Algebra and model theory

UDC **512(06)**
A 35

ISSN 2619-0486
2019

Учредитель

ФГБОУ "Новосибирский государственный технический университет"

Адрес редакции, издателя: 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, НГТУ,
Тел. (383) 346-11-66
E-mail: algebra@nstu.ru

UDC 512(06)

К ТЕОРИИ ГОМОГРУПП-I

А. Н. Бородин

Горно-Алтайский государственный университет
ул. Ленкина, 1, г. Горно-Алтайск,
649000, Россия
e-mail: SerajSova@yandex.ru

1 Определение феноменологической симметрии универсальной алгебры

Основным объектом изучения в этой статье является феноменологическая симметрия, играющая фундаментальную роль в физике [1], [2] и геометрии [3]. В работе описаны феноменологически симметричные алгебры ранга 3 малого порядка, построенные на основе гомогрупп.

Проиллюстрируем феноменологическую симметрию плоскости Евклида следующим примером, предложенным в [3] Михайличенко Г. Г. В декартовой системе координат (x, y) квадрат расстояния $\rho(i, j)$ между любыми двумя её точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задаётся функцией

$$f(i, j) = \rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2. \tag{1}$$

Возьмём на плоскости Евклида три произвольные точки i, j, k. Расстояния $f(i, j)$, $f(i, k)$, $f(j, k)$ между тремя произвольными точками i, j, k плоскости Евклида не связаны между собой никакой функциональной зависимостью. Однако, если вместо Евклидовой плоскости мы возьмём прямую L, то между этими расстояниями существует функциональная связь, выражаемая с помощью определителя Кели — Мэнгера порядка 4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i,j) & f(i,k) \\ 1 & f(i,j) & 0 & f(j,k) \\ 1 & f(i,k) & f(j,k) & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

где $f(ij) = x_i - x_j$. Возьмем на плоскости Евклида четыре произвольные точки: i, j, k, l, — и запишем для них шесть значений метрических функций (2): $f(i, j)$, $f(i, k)$, $f(i, l)$, $f(j, k)$, $f(j, l)$, $f(k, l)$. Хорошо известно, что шесть взаимных расстояний между любыми четырьмя точками евклидовой плоскости функционально связаны, обращая в нуль определитель

Кэли — Мэнгера порядка 5:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i,j) & f(i,k) & f(i,l) \\ 1 & f(i,j) & 0 & f(j,k) & f(j,l) \\ 1 & f(i,k) & f(j,k) & 0 & f(k,l) \\ 1 & f(i,l) & f(j,l) & f(k,l) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Геометрический смысл состоит в том, что объём тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю.

В соответствии с терминологией, принятой в [1], соотношения (2) и (3), выражают феноменологическую симметрию Евклидовой плоскости и прямой.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \sigma \rangle$ — алгебра на основном множестве A, а $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ — совокупность всех её термальных операций.

Определение. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ *феноменологически симметрична ранга 3*, если в $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ существуют такие термальные операции t_1, t_2, k (тернарная, бинарная и нулярная), для которых имеет место тождество:

$$t_1(t_2(x,y), t_2(x,z), t_2(y,z)) = k. \tag{4}$$

Из рассмотренных выше примеров и определения феноменологически симметричной алгебры, видно, что термальные операции t_2, t_1, k суть не что иное как метрическая функция, определитель Кэли — Мэнгера, причём $k = 0$. Термальные операции t_1, t_2, k, рассматриваемые вместе с основным множеством A, удовлетворяющие тождеству (4) образуют производную структуру — термальную алгебру. Таким образом, эта термальная алгебра есть не что иное, как геометрия исходной универсальной алгебры.

Полугруппой, как известно, называют алгебру с сигнатурой состоящей из одной бинарной операции, удовлетворяющей тождеству ассоциативности. Полугруппа, обладающая нейтральным элементом, есть моноид. Группой Клейна называют такую группу, в которой выполняется тождество

$$x^2 = e, \tag{5}$$

где e — её нейтральный элемент.

