

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

---

**СИСТЕМОЛОГИЯ  
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*(Вычислительные системы, 135)*

*Сборник научных трудов*

Научные редакторы:

доктор техн. наук Ю.Г. КОСАРЕВ

кандидат философских наук К.Ф. САМОХВАЛОВ

НОВОСИБИРСК 1990

## УГЛЫ В ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЯХ

Е. Л. Лозицкий

### В в е д е н и е

Понятие физической структуры (феноменологической симметрии) было введено Ю.И.Кулаковым [1,2] в исследованиях по основаниям физики.

В основании теории физических структур лежит представление о множествах однородных объектов, между элементами которых существуют числовые отношения, удовлетворяющие определенным требованиям симметрии.

Рассмотрение физических структур на одном множестве объектов позволяет развить новый подход к вопросу об основаниях геометрии.

Геометрии плоскости соответствует структура ранга  $\mathfrak{R} = 4$ , которая была полностью исследована Г.Г.Михайличенко [3] и В.Х.Львом [4].

Приведем краткую постановку задачи<sup>\*)</sup> и результаты, относящиеся к структуре ранга  $\mathfrak{R} = 4$ .

Пусть  $\mathcal{M}$  - топологическое многообразие размерности  $\mathfrak{M} = 2$ . Элементы  $\mathcal{M}$  будем называть точками и обозначать  $1, j, k, \dots, w$ . Назовем расстоянием функцию  $a: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которая ставит в соответствие каждой паре точек  $\langle 1, j \rangle \in$

---

<sup>\*)</sup> Точные формулировки и определения даны в работе [5].

$\epsilon$  вещественное число  $a_{ij}$ . В локальных координатах функция  $a$  имеет представление  $a_{ij} = f(x_i, x_j, y_i, y_j)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что пара  $\langle \mathcal{M}, a \rangle$  образует физическую структуру ранга  $\Gamma = 4$ , если для любых четырех точек  $i, j, k, m \in \mathcal{M}$  имеет место зависимость:

$$\Phi[a_{ij}, a_{ik}, a_{im}, a_{jk}, a_{jm}, a_{km}] = 0. \quad (1)$$

При этом на функции  $\Phi: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^1$  и  $a: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$  накладываются некоторые ограничения: функция  $a$  должна быть гладкой и существенно образом зависеть от координат  $x_i, y_i$  и  $x_j, y_j$  [6], функция  $\Phi$  должна быть гладкой, причем  $\text{grad } \Phi \neq 0$ .

Возникает следующая задача: найти такие функции  $a$  и  $\Phi$ , что для любых четырех точек  $i, j, k, m \in \mathcal{M}$  имеет место соотношение (1).

ТЕОРЕМА 1. Все возможные расстояния невырожденной заменой координат и преобразованием  $a_{ij} \rightarrow \psi(a_{ij})$  могут быть приведены к одной из следующих форм [3, 4]:

$$a_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad (2.1)$$

$$a_{ij} = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2, \quad (2.2)$$

$$a_{ij} = (x_i - x_j)(y_i - y_j)^q, \quad (2.3)$$

$$a_{ij} = \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] + \gamma \arctg \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}, \quad (2.4)$$

$$a_{ij} = (y_i - y_j) \exp \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}, \quad (2.5)$$

$$a_{ij} = (x_i - x_j) + (\delta_i - \delta_j) \ln(y_i - y_j), \quad (2.6)$$

$$a_{ij} = (\delta_i - \delta_j)(x_i - x_j) + (y_i - y_j)^2, \quad (2.7)$$

$$a_{ij} = \cos y_i \cos y_j \cos(x_i - x_j) + \sin y_i \sin y_j, \quad (2.8)$$

$$a_{ij} = \operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j, \quad (2.9)$$

$$a_{ij} = \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j, \quad (2.10)$$

$$a_{ij} = x_i y_j - x_j y_i, \quad (2.11)$$

$$a_{ij} = \frac{(x_i - x_j)^2 + \delta_i y_i^2 + \delta_j y_j^2}{y_i y_j}, \quad (2.12)$$

где  $q \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0 - \text{const}$ ;  $\delta_i, \delta_j - \text{const}$ , в (2.6) и (2.7)  $\delta_i - \delta_j \neq 0$ .

