УДК 512.57
DOI 10.33048/mattrudy.2022.25.209

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2022, том 25, № 2, 203-219

ТОЖДЕСТВА И n–АРНЫЕ АЛГЕБРЫ КУЛАКОВА

М. В. Нещадим, А. А. Симонов

В работе развивается алгебраический подход к теории физических структур — теории, ориентированной на классификацию фундаментальных физических законов. Аксиоматический подход естественно приводит к введению новых алгебраических систем — n-арных алгебр Кулакова, определению и исследованию которых и посвящена настоящая работа.

Ключевые слова и фразы: Алгебры Кулакова, физические структуры, тождество Лапласа.

§1. Введение и постановка задачи

Термин *физическая структура*[1] был введён Ю.И. Кулаковым [1, 2, 3, 4] в середине 60-х годов прошлого века для описания математической теории, ориентированной на классификацию физических законов. Центральной частью теории физических структур является поиск инвариантных связей между измеряемыми в опыте величинами. Эта модель приложима как к обычной геометрии, так и к её обобщению — геометрии, построенной на нескольких множествах с метрической функцией, которая сопоставляет набору точек из этих множеств некоторое число (или набор чисел).

Хорошо известно, что для евклидовой плоскости шесть расстояний $\ell(ij)$, $\ell(ik), \ldots, \ell(kp)$ построенных на четырёх точках $i, j, k, p \in M$, где $\ell(ij) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$, связаны уравнением

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell^2(ij) & \ell^2(ik) & \ell^2(ip) \\ 1 & \ell^2(ij) & 0 & \ell^2(jk) & \ell^2(jp) \\ 1 & \ell^2(ik) & \ell^2(jk) & 0 & \ell^2(kp) \\ 1 & \ell^2(ip) & \ell^2(jp) & \ell^2(kp) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

[1]Наряду с термином *физическая структура* используются так же термин *феноменологически симметричная геометрия двух множеств* или сокращённо *геометрия двух множеств*.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009).

Данное тождество является следствием равенства нулю трёхмерного объёма тетраэдра, построенного на четырёх точках. Тождество естественно обобщается на многомерный случай как для произвольного набора $n+2$ точек пространства $\mathbb{R}^n$, так и для наборов $n+2$ точек, лежащих на поверхности n-мерной сферы [5].

Другие тождества возникают в физических структурах на двух множествах [1]. Например [6], для произвольной группы $\langle G; \cdot, ^{-1}, e\rangle$ можно рассмотреть отображение $F : G^4 \to G$, вида

$$F(g_{ik}, g_{jk}, g_{jm}, g_{im}) = g_{ik} \cdot g_{jk}^{-1} \cdot g_{jm} \cdot g_{im}^{-1},$$

которое тождественно равно $e \in G$ для произвольных $i, j \in M \subseteq G$ и $k, m \in N \subseteq G$, если в качестве функции $g : M \times N \to G$, взять функцию

$$g(i, k) = g_{ik} = i \cdot k. \tag{1}$$

Отметим, что первоначально в тождествах физических структур участвовали достаточно гладкие функции. Но как показывает данный пример, понятие «физические структуры» может быть распространено на алгебраические объекты без предположения наличия топологии.

Приведённые примеры являются примерами бинарных физических структур на одном и двух множествах. «Бинарность» означает, что функции построены на двух точках $i, j \in M$ для $\ell(ij)$ или $i \in M, k \in N$ для (1). Кроме того, физические структуры (далее ФС) имеют числовую характеристику — ранг r, совпадающий с минимальным количеством точек на которых строится тождество. Так в примере с евклидовой плоскостью соответствующий ранг ФС равен 4, (на четырёх точках тождество–определитель обращается в ноль). В примере с групповым умножением, ранг ФС $r = (2, 2)$, так как в тождестве участвуют две точки из множества M и две точки из множества N.

Можно рассмотреть ФС большей арности. Например, тернарная ФС ранга 4 на одном множестве (см. § 6 Дополнения в [1]), строится над множеством $M = \mathbb{R}^2$ при помощи функции $g : M^3 \to \mathbb{R}$ вида

$$g(ijk) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} \tag{2}$$

и функции $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ вида

$$F(g(ijk), g(jkp), g(kpi), g(pij)) = g(ijk) - g(jkp) + g(kpi) - g(pij). \tag{3}$$

Тернарная ФС ранга $(3, 2)$ на двух множествах [7], строится при помощи функций $g : M^2 \times N \to \mathbb{R}$ и $F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, где

$$F(g(ij\alpha), g(ij\beta), g(jk\alpha), g(jk\beta), g(ki\alpha), g(ki\beta)) = \\ g(ij\alpha) - g(ij\beta) + g(jk\alpha) - g(jk\beta) + g(ki\alpha) - g(ki\beta), \quad (4)$$

для $i, j, k \in M$, $\alpha, \beta \in N$.

