УДК 517.9

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

© 2023 М. В. Нещадим[1,2a], А. А. Симонов[2b]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]neshch@math.nsc.ru, [b]a.simonov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 23.07.2023 г.; после доработки 12.10.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

Исследуется система уравнений, которая получена на основе релятивистского уравнения Шредингера и связывает функции потенциала, амплитуды и фазы. Методами теории совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных находятся вполне интегрируемые системы, связывающие только две функции из указанных трёх. Найденные системы связаны преобразованиями Бэклунда.

Ключевые слова: релятивистское уравнение Шредингера, преобразования Бэклунда, условия совместности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.408

ВВЕДЕНИЕ

Для построения точных решений дифференциальных уравнений, исследования их симметрийных свойств и поисков законов сохранения используются методы группового анализа дифференциальных уравнений [1–4], метод дифференциальных подстановок [5] и, более общим образом, метод преобразований Ли—Бэклунда [6, 7] в пространстве джетов продолженного уравнения [8, 9]. На практике, как правило, встречаются более частные случаи преобразований Ли—Бэклунда — дифференциальные соответствия между двумя системами дифференциальных уравнений, получившие название преобразований Бэклунда [10–12]. Такие соответствия представляют собой дифференциальную связь между двумя системами дифференциальных уравнений, позволяющую по известному решению одной системы конструктивно находить решение второй системы. Преобразования Бэклунда для определённых уравнений имеют как правило именное название: каскадный метод Лапласа, преобразование Эйлера—Дарбу, преобразование Бианки, преобразование Мутара, метод билинейных уравнений Хироты и т. д. [2–4, 13, 14]. Так, например, преобразование Коула—Хопфа связывает уравнение теплопроводности и уравнение Бюргерса [15]. Преобразование Миуры связывает мКдФ и КдФ [16]. Отметим, что прямое и обратное преобразования Бэклунда, как правило, имеют разные качественные свойства. Так, например, дифференциальная подстановка Коула—Хопфа $u = 2v_x/v$ переводит уравнение теплопроводности $v_t = v_{xx}$ в уравнения Бюргерса $u_t = uu_x + u_{xx}$, а обратный переход связан с нелокальным разрешением $v = \exp(-\frac{1}{2}\int udx)$. На преобразовании Коула—Хопфа основан метод прогонки [17]. С помощью этой замены были найдены общие

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

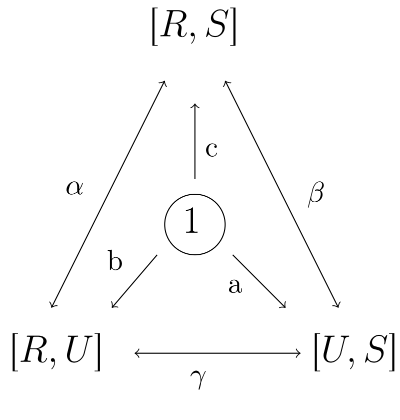
решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений второго порядка для горизонтально-слоистых сред [18–21]. Преобразования Бэклунда используются при построении солитонных решений нелинейных уравнений, изучении симметрий и законов сохранения, а также являются важнейшим инструментом при изучении уравнений в частных производных и представляют собой отображения, связывающие разные решения этих уравнений [13]. Ранние исследования таких отображений для нелинейного уравнения Шредингера можно найти в [22–24]. Интерес к преобразованиям Бэклунда обусловлен также обнаруженными связями с квантовыми интегрируемыми системами и феноменом разделения переменных [25, 26]. Нахождение соответствий Бэклунда для актуальных уравнений математической физики есть трудоёмкая самостоятельная задача. Примеры преобразований Бэклунда и их применение можно найти в [13, 14, 27].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение Клейна—Гордона—Фока [28] (релятевистское уравнение Шредингера):

$$W_{tt} = W_{xx} + UW, \tag{1}$$

где $W = Re^{iS}$, i — мнимая единица и U, R, S — некоторые вещественнозначные функции переменных t, x. Для сокращения записи используются обозначения $W_t = \frac{\partial W}{\partial t}$, $W_{tt} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, $W_x = \frac{\partial W}{\partial x}$, $W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ и т. д. для частных производных. Функции U, R, S называются соответственно, потенциалом, амплитудой и фазой. Рассматривается задача исключения из соотношения (1) одной из функций U, R, S. Такие преобразования являются частью общей теории переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных. Условно такие преобразования можно выразить следующей диаграммой



где через $[R, U]$, $[U, S]$, $[R, S]$ обозначены системы дифференциальных уравнений, полученные исключением функций S, R, U из уравнения (1), стрелки a, b, c соответствуют исключению функций R, S, U из уравнения (1), а стрелки α, β, γ по сути являются преобразованиями Бэклунда.