Некоторые из расстояний (2.1)-(2.12) являются простыми функциями от расстояний в известных геометриях: (2.1) есть евклидова плоскость, (2.2) - псевдоевклидова плоскость, (2.8) - двумерная сфера, (2.10) - плоскость Лобачевского, (2.11) - симплектическая плоскость. Остальные геометрии ранее, по-видимому, не были известны.

Г.Г. Михайличенко высказал предположение о связи групповой и феноменологической симметрий [7] и решил обратную задачу: зная группы преобразований плоскости [8], найти все невырожденные двухточечные инварианты [9]. Результаты полностью совпали с (2.1)-(2.12). Отсюда следует, что каждое расстояние является решением системы линейных однородных уравнений вида:

$$F_\nu(i) a_{ij} + F_\nu(j) a_{ij} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где  $F_\nu(p) = \sigma_\nu(x_p, y_p) \partial x_p + \lambda_\nu(x_p, y_p) \partial y_p$ ;  $\sigma_\nu$  и  $\lambda_\nu$  - некоторые функции, задающие группу инфинитезимальных преобразований;  $x_p, y_p$  - координаты произвольной точки  $P$ , а  $\partial x = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\partial y = \frac{\partial}{\partial y}$ . Поскольку операторы  $F_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ ,

образуют алгебру Ли, они удовлетворяют коммутационным соотношениям [10]:

$$[F_\nu, F_\mu] = c_{\nu\mu}^\eta F_\eta, \quad \nu, \mu, \eta = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где  $c_{\nu\mu}^\eta$  - структурные константы. Каждому расстоянию, таким образом, соответствует набор трех операторов:

$$F_1 = \partial_x, \quad F_2 = \partial_y, \quad F_3 = y\partial_x - x\partial_y, \quad (5.1)$$

$$F_1 = \partial_x, \quad F_2 = \partial_y, \quad F_3 = y\partial_x + x\partial_y, \quad (5.2)$$

$$F_1 = \partial_x, \quad F_2 = \partial_y, \quad F_3 = y\partial_y - x\partial_x, \quad (5.3)$$

$$F_1 = \partial_x, \quad F_2 = \partial_y, \quad F_3 = (2y - \gamma x)\partial_x - (2x + \gamma y)\partial_y, \quad (5.4)$$

$$F_1 = \partial_x, \quad F_2 = \partial_y, \quad F_3 = (x - y)\partial_x + y\partial_y, \quad (5.5)$$

$$F_1 = \partial_x, \quad F_2 = \partial_y, \quad F_3 = y\partial_y - \delta\partial_x, \quad (5.6)$$

$$F_1 = \partial_x, \quad F_2 = \partial_y, \quad F_3 = 2y\partial_x - \delta\partial_y, \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \partial_x, \\ F_2 &= \operatorname{tg} y \cdot \sin x \cdot \partial_x + \cos x \cdot \partial_y, \\ F_3 &= \operatorname{tg} y \cdot \cos x \cdot \partial_x - \sin x \cdot \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \partial_x, \\ F_2 &= -\operatorname{th} y \cdot \sin x \cdot \partial_x + \cos x \cdot \partial_y, \\ F_3 &= -\operatorname{th} y \cdot \cos x \cdot \partial_x - \sin x \cdot \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \partial_x, \\ F_2 &= -\operatorname{cth} y \cdot \sin x \cdot \partial_x + \cos x \cdot \partial_y, \\ F_3 &= -\operatorname{cth} y \cdot \cos x \cdot \partial_x - \sin x \cdot \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

$$F_1 = x\partial_y, \quad F_2 = y\partial_x, \quad F_3 = x\partial_x - y\partial_y, \quad (5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \partial_x, \\ F_2 &= x\partial_x + y\partial_y, \\ F_3 &= (x^2 - \delta y^2)\partial_x + 2xy\partial_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Мы дадим определение угла для произвольной плоской геометрии и для каждой из геометрий (2.1)-(2.12) найдем угол, как функцию трех сторон треугольника.

### §1. Угол в плоской геометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем называть треугольником тройку точек  $\langle i, j, k \rangle$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3<sup>\*</sup>). Будем называть углом  $\varphi(i, j, k)$  треугольника  $\langle i, j, k \rangle$  такую функцию  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , что для любых четырех точек  $i, j, k, l$  имеет место соотношение:

$$\tilde{\varphi}[\varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1k}), \varphi(a_{1j}, a_{1k}, a_{1l}), \varphi(a_{1i}, a_{1k}, a_{1l})] = 0, \quad (6)$$

причем на функции  $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$  и  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$  накладываются некоторые ограничения; функция  $\varphi$  должна быть гладкой и  $\varphi \neq \text{const}$  ни в какой области изменения своих трех переменных; функция  $\tilde{\varphi}$  должна быть гладкой и  $\text{grad } \tilde{\varphi} \neq 0$ . Соотношение (6) обобщает свойство аддитивности углов с общей вершиной.