Тернарная ФС ранга $(2, 2, 2)$ на трёх множествах [8] строится при помощи функций $g : M \times N \times L \to \mathbb{R}$ и $F : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$, где

$$F(g(i\alpha a), g(i\beta a), g(j\alpha a), g(j\beta a), g(i\alpha b), g(i\beta b), g(j\alpha b), g(j\beta b)) \\ = g(i\alpha a) - g(i\beta a) - g(j\alpha a) + g(j\beta a) \\ - g(i\alpha b) + g(i\beta b) + g(j\alpha b) - g(j\beta b), \quad (5)$$

для $i, j \in M$, $\alpha, \beta \in N$, $a, b \in L$. В двух последних примерах, в соответствующих статьях [7] и [8] находились только функции F. О тернарной функции g ничего не говорилось, хотя легко убедиться, что при подстановке в F функции g в виде (2) получим тождественный ноль.

В данной работе, следуя наиболее общему определению физических структур [1, Гл. 4.], с учётом алгебраического подхода [6, 9], вводятся и исследуются n-арные алгебры Кулакова.

Статья имеет следующую структуру. В параграфе 2 приведены основные определения и понятия, связанные с алгебрами Кулакова: гомоморфизма, подалгебры, простой алгебры Кулакова, расширения и т.п. В параграфе 3 приводятся общие конструкции и строятся конкретные алгебры Кулакова, которые являются новыми. Основой для построения соответствующих тождеств являются универсальные свойства определителя — линейность, кососимметричность и, как следствие, тождественное равенство нулю при сужении определителя на собственное подпространство векторного пространства. При этом существенно используется формула Лапласа разложения определителя по выделенному набору строк (см. [10], §2.4.). В параграфе 4 рассматриваются группы преобразований алгебр Кулкакова.

§2. Определения

Определение 1 ([11, Гл. 1, § 3]). Если алгебраическая система определена не на одном множестве A, а на нескольких $A_1, \ldots, A_n$, т.е. носитель алгебры состоит более чем из одного множества, то такая алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_n; \Omega \rangle$ называется *многосортной (n–сортной)*[2], где Ω — сигнатура алгебры $\mathfrak{A}$ (множество основных операций алгебры $\mathfrak{A}$).

Определение 2 ([12, § 2.2.]). Если в алгебре $\mathfrak{A}$ определены частичные операции $f_i^{(\tau)} \in \Omega$, действующие не на всём множестве, то такие алгебры называются *частичными*. Здесь τ — арность операции $f_i^{(\tau)}$.

Определение 3. В алгебре $\langle A; \Omega \rangle$ k–ая переменная в n–арной операции $f \in \Omega$ *существенна*, если найдутся наборы $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ такие, что $x_i = y_i$ при $i \neq k$ и $x_k \neq y_k$, для которых справедливо $f(x_1, \ldots, x_n) \neq f(y_1, \ldots, y_n)$.

В этом случае будем говорить, что операция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_k.

Для определения *алгебраической системы Кулакова* за основу возьмём определение Ю.И. Кулакова [1, 2], но при этом откажемся от конкретизации рассматриваемых множеств, и, следуя [6, 9], определим многосортную алгебраическую систему.

Определение 4. Частичная $(n+1)$–сортная алгебра $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, B; g, F, \varepsilon \rangle$, с нульарной операцией ε и частичными операциями

$$g : \mathfrak{N}_1^{p_1} \times \ldots \mathfrak{N}_n^{p_n} \to B, \quad F : B^k \to B,$$

в которых все переменные существенные, *задаёт* p–арную алгебру Кулакова ранга $(k_1, \ldots, k_n)$, где $k = \frac{k_1!}{(k_1-p_1)!} \cdot \ldots \cdot \frac{k_n!}{(k_n-p_n)!}$ и $p = p_1 + \ldots + p_n$, если существуют подмножества $\widehat{\mathfrak{N}_i^{k_i}} \subseteq \mathfrak{N}_i^{k_i}$ такие, что выполнена следующая аксиома

K1. Для любых $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik_i}) \in \widehat{\mathfrak{N}_i^{k_i}}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, справедливо

$$F\left(g(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{np_n}), \ldots, g(\alpha_{1k_1}, \ldots, \alpha_{nk_n})\right) = \varepsilon. \tag{6}$$

Аксиома K1 составляет суть *феноменологической симметрии*[3] [1, Гл. 4] и дополняется аксиомами:

K2. Для произвольных перестановок $\pi_i : (1, \ldots, k_i) \to (1, \ldots, k_i)$, если $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik_i}) \in \widehat{\mathfrak{N}_i^{k_i}}$, то $(\alpha_{i\pi_i(1)}, \ldots, \alpha_{i\pi_i(k_i)}) \in \widehat{\mathfrak{N}_i^{k_i}}$.

---

[2] Иногда говорят *многоосновной, многобазисной.*

[3] Первоначально называлась *обобщённой инвариантностью* .

Аксиома K2 означает, что соотношение (6) инвариантно относительно порядка элементов в кортежах.