Легко показать, что всякий моноид с тождеством (1)) является группой Клейна.

Гомогруппой, называется такая полугруппа, у которой существует идеал, являющийся группой. Очевидно, что всякая группа является гомогруппой.

Пусть $\mathcal{N} = \langle A, \sigma = \{xy, k\}\rangle$ — алгебра, сигнатура σ которой состоит из бинарной ассоциативной операции xy и нулярной операции, фиксирующей некоторый, не обязательно нейтральный, элемент k, удовлетворяющих тождеству:

$$x^2 = k. \tag{6}$$

Через $\mathcal{N}(n)$ обозначим совокупность всех таких алгебр у которых мощность равна n, где n — любое натуральное число.

2 Некоторые теоремы для алгебр из $\mathcal{N}(n)$

Теорема 1. *$kx = xk$. Для любого $x \in \mathcal{N}$.*

Доказательство. Используем ассоциативность и тождество (6)):

$$xk = x(xx) = (xx)x = kx.$$

□

Теорема 2. *$k^m = k$, где m — любое натуральное число.*

Доказательство. Доказательство является простым следствием тождеств ассоциативности, (6)) и индукции по шагу m. □

Теорема 3. *Всякая алгебра из $\mathcal{N}(n)$ содержит подалгебру, которая является группой Клейна.*

Доказательство. Обозначим через I множество элементов вида: kx, где $x \in \mathcal{N}$. Очевидно, что $I \subseteq \mathcal{N}$ и является подалгеброй $\mathcal{N}$, поскольку, с учетом теоремы 2, $(kx)(ky) = kk(xy) = k(xy)$. Но если элемент k для всей алгебры $\mathcal{N}$ может не быть нейтральным, то для подалгебры I он точно является таковым, поскольку $(kx)k = k(kx) = kx$. Таким образом, подалгебра I, будучи моноидом с тождеством (6), является группой Клейна с константой k вместо единицы. □

Теорема 4. *Всякая алгебра из $\mathcal{N}(n)$ феноменологически симметрична ранга 3.*

Доказательство. Опираясь на теоремы 1, 2 и 3, имеем:

$$k = (kx)^2(ky)^2(kz)^2 = k(xy)k(xz)k(yz) = (xy)k(xz)(yz).$$

Так как $(xz)^2 = k$, в итоге получаем $(xy)(xz)^3(yz) = k$. Если в последнем равенстве положить $t_1(u, v, w) = uv^3w$, а $t_2(x, y) = xy$, то получим тождество (4), что и доказывает теорему. □

Теорема 5. *Подалгебра I является идеалом алгебры из $\mathcal{N}(n)$.*

Доказательство. Пусть $y \in N$, тогда $y(kx) = k(yx) \in I$, $(kx)y = k(xy) \in I$, то есть $NI \subseteq I$, $IN \subseteq I$. Что и доказывает теорему согласно определению идеала. □

Таким образом, из теоремы 1 и 5 следует, что алгебры из $\mathcal{N}(n)$ являются гомогруппами. Известны следующие результаты о гомогруппах [4]: если полугруппа обладает идеалом I, являющимся группой, то I содержится во всяком другом идеале этой полугруппы. Другими словами, I является минимальным идеалом в совокупности всех идеалов полугруппы, откуда следует, что полугруппа может иметь не более одного идеала, являющегося группой.

3 Классификация гомогрупп из $\mathcal{N}(n)$, для $n = 1, 2, 3$

Классификацию будем проводить, опираясь на понятие минимального идеала. По теореме 3, минимальные идеалы алгебр из $\mathcal{N}(n)$, будут группами Клейна. Группы Клейна хорошо изучены. Известно, что все группы Клейна одного порядка изоморфны между собой. Существуют группы Клейна порядка $2m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

$n = 1$. Существует только одна одноэлементная алгебра рассматриваемой сигнатуры. Очевидно, что она является одноэлементной группой Клейна. Введём для неё обозначение I_1.