Результатом этой работы является

ТЕОРЕМА 2. Угол в произвольной плоскости геометрии имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1k}) &= \\ &= \chi \{ \sigma \cdot \psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1k}) + \Lambda(a_{1i}) - \Lambda(a_{1j}) \}, \end{aligned}$$

где  $\sigma = \text{const}$ ,  $\Lambda: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  - гладкая функция, а  $\psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1k})$  в зависимости от геометрии имеет

\*)

Данное определение возникло в процессе обсуждения с Ю.И.Кулаковым и Г.Г.Михайличенко.

вид:

$$\psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \arccos \frac{a_{1i} + a_{1j} - a_{ij}}{2\sqrt{a_{1i}a_{1j}}}, \quad (7.1)$$

$$\psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \text{Arch} \frac{a_{1i} + a_{1j} - a_{ij}}{2\sqrt{a_{1i}a_{1j}}}, \quad (7.2)$$

$$\psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \ln R, \quad (7.3)$$

где  $R$  - решение уравнения  $a_{ij} = (a_{1j} - a_{1i}R^{-q})(1-R)^q$ ,

$$\psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = R, \quad (7.4)$$

где  $R$  - решение уравнения

$$a_{ij} = \ln 2 + \ln \left[ \text{ch} \frac{R}{2} - \cos \frac{R - a_{1i} + a_{1j}}{\gamma} \right] +$$

$$+ \gamma \text{arctg} \frac{e^{-\frac{R}{4}} \sin \frac{R + 2a_{1j}}{2\gamma} + e^{\frac{R}{4}} \sin \frac{R - 2a_{1i}}{2\gamma}}{e^{-\frac{R}{4}} \cos \frac{R + 2a_{1j}}{2\gamma} - e^{\frac{R}{4}} \cos \frac{R - 2a_{1i}}{2\gamma}},$$

$$\psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \ln R, \quad (7.5)$$

где  $R$  - решение уравнения

$$\left( \frac{a_{1i}}{a_{ij}} \right)^R \cdot \frac{a_{ij}}{a_{1j}} = R^R (1-R)^{1-R},$$

$$\psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \ln R, \quad (7.6)$$

где  $R$  - решение уравнения

$$a_{1i} + a_{1j} - a_{1j} = \epsilon_{1j} \ln(1-R) + \epsilon_{1i} \ln R,$$

$$\begin{aligned} \phi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1j}) &= \\ &= \frac{\sqrt{a_{1i} \epsilon_{1j} \epsilon_{1j} + a_{1j} \epsilon_{1i} \epsilon_{1j} - a_{1j} \epsilon_{1i} \epsilon_{1j}}}{\epsilon_{1i} \epsilon_{1j}}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\phi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1j}) = \arccos \frac{a_{1j} - a_{1i} a_{1j}}{\sqrt{1-a_{1i}^2} \sqrt{1-a_{1j}^2}}, \quad (7.8)$$

$$\phi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1j}) = \text{Arch} \frac{a_{1j} - a_{1i} a_{1j}}{\sqrt{1-a_{1i}^2} \sqrt{1-a_{1j}^2}}, \quad (7.9)$$

$$\phi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1j}) = \arccos \frac{a_{1i} a_{1j} - a_{1j}}{\sqrt{a_{1i}^2 - 1} \sqrt{a_{1j}^2 - 1}}, \quad (7.10)$$

$$\phi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1j}) = \frac{a_{1j}}{a_{1i} a_{1j}}, \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \phi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1j}) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta_1}} \arccos \frac{a_{1i} a_{1j} - 2\delta_1 a_{1j}}{\sqrt{a_{1i}^2 - 4\delta_1 \delta_i} \sqrt{a_{1j}^2 - 4\delta_1 \delta_j}}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

где  $\epsilon_{\mu\nu} = \delta_\mu - \delta_\nu$ .