Кроме того, могут накладываться дополнительные условия. Например, условие того, что значения функции g, построенные на точках $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p_1} \in \mathfrak{N}_1, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{np_n} \in \mathfrak{N}_n$ и отличающиеся только их перестановкой (внутри каждого множества $\mathfrak{N}_i$), функционально зависимы.

K3. Для произвольных перестановок $\pi_i : (1, \ldots, p_i) \to (1, \ldots, p_i)$ существует функция $f_{\pi_1,\ldots,\pi_n} : B \to B$ такая, что

$$g(\alpha_{1\pi_1(1)}, \ldots, \alpha_{1\pi_1(p_1)}, \ldots, \alpha_{n\pi_n(1)}, \ldots, \alpha_{n\pi_n(p_n)}) = f_{\pi_1,\ldots,\pi_n}\big(g(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p_1}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{np_n})\big).$$

В этом случае функция $F : B^k \to B$ для p-арной алгебры Кулакова ранга $(k_1, \ldots, k_n)$, будет зависеть от меньшего числа переменных, т.к. теперь

$$k = \frac{k_1!}{p_1!(k_1 - p_1)!} \cdot \ldots \cdot \frac{k_n!}{p_n!(k_n - p_n)!}.$$

В частности, для бинарных физических структур на одном множестве было показано [13], что, если $g(ij)$ и $g(ji)$ функционально связаны, то при соответствующем выборе переменных функция g будет симметричной или антисимметричной $g(ij) = \pm g(ji)$.

Следуя [11, Гл. 1], определим гомоморфизмы алгебр Кулакова.

Определение 5. Набор отображений

$$\lambda_i : \mathfrak{N}_i \to \mathfrak{N}', \quad \psi : B \to B'$$

для $i \in \{1, \ldots, n\}$ *задаёт* гомоморфизм $(n+1)$–сортной алгебры Кулакова $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, B;\ g, F, \varepsilon \rangle$ в алгебру $\langle \mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_n, B'; g',\ F',\ \varepsilon' \rangle$, если $\psi(\varepsilon) = \varepsilon'$, а диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle \lambda_1\times\ldots\times\lambda_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_n & \xrightarrow{g'} & B' \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} B^k & \xrightarrow{F} & B \\ {\scriptstyle\psi^k}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ B'^k & \xrightarrow{F'} & B' \end{array}$$

коммутативны.

Если отображения $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \psi)$ биективны, то они задают изоморфизм алгебр Кулакова.

Естественным образом можно определить подалгебры Кулакова.

Определение 6. Алгебра $\langle \mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_n, B'; g', F', \varepsilon' \rangle$, является *сужением* алгебры $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, B; g, F, \varepsilon \rangle$ на подалгебру (соответственно алгебра $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, B; g, F, \varepsilon \rangle$ является*расширением* алгебры $\langle \mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_n, B'; g', F', \varepsilon' \rangle$), если справедливо $\mathfrak{N}'_k \subseteq \mathfrak{N}_k$, $B' \subseteq B$, $\varepsilon' = \varepsilon$, а сами операции g', F' совпадают с соответствующими ограничениями $g|_{\mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_n}$ и $F|_{B'}$.

Определение 7. Если ранги алгебры $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, B; g, F, \varepsilon \rangle$ и её сужения $\langle \mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_n, B'; g', F', \varepsilon' \rangle$ совпадают, то такую подалгебру будем называть *подалгеброй Кулакова.*

Определение 8. p-арная алгебра Кулакова $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, B; g, F, \varepsilon \rangle$ ранга $(k_1, \ldots, k_n)$ называется *простой*, если при заданной функции g не существует функций $\widetilde{F}$ с меньшими значениями k_i.

В частности над группой $\langle G; \cdot, ^{-1}, e \rangle$ при помощи функции (1) можно построить простую бинарную алгебру Кулакова ранга $(2, 2)$, но с той же функцией g остальные алгебры ранга $(r, s) \neq (2, 2)$ уже не являются простыми [6].

§3. Частные решения

3.1. Тождество Лапласа. Напомним, что определитель $\det A$ матрицы A порядка n можно найти по формуле Лапласа (см. [10], §2.4.):

$$\det A = \sum_{j_1, \ldots, j_p} A \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_p \\ j_1 \ldots j_p \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} i_{p+1} \ldots i_n \\ j_{p+1} \ldots j_n \end{pmatrix} (-1)^{i+j}, \tag{7}$$