Отметим, что аналогичная задача была рассмотрена в работе [29] для классического уравнения Шредингера.

Уравнение (1) для комплекснозначной функции W равносильно системе двух вещественных уравнений в виде системы

$$R_{tt} - RS_t^2 = R_{xx} - RS_x^2 + UR, \quad 2R_tS_t + RS_{tt} = 2R_xS_x + RS_{xx}. \tag{2}$$

В работе получены дифференциальные соотношения $[U, S]$ (теорема 1), содержащие только функции U, S, и соотношения $[U, R]$ (теорема 2), содержащие только функции U, R. При этом мы пользуемся алгоритмом теории совместности [30, 31] приведения в инволюцию переопределённой системы. Переход от соотношения $[U, S]$ к соотношению $[U, R]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для функции R и, фактически, представляет собой преобразования Бэклунда [10]. Обратный переход от соотношения $[U, R]$ к соотношению $[U, S]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для функции S и представляет собой обратное преобразование Бэклунда.

Если считать, что в (2) функции U, R известны, то это будет переопределённой системой на функцию S. Если U, S известны, то это будет переопределённой системой на функцию R. В каждом из этих случаев система (2) разрешима при дополнительных условиях — условиях совместности на известные функции. Основная цель данной работы — найти эти условия совместности. В качестве следствия получаются вполне интегрируемые системы, решение которых даёт точное решение уравнения (1).

Приведены примеры построения точных решений для системы $[R, S]$. Так как восстановление функции U по амплитуде R и фазе S — это решение обратной задачи, когда по рассеянной частице/волне с параметрами (R, S) можно восстановить вид потенциальной ямы U.

Все рассматриваемые функции предполагаются аналитическими.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ а — ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ R ИЗ СИСТЕМЫ (2)

Перепишем (2) в виде

$$R_{tt} = R_{xx} + R(S_t^2 - S_x^2 + U), \quad R_t = R_x \frac{S_x}{S_t} + R\frac{S_{xx} - S_{tt}}{2S_t}. \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции A, B, C, D_0, D_1, E_0, E_1, F_0, F_1, G_0, G_1, H_0, H_1 определяются по функциям $S = S(t, x)$, $U = U(t, x)$ следующей рекуррентной системой равенств:*

$$A = S_t^2 - S_x^2 + U, \quad B = \frac{S_x}{S_t}, \quad C = \frac{S_{xx} - S_{tt}}{2S_t}, \tag{4}$$

$$D_1 = \frac{B_t + 2BC + BB_x}{1 - B^2}, \quad D_0 = \frac{BC_x + C_t + C^2 - A}{1 - B^2}, \tag{5}$$

$$E_1 = B_x + BD_1 + C, \quad E_0 = C_x + BD_0, \tag{6}$$

$$F_1 = D_{1t} + D_1E_1 + D_0B, \quad F_0 = D_{0t} + D_1E_0 + D_0C, \tag{7}$$

$$G_1 = E_{1x} + E_1D_1 + E_0, \quad G_0 = E_{0x} + E_1D_0, \tag{8}$$

$$H_0 = \frac{G_0 - F_0}{F_1 - G_1}, \quad H_1 = BH_0 + C. \tag{9}$$

Тогда функции (S, U, R), где

1) функции (S, U) — решение уравнения

$$H_{1x} = H_{0t},$$

2) функция R — решение системы

$$R_x = H_0R, \quad R_t = H_1R,$$

совместной в силу 1), являются решением системы (2), и, следовательно, $W = Re^{iS}$ — решение уравнения Клейна—Гордона (1) с потенциалом U.