## §2. Доказательство теоремы

Доказательство разобьем на две части<sup>\*)</sup>: сначала рассмотрим функцию  $\varphi$  как функцию шести координат.

$$\varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{1k}) = f(x_1, y_1, x_i, y_i, x_j, y_j) \quad (8)$$

и найдем ограничения, которые накладывает на функцию  $f$  соотношение (6).

Введем обозначения  $f(x_1, y_1, x_i, y_i, x_j, y_j) = f(1ij)$  и подставим (8) в (6):

$$\tilde{\Phi} [f(1ij), f(1ik), f(1jk)] = 0. \quad (9)$$

Запишем соотношение (9) для четверки  $\langle 1, i, j, p \rangle$ :

$$\tilde{\Phi} [f(1ij), f(1ip), f(1jp)] = 0; \quad (10)$$

предполагая, для определенности, что  $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial f(1ij)}$ , раз-  
решим (10) относительно  $f(1ij)$  и зафиксируем координаты  $x_p, y_p$ ; обозначив  $f(1ip) = \rho(1i)$ ,  $f(1jp) = \rho(1j)$ , получим:

$$f(1ij) = \Gamma[\rho(1i), \rho(1j)]. \quad (11)$$

**ЛЕММА.** *Функции  $z_i = \rho(1i)$ ,  $z_j = \rho(1j)$ ,  $z_k = \rho(1k)$  восьми переменных  $x_1, y_1, x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$  независимы.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим обратное: пусть существует функция  $\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$  такая, что для любой четверки  $\langle 1, i, j, k \rangle$  имеет место соотношение

$$\theta[\rho(1i), \rho(1j), \rho(1k)] = 0. \quad (12)$$

Из (12) следует, что ранг матрицы Якоби

---

<sup>\*)</sup> Идея такого разбиения принадлежит Г.Г. Михайличенко.

$$\begin{array}{|ccc|}
 \hline
 \rho_{x_1}(1i) & \rho_{x_1}(1j) & \rho_{x_1}(1k) \\
 \rho_{y_1}(1i) & \rho_{y_1}(1j) & \rho_{y_1}(1k) \\
 \rho_{x_i}(1i) & 0 & 0 \\
 \rho_{y_i}(1i) & 0 & 0 \\
 0 & \rho_{x_j}(1j) & 0 \\
 0 & \rho_{y_j}(1j) & 0 \\
 0 & 0 & \rho_{x_k}(1k) \\
 0 & 0 & \rho_{y_k}(1k) \\
 \hline
 \end{array}$$

должен быть меньше трех. Приравниваем нулю два определения третьего порядка, составленные из строк (3,5,7) и (4,6,8) матрицы (13):

$$\rho_{x_1}(1i)\rho_{x_j}(1j)\rho_{x_k}(1k) = 0, \quad (14.1)$$

$$\rho_{y_1}(1i)\rho_{y_j}(1j)\rho_{y_k}(1k) = 0. \quad (14.2)$$

Из (14.1) и (14.2) следует, что  $\rho(1i) = \rho(x_1, y_1)$ .

С учетом этого из соотношений (8) и (11) получаем:

$$\varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \varepsilon(x_1, y_1). \quad (15)$$

Как отмечалось во введении, расстояния  $a_{ij}$  являются решениями систем уравнений  $F_v(i)a_{ij} + F_v(j)a_{ij} = 0$ ,  $v = 1, 2, 3$ . Подействуем на уравнение (15) операторами  $F_v(1) + F_v(i) + F_v(j)$ :

$$\begin{aligned} & \varphi_1(\cdot)(F_\nu(1)a_{1i} + F_\nu(i)a_{11}) + \\ & \quad + \varphi_2(\cdot)(F_\nu(1)a_{1j} + F_\nu(j)a_{1j}) + \\ & \quad + \varphi_3(\cdot)(F_\nu(i)a_{1j} + F_\nu(j)a_{1j}) = F_\nu(1)\varepsilon(x_1, y_1), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\varphi_1(\cdot)$ ,  $\varphi_2(\cdot)$ ,  $\varphi_3(\cdot)$  - частные производные по первому, второму и третьему аргументам функции  $\varphi(a_{11}, a_{1j}, a_{1j})$ . В силу уравнений (3) левая часть системы (16) обратится в ноль, следовательно,  $F_\nu(1)\varepsilon(x_1, y_1) = 0$ , и в силу линейной независимости операторов  $F_1(1)$ ,  $F_2(1)$ ,  $F_3(1)$ ,  $\varepsilon(x_1, y_1) = \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \text{const}$ , что противоречит условию  $\varphi \not\equiv \text{const}$ . Этим завершается доказательство леммы.