где $i_1 < \ldots < i_p$ — фиксированные номера p строк матрицы A, $i_{p+1} < \ldots < i_n$ номера дополнительных строк, $j_1 < \ldots < j_p$ — номера p столбцов матрицы A, $j_{p+1} < \ldots < j_n$ номера дополнительных столбцов, $i = i_1 + \ldots + i_p$, $j = j_1 + \ldots + j_p$, $A \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_p \\ j_1 \ldots j_p \end{pmatrix}$ — минор на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_p$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_p$, $A \begin{pmatrix} i_{p+1} \ldots i_n \\ j_{p+1} \ldots j_n \end{pmatrix}$ — минор на пересечении строк с номерами $i_{p+1}, \ldots, i_n$ и столбцов с номерами $j_{p+1}, \ldots, j_n$ и произведение берется по всевозможным наборам $j_1 < \ldots < j_p$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* x_i^j *— переменные,* $i = 1, \ldots, 2n$, $j = 1, \ldots, n$,

$$V(i_1, \ldots, i_n) = \begin{vmatrix} x_{i_1}^1 & \ldots & x_{i_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^n & \ldots & x_{i_n}^n \end{vmatrix},$$

где $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, 2n\}$. *Тогда функции*

$$V(1, 2, \dots, n-1, k), \quad V(n, \dots, \hat{k}, \dots, 2n), \quad k = n, \dots, 2n$$

связаны единственным функциональным равенством

$$\sum_{k=n}^{2n} (-1)^{k-n} V(1, 2, \dots, n-1, k) V(n, \dots, \hat{k}, \dots, 2n) = 0, \tag{8}$$

где обозначение $\hat{k}$ *означает, что индекс* k *пропущен.*

Доказательство. Применяя тождество Лапласа к первым n строкам определителя

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_{n-1}^1 & x_n^1 & x_{n+1}^1 & \dots & x_{2n}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n & x_{n+1}^n & \dots & x_{2n}^n \\ 0 & \dots & 0 & x_n^1 & x_{n+1}^1 & \dots & x_{2n}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n^n & x_{n+1}^n & \dots & x_{2n}^n \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

получаем тождество (8). Покажем, что все остальные тождества, связывающие $V(1, 2, \dots, n-1, k)$, $V(n, \dots, \hat{k}, \dots, 2n)$, $k = n, \dots, 2n$ функционально выражаются через (8).

Приведем рассуждение, основанное на идее действия группы на множестве. А именно, действие общей линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = Ax$$

индуцирует действие на определителях $V(i_1, \dots, i_n)$ порядка n:

$$V \mapsto \Delta \cdot V, \quad \Delta = \det(A).$$

Соответственно, действие прямого произведения $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$ на векторном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ax \\ By \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad A, B \in GL(n, \mathbb{R})$$

индуцирует действие на определителях порядка $2n$:

$$W \mapsto \Delta \cdot W, \quad \Delta = \det(A) \cdot \det(B).$$

Если взять матрицу

$$A = \begin{pmatrix} x^1_{n+1} & \dots & x^1_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n_{n+1} & \dots & x^n_{2n} \end{pmatrix}^{-1},$$

то определитель (9) под действием $A \times A$ перейдет в определитель

$$\begin{vmatrix} z^1_1 & \dots & z^1_{n-1} & z^1_n & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^n_1 & \dots & z^n_{n-1} & z^n_n & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & z^1_n & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z^n_n & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (10)$$

и для него тождество (8) совпадает с формулой разложения определителя

$$\zeta = \begin{vmatrix} z^1_1 & \dots & z^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^n_1 & \dots & z^n_n \end{vmatrix}$$

по последнему столбцу. Следовательно, равенство (8) в данном случае совпадает со стандартным аналитическим выражением определителя как функции элементов матрицы и является единственной аналитической зависимостью между функцией ζ и переменными z^j_i, $i, j = 1, \dots, n$. Обратное преобразование групп $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^{2n}$ и $GL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$ с матрицами $A^{-1} \times A^{-1}$ и A^{-1} приводит к единственной функциональной зависимости (8) для функций $V(1, 2, \dots, n-1, k)$, $V(n, \dots, \hat{k}, \dots, 2n)$, $k = n, \dots, 2n$.

Теорема доказана.

Пример 1. При $n = 2$ тождество (8) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Дадим геометрическую интерпретацию этого тождества. Пусть $\alpha(i, j)$ — ориентированная величина угла A_iOA_j при вершине O, где $A_i = (x_i, y_i)$, $A_j = (x_j, y_j)$. Тогда

$$S(i, j) = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \cdot \sqrt{x_j^2 + y_j^2} \cdot \sin \alpha(i, j)$$

и тождество (11) примет вид

$$S(1,2)S(3,4)+S(1,4)S(2,3)+S(1,3)S(4,2)=0$$

или

$$\sin\alpha(1,2)\sin\alpha(3,4)+\sin\alpha(1,4)\sin\alpha(2,3)+\\ \sin\alpha(1,3)\sin\alpha(4,2)=0 \quad (12)$$

после сокращения на произведение $\prod_{k=1}^{4}\sqrt{x_k^2+y_k^2}$. Тождество (12) можно непосредственно проверить исходя из стандартных тригонометрических тождеств. Для этого достаточно заметить, что углы $\alpha(1,2)$, $\alpha(2,3)$, $\alpha(3,4)$ — независимые величины, а углы $\alpha(4,1)$, $\alpha(4,2)$, $\alpha(1,3)$ выражаются по формулам

$$\alpha(4,1)=2\pi-\alpha(1,2)-\alpha(2,3)-\alpha(3,4),$$
$$\alpha(4,2)=2\pi-\alpha(2,3)-\alpha(3,4),$$
$$\alpha(1,3)=\alpha(1,2)+\alpha(2,3).$$

Отметим, что (12) можно рассматривать как тождество на окружности, связывающее три произвольные точки или три произвольных ориентированных угла.

