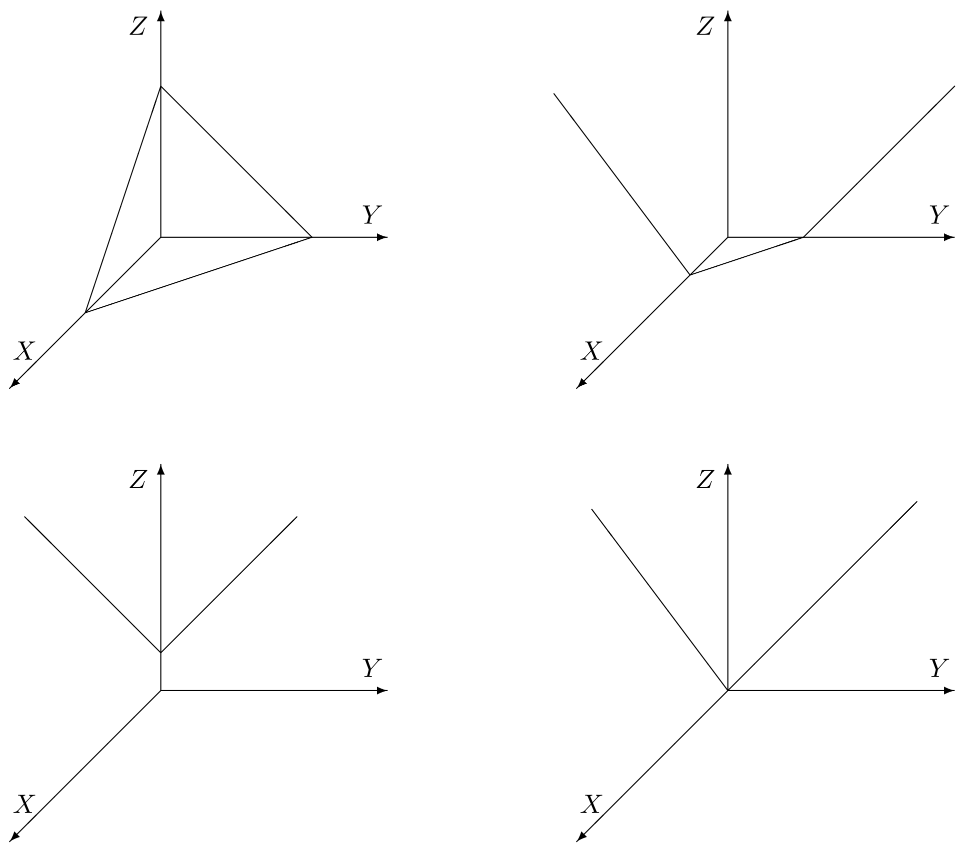

Рис. 4. Четыре типа центральных поверхностей
второго порядка в координатах X, Y, Z.