Подставим (11) в соотношение (9)

$$\tilde{\Phi} [\Gamma(z_1, z_j), \Gamma(z_1, z_k), \Gamma(z_j, z_k)] = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) аналогично уравнению для структуры ранга  $\Gamma = 3$ , решение которого приведено в работе [11]. Согласно доказанной лемме,  $z_1, z_j, z_k$  можно считать независимыми переменными. Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\Gamma(z_1, z_j) = \chi[u(z_1) - u(z_j)],$$

где  $\chi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $u: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  - гладкие функции. Подставляя в  $u(z_1)$  выражение  $z_1 = \rho(1i)$ , получаем некоторую функцию  $B(x_1, y_1, x_1, y_1)$  и из (11) и (8) имеем:

$$\varphi(a_{11}, a_{1j}, a_{1j}) = \chi[B(1i) - B(1j)]. \quad (18)$$

На этом первая часть доказательства закончена. Теперь необходимо решить уравнение (18) для каждого из расстояний (2.1)-(2.12).

Поддействуем на уравнение (18) операторами  $F_\nu(1) + F_\nu(i) + F_\nu(j)$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ ; учитывая, что  $\chi' \neq 0$  (в противном случае  $\varphi \equiv \text{const}$ ), получаем:

$$F_{\nu}(1)B(1i) + F_{\nu}(i)B(1i) = \\ = F_{\nu}(1)B(1j) + F_{\nu}(j)B(1j), \nu = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Из (19) непосредственно следует, что

$$F_{\nu}(1)B(1i) + F_{\nu}(i)B(1i) = \omega_{\nu}(1), \nu = 1, 2, 3, \quad (20)$$

где  $\omega_{\nu}(1) = \omega_{\nu}(x_1, y_1)$ . Система (20) аналогична системе (3) и отличается от последней наличием неоднородных членов  $\omega_{\nu}(1)$ .

Получим уравнение совместности системы (20). Для этого выпишем любые два уравнения:

$$F_{\alpha}(1)B(1i) + F_{\alpha}(i)B(1i) = \omega_{\alpha}(1), \quad (21.1)$$

$$F_{\beta}(1)B(1i) + F_{\beta}(i)B(1i) = \omega_{\beta}(1). \quad (21.2)$$

Поддействуем на уравнение (21.1) оператором  $F_{\beta}(1)$ , на уравнение (21.2) - оператором  $F_{\alpha}(1)$  и вычтем из второго первое:

$$c_{\alpha\beta}^{\gamma} F_{\gamma}(1)B(1i) + (F_{\alpha}(1)F_{\beta}(i) - F_{\beta}(1)F_{\alpha}(i))B(1i) = \\ = F_{\alpha}(1)\omega_{\beta}(1) - F_{\beta}(1)\omega_{\alpha}(1). \quad (22)$$

Поддействуем на уравнение (21.1) оператором  $F_{\beta}(i)$ , на уравнение (21.2) - оператором  $F_{\alpha}(i)$  и из второго вычтем первое:

$$(F_{\alpha}(i)F_{\beta}(1) - F_{\beta}(i)F_{\alpha}(1))B(1i) + c_{\alpha\beta}^{\gamma} F_{\gamma}(i)B(1i) = 0. \quad (23)$$

Складывая (22) и (23), с учетом (20) получаем:

$$c_{\alpha\beta}^{\gamma} \omega_{\gamma}(1) = F_{\alpha}(1)\omega_{\beta}(1) - F_{\beta}(1)\omega_{\alpha}(1), \\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Уравнение (24) есть искомые условия совместимости системы (20).