Обратно, из тождества (12) можно получить стандартные тригонометрические соотношения для $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$. Например, если в (12) положить $\alpha(2,3)=\pi/2$, то по модулю очевидных равенств $\sin(\alpha+\pi/2)=\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha)$, $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ получим формулу

$$\cos(\alpha(1,2)+\alpha(3,4))=\cos(\alpha(1,2))\cos(\alpha(3,4))\\ -\sin(\alpha(1,2))\sin(\alpha(3,4)).$$

Итак, квадратичное тождество (11) для определителей второго порядка равносильно стандартным тригонометрическим тождествам.

Замечание 1. Тензор Римана (см. [14], Ч. 2 § 9) удовлетворяет соотношению

$$R^i_{j,kl}+R^i_{l,jk}+R^i_{k,lj}=0,$$

которое, как легко видеть, является аналогом тождества (11).

Пример 2. При $n=3$ тождество (8) принимает вид

$$V(123)V(456)-V(124)V(563)+\\ V(125)V(634)-V(126)V(345)=0, \quad (13)$$

где

$$V(\alpha jk) = \begin{vmatrix} x_\alpha & x_j & x_k \\ y_\alpha & y_j & y_k \\ z_\alpha & z_j & z_k \end{vmatrix} \qquad (14)$$

— ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, (x_j, y_j, z_j), (x_k, y_k, z_k).

Замечание 2. Интересно было бы получить из тождества (13) стандартные тригонометрические соотношения [15] для сферической геометрии: теоремы синусов и косинусов.

Аналогично построим тернарную алгебру Кулакова $\langle \mathbb{R}^3, \mathbb{R}; V, F_6, 0\rangle$ ранга 6. Применяя формулу Лапласа к матрице

$$D_6 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ 0 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ 0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{pmatrix},$$

получим тождество

$$F_6 = V(123)V(456) - V(124)V(356) + V(125)V(346) - \\ V(126)V(345) + V(134)V(256) - V(135)V(246) + V(136)V(245) + \\ V(145)V(236) - V(146)V(235) + V(156)V(234) = 0. \qquad (15)$$

Легко проверить, что (15) разбивается на два тождества:

$$V(123)V(456) - V(124)V(356) + \\ V(125)V(346) - V(126)V(345) = 0, \qquad (16)$$

$$V(134)V(256) - V(135)V(246) + V(136)V(245) + \\ V(145)V(236) - V(146)V(235) + V(156)V(234) = 0, \qquad (17)$$

где (16) совпадает с тождеством (13). Но каждое из этих тождеств зависит от меньшего числа переменных.

В результате возникает дополнительная возможность классификации алгебр Кулакова. С одной стороны это алгебры обладающие *элементарными тождествами*, а с другой стороны — алгебры построенные при помощи *составных* тождеств, представляющие собой комбинации элементарных.

Определение 9. Тождество $F : B^n \to B$ от n переменных называется *элементарным*, если его нельзя представить в виде функции с существенными переменными $\psi : B^k \to B$ от других тождеств $F_i : B^{n_i} \to B$, зависящих от меньшего числа $n_i < n$ тех же переменных

$$F(x_1, \ldots, x_n) \neq \psi(F_1(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1), \ldots, F_k(x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k)),$$

где $x_j^i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Можно предположить, что все алгебры Кулакова, не являющиеся простыми, обладают только составными тождествами. Обратное утверждение, как видим, не верно.

Теорема 2. *Функция* $V : \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2^2 \to \mathbb{R}$ *определённая в виде* (14) *задаёт тернарную алгебру Кулакова* $\langle \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathbb{R}; V, F_{(2,4)}, 0\rangle$ *ранга* $(2,4)$ *с элементарным тождеством:*

$$\begin{aligned} F_{(2,4)} = V(\alpha ij)V(\beta k\ell) - V(\alpha ik)V(\beta j\ell) + V(\alpha i\ell)V(\beta jk) + \\ V(\alpha jk)V(\beta i\ell) - V(\alpha j\ell)V(\beta ik) + V(\alpha k\ell)V(\beta ij) = 0, \end{aligned}$$

справедливым для произвольных $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}_1$ *и* $i, j, k, \ell \in \mathfrak{N}_2$.