$n = 2$. Основное множество $A = \{k, a\}$. В этом случае, минимальными идеалами являются I_1 и группа Клейна порядка 2 (обозначим её через I_2):

I_1:

	k
k	k

I_2:

	k	a
k	k	a
a	a	k

В силу тождества (6)) и теоремы 5, в совокупности $\mathcal{N}(2)$ существует только одна 2-х элементная алгебра с идеалом I_1, таблица Кэли имеет вид:

	k	a
k	k	k
a	k	k

Для неё введём обозначение $\mathcal{N}_1^2$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Совокупность $\mathcal{N}(2)$ с точностью до изоморфизма состоит из гомогрупп $\mathcal{N}_1^2$ и I_2.*

$n = 3$. Основное множество $A = \{k, a, b\}$. Так как не существует группы Клейна порядка 3, минимальные идеалы алгебр из $\mathcal{N}(3)$ аналогичны минимальным идеалам алгебр из $\mathcal{N}(2)$.

Начнём классификацию с идеала I_1. Так как идеал I_1 одноэлементен, то в силу определения идеала неполная таблица Кэли принимает вид:

	k	a	b
k	k	k	k
a	k	k	
b	k		k

Существуют 9 вариантов заполнения пустых клеток и, следовательно, 9 группоидов, из которых, как легко проверить, только один является ассоциативным, а именно:

	k	a	b
k	k	k	k
a	k	k	k
b	k	k	k

Это так называемая трёхэлементная сингулярная полугруппа, которую обозначим через $\mathcal{N}_1^3$.

Классификация по идеалу I_2. В этом случае всякая алгебра из совокупности из $\mathcal{N}(3)$, минимальный идеал которой есть I_2, имеет таблицу Кэли, в которой некоторые элементы должны быть доопределены:

	k	a	b
k	k	b	
a	a	k	
b			k

По определению идеала, в пустых клетках могут быть только элементы идеала I_2. Можно показать, что в этом случае существуют 16 группоидов:

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	k	k	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	k	a	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	a	k	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	a	a	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	a
b	k	k	k

$\mathcal{N}_2^3$:

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	a
b	k	a	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	a
b	a	a	k

$\mathcal{N}_3^3$:

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	a	k	k

$\mathcal{N}_4^3$:

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	k
b	k	k	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	k
b	k	a	k

$\mathcal{N}_5^3$:

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	k
b	a	k	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	k
b	a	a	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	a
b	k	k	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	a
b	k	a	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	a
b	a	a	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	a
b	a	k	k

Без особого труда проверяется, что только четыре группоида, обозначенные через $\mathcal{N}_2^3$, $\mathcal{N}_3^3$, $\mathcal{N}_4^3$ и $\mathcal{N}_5^3$, принадлежат совокупности $\mathcal{N}(3)$, так как остальные оказываются неассоциативными. Таким образом, доказана следующая

Теорема 7. *Совокупность $\mathcal{N}(3)$ с точностью до изоморфизма содержит пять гомогрупп: $\mathcal{N}_1^3$, $\mathcal{N}_2^3$, $\mathcal{N}_3^3$, $\mathcal{N}_4^3$ и $\mathcal{N}_5^3$.*

Список литературы

[1] Yu.. I. Kulakov, Theory of physical structures, Publ. “Alfa-Wista”, Novosibirsk, 2003. (Russian)

[2] Yu. S. Vladimirov, Fundamentals of phisucs, Publ, “Binom”, Moscow, 2008. (Russian)

[3] G. G. Mikhaylichenko, Mathematical fundamentals and results in theory of physical structures, Publ. Gorno-Altaysk State Univ., Gorno-Altaysk, Russia, 2016. (Russian)

[4] E. S. Lyapin, Semigroups, Publ.“Fizmatgiz”, Moscow, 1960. (Russian)