Опуская подробное решение системы (20) для каждой группы операторов (5.1)-(5.12), приведем результаты:

$$B(1i) = c \cdot \arccos \frac{y_1 - y_i}{\sqrt{a_{1i}}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.1)$$

$$B(1i) = c \cdot \text{Arch} \frac{y_1 - y_i}{\sqrt{a_{1i}}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.2)$$

$$B(1i) = c \cdot \ln(y_1 - y_i) + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.3)$$

$$B(1i) = c \cdot \ln((x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2) + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.4)$$

$$B(1i) = c \cdot \ln(y_1 - y_i) + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.5)$$

$$B(1i) = c \cdot \ln(y_1 - y_i) + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.6)$$

$$B(1i) = c \cdot \frac{y_1 - y_i}{\delta_1 - \delta_i} + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.7)$$

$$B(1i) = c \cdot \arcsin \frac{\sin(x_1 - x_i) \cos y_i}{\sqrt{1 - a_{1i}^2}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.8)$$

$$B(1i) = c \cdot \text{Arch} \frac{\sin(x_1 - x_i) \text{ch } y_i}{\sqrt{1 - a_{1i}^2}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.9)$$

$$B(1i) = c \cdot \arcsin \frac{\sin(x_1 - x_i) \text{sh } y_i}{\sqrt{a_{1i}^2 - 1}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.10)$$

$$B(1i) = c \frac{x_i}{x_1 a_{1i}} + A(a_{1i}) + \rho(1) \quad (25.11)$$

$$B(1i) = \frac{c}{\sqrt{\delta_1}} \arcsin \frac{2\sqrt{\delta_1}(x_1 - x_i)}{y_i \sqrt{a_{1i}^2 - 4\delta_1 \delta_1}} + A(a_{1i}) + \rho(1), \quad (25.12)$$

где  $a_{1i}$  - соответствующие расстояния,  $A: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  и  $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  - гладкие функции. Подставляя (25.1)-(25.12) в (18), можно получить (7.1)-(7.12).

В заключение отметим, что углы, согласно теореме 2, определены с точностью до двух произвольных функций  $\chi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  и  $A: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  и с точностью до константы  $c$ . Предполагая, что  $c \neq 0$  (иначе угол тривиален), угол можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \chi^{-1}(\varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij})) &= \\ &= \psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) + \frac{A(a_{1i})}{c} - \frac{A(a_{1j})}{c}. \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначая

$$\frac{1}{c} \chi^{-1}(\varphi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij})) = \bar{\varphi}(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}),$$

$$\frac{A(a_{1i})}{c} = \bar{A}(a_{1i}), \quad \frac{A(a_{1j})}{c} = \bar{A}(a_{1j}),$$

из соотношения (26) получаем:

$$\bar{\varphi}(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) = \psi(a_{1i}, a_{1j}, a_{ij}) + \bar{A}(a_{1i}) - \bar{A}(a_{1j}). \quad (27)$$

Если теперь принять за определение угла соотношение (27), то углы вида (7.1), (7.2), (7.8) и (7.10) будут отличаться

от углов в обычных евклидовой, псевдоевклидовой, сферической геометриях и геометрии Лобачевского аддитивными слагаемыми вида  $\bar{A}(a_{ij}) - \bar{A}(a_{ij})$ .

Неопределенность в выборе функции  $\bar{A}$  означает, что расстояние  $a_{ij}$  определяет геометрию неоднозначно, т.е. на плоскости с одним и тем же расстоянием  $a_{ij}$  может существовать множество различных геометрических структур.

#### Л и т е р а т у р а

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур. - Новосибирск, 1968. - 226 с.
2. КУЛАКОВ Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа // Докл. АН СССР. - 1971. - Т. 201, № 3. - С. 570-572.
3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. - 1981. - Т. 260, № 4. - С. 803-805.
4. ЛЕВ В.Х. Двумерные и трехмерные геометрии в теории физических структур // Машинный анализ сложных структур. - Новосибирск, 1986. - Вып. 118: Вычислительные системы. - С. 28-36.
5. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение фундаментальных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР. - 1972. - Т. 206, № 5. - С. 1056-1058.
6. ЭЙЗЕНХАРТ Л.П. Непрерывные группы преобразований. - М.: ИЛ., 1947.
7. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. О групповой и феноменологической симметрии в геометрии // Сиб. мат. ж. - 1984. - Т. XXV, № 5. - С. 99-113.
8. Его же. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости // Сиб. мат. ж. - 1982. - Т. 23, № 5. - С. 132-141.
9. Его же. Метрика плоскости как двухточечный инвариант // Ред. Сиб. мат. ж. - 1984. - 38 с. - Деп. ВИНТИ 30.10.84, № 6980-84. Реферат // Сиб. мат. ж. - 1985. - Т. 26, № 5. - С. 198.
10. ЛЕВ В.Х. Алгебры Ли в теории физических структур // Моделирование в пленочной электромеханике. - Новосибирск, 1985. - Вып. 110: Вычислительные системы. - С. 89-94.