Доказательство. Тождество $F_{(2,4)}$ получим расписывая определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} x_\alpha & 0 & x_i & x_j & x_k & x_\ell \\ y_\alpha & 0 & y_i & y_j & y_k & y_\ell \\ z_\alpha & 0 & z_i & z_j & z_k & z_\ell \\ 0 & x_\beta & x_i & x_j & x_k & x_\ell \\ 0 & y_\beta & y_i & y_j & y_k & y_\ell \\ 0 & z_\beta & z_i & z_j & z_k & z_\ell \end{pmatrix}$$

при помощи формулы Лапласа. В элементарности тождества можно убедиться рассуждением, аналогичным в доказательстве теоремы 1.

□

3.2. p**-арные алгебры ранга** $(k_1, \ldots, k_n)$**.** Для упрощения записи введём функцию $\{\} : \mathfrak{N}^{n+1} \times \mathbb{Z}_{n+1} \to \mathfrak{N}^n$, отвечающую за циклический сдвиг:

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}^i = (\alpha_i, \ldots, \alpha_{i+n-1})$$

так, что

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}^1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}^{n+1} = (\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n-1}). \quad (18)$$

Теорема 3. *Функции* $g : \mathfrak{N}_1^{p_1} \times \ldots \times \mathfrak{N}_n^{p_n} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *вида*

$$g(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{np_n}) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x^1_{\alpha_{11}} & \ldots & x^1_{\alpha_{1p_1}} & x^1_{\alpha_{21}} & \ldots & x^1_{\alpha_{np_n}} \\ x^2_{\alpha_{11}} & \ldots & x^2_{\alpha_{1p_1}} & x^2_{\alpha_{21}} & \ldots & x^2_{\alpha_{np_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{p-1}_{\alpha_{11}} & \ldots & x^{p-1}_{\alpha_{1p_1}} & x^{p-1}_{\alpha_{21}} & \ldots & x^{p-1}_{\alpha_{np_n}} \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} (-1)^I \cdot g(\{\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p_1}\}^{i_1}, \ldots, \{\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{np_n}\}^{i_n}), \quad (20)$$

где $p_i \geq 1$, $k = \prod_{i=1}^{n}(p_i + 1)$, $p = p_1 + \ldots + p_n$, $\alpha_{ij} \in \mathfrak{N}_i$ *и* $I = \sum_{j=1}^{n} i_j$ *на множествах* $\mathfrak{N}_i = \mathbb{R}^{p-1}$, $i = 1, \ldots, n$, *задают* p*–арную алгебру Кулакова* $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, \mathbb{R}; g, F, 0\rangle$ *ранга* $(p_1 + 1, \ldots, p_n + 1)$

Доказательство утверждения следует из того факта, что функция (20) представима в виде определителя, построенного на точках

$$\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1,p_1+1} \in \mathfrak{N}_1; \ldots; \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{n,p_n+1} \in \mathfrak{N}_n$$

и тождественно равного нулю:

$$F(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nk_n}) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ x^1_{\alpha_{11}} & \ldots & x^1_{\alpha_{1(p_1+1)}} & x^1_{\alpha_{21}} & \ldots & x^1_{\alpha_{n1}} & \ldots & x^1_{\alpha_{n(p_n+1)}} \\ x^2_{\alpha_{11}} & \ldots & x^2_{\alpha_{1(p_1+1)}} & x^2_{\alpha_{21}} & \ldots & x^2_{\alpha_{n1}} & \ldots & x^2_{\alpha_{n(p_n+1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{p-1}_{\alpha_{11}} & \ldots & x^{p-1}_{\alpha_{1(p_1+1)}} & x^{p-1}_{\alpha_{21}} & \ldots & x^{p-1}_{\alpha_{n1}} & \ldots & x^{p-1}_{\alpha_{n(p_n+1)}} \end{vmatrix}. \quad (21)$$

$\square$

В частном случае тернарной алгебры Кулакова ранга $(2,2,2)$ функция F строится при помощи определителя

$$F(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{31},\alpha_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1_{\alpha_{11}} & x^1_{\alpha_{12}} & x^1_{\alpha_{11}} & x^1_{\alpha_{22}} & x^1_{\alpha_{31}} & x^1_{\alpha_{32}} \\ x^2_{\alpha_{11}} & x^2_{\alpha_{12}} & x^2_{\alpha_{11}} & x^2_{\alpha_{22}} & x^2_{\alpha_{31}} & x^2_{\alpha_{32}} \end{vmatrix}$$

и совпадает с функцией (5).

Как легко видеть, из общего выражения (21) получаются частные (3) и (4) для соответствующих тернарных алгебр рангов $r = 4$ и $r = (3,2)$.

Теорема 4. *Если определена p–арная алгебра Кулакова $\langle \mathfrak{N}_1,\ldots,\mathfrak{N}_n,B;\ g,F,\varepsilon\rangle$ ранга $(p_1+1,\ldots,p_n+1)$, то для произвольного $i\in\{1,\ldots,n\}$ можно построить p–арную алгебру Кулакова $\langle \mathfrak{N}_1,\ldots,\mathfrak{N}_n,B;\ g,\widetilde{F},\varepsilon\rangle$ ранга $(p_1+1,\ldots,p_i+2,\ldots,p_n+1)$*

Доказательство. Построим функцию $\widetilde{F}$. Для того, чтобы в функцию $\widetilde{F}$ вошли значения функции g, построенные на всех $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{i,p_i+2}\in\mathfrak{N}_i$, достаточно рассмотреть функции F, построенные на кортежах $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ip_i},\alpha_{i,p_i+1}\in\mathfrak{N}_i$, $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ip_i},\alpha_{i,p_i+2}\in\mathfrak{N}_i$ и $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{i,p_i-1},\alpha_{i,p_i+1},\alpha_{i,p_i+2}\in\mathfrak{N}_i$. Тогда при помощи произвольного отображения $\psi : B^3\to B$ с существенной зависимостью по каждой переменной и условием, что только тройка $(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)$ отображается в $\varepsilon=\psi(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)$, построим искомое отображение $\widetilde{F}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(\ldots,\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{i,p_i+2},\ldots) = \psi\big(&F(\ldots,\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ip_i},\alpha_{i,p_i+1},\ldots),\\ &F(\ldots,\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ip_i},\alpha_{i,p_i+2},\ldots),\\ &F(\ldots,\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{i,p_i-1},\alpha_{i,p_i+1},\alpha_{i,p_i+2},\ldots)\big).\end{aligned}$$

$\square$

Итак, для произвольной алгебры Кулакова, при помощи составного тождества всегда можно построить алгебру большего ранга.

§4. Группы преобразований алгебр Кулакова

Для бинарных физических структур в работах [16, 17] была установлена эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, а также связь с кратно транзитивными группами [9, 18]. Иными словами, если известна бинарная физическая структура, определённая на одном или двух множествах, то функция $g : \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_1 \to \mathbb{R}$ или $g : \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \to \mathbb{R}$ инвариантна относительно действия r–параметрической группы преобразований $\theta : \mathfrak{N}_1 \times \mathbb{R}^r \to \mathfrak{N}_1$, $\chi : \mathfrak{N}_2 \times \mathbb{R}^r \to \mathfrak{N}_2$ так, что справедливо

$$g(\theta(i, a_1, \ldots, a_r), \theta(j, a_1, \ldots, a_r)) = g(i, j),$$

или

$$g(\theta(i, a_1, \ldots, a_r), \chi(\alpha, a_1, \ldots, a_r)) = g(i, \alpha),$$

где $i, j \in \mathfrak{N}_1$, $\alpha \in \mathfrak{N}_2$, $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$. При этом установлено, что между рангом физической структуры и числом параметров r группы преобразований есть взаимнооднозначное соответствие.

Аналогично будем говорить, что n–арная алгебра Кулакова допускает r–параметрическую группу движений, если имеются такие отображения

$$\theta_k : \mathfrak{N}_k \times \mathbb{R}^r \to \mathfrak{N}_k,$$

задающие группы преобразований $(\theta_k, \mathfrak{N}_k)$, где $k = 1, \ldots, n$, для которых справедливо

$$g(\theta_1(\alpha_{11}, \mathbf{a}), \ldots, \theta_n(\alpha_{np_n}, \mathbf{a})) = g(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{np_n}),$$

где $\alpha_{ki} \in \mathfrak{N}_k$ и $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r$.

Например, функция (2) инвариантна относительно преобразования

$$\theta(x, y, a_1, \ldots, a_6) = \big(\theta^1(x, y, \mathbf{a}), \theta^2(x, y, \mathbf{a})\big) = \big(a_1 + a_2 x + a_3 y, a_4 + a_5 x + a_6 y\big),$$

где $a_2 a_6 - a_5 a_3 = 1$, задающего пяти–параметрическую группу преобразований плоскости. В этом легко убедиться, переписав данное преобразование в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta^1(x_i, y_i, \mathbf{a}) & \theta^1(x_j, y_j, \mathbf{a}) & \theta^1(x_k, y_k, \mathbf{a}) \\ \theta^2(x_i, y_i, \mathbf{a}) & \theta^2(x_j, y_j, \mathbf{a}) & \theta^2(x_k, y_k, \mathbf{a}) \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{pmatrix} \right|.$$

Теорема 5. *Функция* (19) *p–арной алгебры Кулакова* $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, \mathbb{R}; g, F, 0\rangle$ *ранга* $(p_1+1, \ldots, p_n+1)$ *инвариантна относительно действующей в пространстве* $\mathbb{R}^{p-1}$ *группы* $\mathbb{R}^{p-1} \rightthreetimes SL_{p-1}(\mathbb{R})$.

Доказательство следует из задания преобразования пространства $\mathbb{R}^{p-1}$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{a} & M_{p-1}(\mathbb{R}) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{p-1}$, $\mathbf{0}^T$ — строка нулей, $M_{p-1}(\mathbb{R}) \in SL_{p-1}(\mathbb{R})$ — матрица с единичным определителем. □

Например, функция g вида (14) тернарной алгебры $\langle \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathbb{R}; V, F_{(2,4)}, 0\rangle$ ранга $(2,4)$ инвариантна относительно группы $SL_3(\mathbb{R})$.

§5. Заключение

Для бинарных физических структур на одном и том же множестве существует несколько неэквивалентных решений, обладающих разной группой движений одинаковой размерности. Возникают закономерные вопросы — существуют ли тернарные алгебры Кулакова с отличающейся от $\mathbb{R}^2 \rightthreetimes SL_2(\mathbb{R})$ и $SL_3(\mathbb{R})$ группами и чем определяется размерность такой группы?

Изначально рассматривались физические структуры в которых значения функции g, построенные на разных перестановках связаны между собой, т.е. для бинарных $g(ij) = \psi(g(ji))$ или тернарных $g(ijk) = \psi_1(g(jik)) = \psi_2(g(kji))$. Существуют ли простые алгебры Кулакова с элементарными тождествами свободные от такой связи?

Г.Г. Михайличенко доказал классификационную теорему (общий обзор результатов см. в [19]) для бинарных физических структур на двух множествах, из которой следует их существование для рангов $(2,4)$, (n,n), $(n,n+1)$ при условии $n \geqslant 2$. Кроме того, он же нашёл тернарные физические структуры ранга (4) на одном, $(2,3)$ на двух и $(2,2,2)$ на трёх множествах. В теореме 2 мы показали существование простой тернарной алгебры Кулакова ранга $(2,4)$ с элементарным тождеством. Остаётся открытым вопрос: существуют ли другие простые тернарные алгебры Кулакова с элементарным тождеством?

Статья родилась из первоначального пожелания Г.Г. Михайличенко рассмотреть некоторые групповые вопросы n–арных физических структур, но внезапная его кончина помешала реализации этих планов. Светлой памяти Геннадия Григорьевича Михайличенко — удивительного ученого, стоявшего у истоков теории физических структур, авторы посвящают эту статью.

Список литературы

1. *Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур (дополнение Г.Г. Михайличенко).* Новосибирск: НГУ, 1968 г., 226.

2. *Кулаков Ю.И.* Об одном принципе, лежащем в основании классической физики // *Докл. АН СССР.* 1970. Т.193, № 1. С. 72–75.

3. *Кулаков Ю.И.* Математическая формулировка теории физических структур // *Сиб. матем. журн.* 1971. Т.12, № 5. С. 1142–1145.

4. *Кулаков Ю.И. Теория физических структур.* Новосибирск: Альфа Виста, 2004.

5. *Тихомиров В.М., Прасолов В.В. Геометрия.* М.: МЦНМО, 2019.

6. *Нещадим М.В., Симонов А.А.* Об алгебраических системах Кулакова на группах // *Сиб. матем. журн.* 2021. Т.62, № 6. С. 1357–1368.

7. *Михайличенко Г.Г.* Тернарная физическая структура ранга (3,2) // *Укр. мат. журн.* 1970. Т.22, № 6. С. 837–841.

8. *Михайличенко Г.Г.* Тернарная физическая структура ранга (2,2,2).*Изв. вузов. Математика.* 1976. Т.171, № 8. С. 60–67.

9. *Симонов А.А.* Псевдоматричные группы и физические структуры // *Сиб. матем. журн.* 2015. Т.56, № 1. С. 211–226.

10. *Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры.* М.: МЦНМО, 2015.

11. *Плоткин Б.И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных.* М.: Наука, 1991, 448.

12. *Мальцев А.И. Алгебраические системы,* М.: Наука, 1970, 392.

13. *Михайличенко Г.Г.* К вопросу о симметрии расстояния в геометрии // *Изв. вузов. Матем.* 1994. Т.383, № 4. С. 21–23.

14. *Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии.* М.: Наука, 1987.

15. *Сосинский А.Б. Геометрии.* М.: МЦНМО, 2018.

16. *Михайличенко Г.Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометриях // *Сиб. мат. журн.* 1984. Т.25, № 5. С. 99–113.

17. *Михайличенко Г.Г.* Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур) // *Докл. АН СССР.* 1985. Т.284, № 1. С. 39–43.

18. *Кыров В. А.* Кратно транзитивная группа Ли преобразований как физическая структура // *Матем. тр.* 2021. Т.24, № 2. С. 81–104.

19. *Михайличенко Г.Г. Математические основы и результаты теории физических структур.* Горно-Алтайск: РИЦ НГУ 2016.

Нещадим Михаил Владимирович
Институт математики
им. С.Л.Соболева СОРАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: `neshch@math.nsc.ru`
Симонов Андрей Артемович
Новосибирский гос. univeритет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: `a.simonov@g.nsu.ru`

Поступила в редакцию
12 апреля 2022 г.
Получена после доработки
10 сентября 2022 г.
Принята к публикации
2 ноября 2022 г.