Доказательство. В силу обозначения (4) система (3) принимает вид

$$R_{tt} = R_{xx} + AR, \quad R_t = BR_x + CR. \tag{10}$$

Из второго соотношения (10) находим

$$R_{tx} = B_x R_x + BR_{xx} + C_x R + CR_x = BR_{xx} + (B_x + C)R_x + C_x R, \tag{11}$$

$$R_{tt} = B_t R_x + BR_{tx} + C_t R + CR_t =$$

в силу (10)

$$= B_t R_x + BR_{tx} + C_t R + CBR_x + C^2 R =$$

$$= BR_{tx} + (B_t + BC)R_x + (C_t + C^2)R =$$

в силу (11)

$$= B^2 R_{xx} + B(B_x + C)R_x + BC_x R + (B_t + BC)R_x + (C_t + C^2)R =$$

$$= B^2 R_{xx} + (B_t + 2BC + BB_x)R_x + (BC_x + C_t + C^2)R. \tag{12}$$

Из (10) и (12) получаем

$$R_{xx} + AR = B^2 R_{xx} + (B_t + 2BC + BB_x)R_x + (BC_x + C_t + C^2)R,$$

$$R_{xx} = \frac{B_t + 2BC + BB_x}{1 - B^2} R_x + \frac{BC_x + C_t + C^2 - A}{1 - B^2} R.$$

В силу обозначения (5)

$$R_{xx} = D_1 R_x + D_0 R. \tag{13}$$

В силу (13) соотношение (11) принимает вид

$$R_{tx} = BD_1 R_x + BD_0 R + (B_x + C)R_x + C_x R =$$

$$= (BD_1 + B_x + C)R_x + (BD_0 + C_x)R.$$

В силу обозначения (6)

$$R_{tx} = E_1 R_x + E_0 R. \tag{14}$$

Из (13) находим

$$R_{xxt} = D_{1t} R_x + D_1 R_{tx} + D_{0t} R + D_0 R_t.$$

В силу (10) и (14)

$$R_{xxt} = D_{1t} R_x + D_1 (E_1 R_x + E_0 R) + D_{0t} R + D_0 (BR_x + CR) =$$

$$= (D_{1t} + D_1 E_1 + D_0 B)R_x + (D_{0t} + D_1 E_0 + D_0 C)R.$$

В силу обозначения (7)

$$R_{xxt} = F_1 R_x + F_0 R. \tag{15}$$

Из (14) находим

$$R_{txx} = E_{1x} R_x + E_1 R_{xx} + E_{0x} R + E_0 R_x.$$

В силу (13)

$$R_{txx} = E_{1x} R_x + E_1 (D_1 R_x + D_0 R) + E_{0x} R + E_0 R_x =$$

$$= (E_{1x} + E_1 D_1 + E_0)R_x + (E_{0x} + E_1 D_0)R.$$

В силу обозначения (8)

$$R_{txx} = G_1 R_x + G_0 R. \tag{16}$$

Из (15) и (16) находим

$$F_1 R_x + F_0 R = G_1 R_x + G_0 R, \quad R_x = \frac{G_0 - F_0}{F_1 - G_1} R.$$

В силу обозначения (9)

$$R_x = H_0 R. \tag{17}$$

В силу (17) второе соотношение (10) принимает вид

$$R_t = (BH_0 + C)R.$$

В силу обозначения (9)

$$R_t = H_1 R. \tag{18}$$

Из (17) и (18), в силу условия совместности $R_{tx} = R_{xt}$, получаем

$$H_{1x} R + H_1 R_x = H_{0t} R + H_0 R_t.$$

В силу (17) и (18)

$$H_{1x} R + H_1 H_0 R = H_{0t} R + H_0 H_1 R,$$

то есть

$$H_{1x} = H_{0t}. \tag{19}$$

Соотношение (19) — искомое соотношение на функции S, U. При его выполнении функция R находится из совместной системы (17), (18).

Теорема доказана. □

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ b — ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ S ИЗ СИСТЕМЫ (2)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции A, B_1, B_2, D_1, D_2, D_3, D_4, E_1, E_2, E_3, E_4, F_1, F_2, F_3, F_5, F_6, F_7, F_8, G_1, G_2, G_3, G_4, H_1, H_3, H_5, H_6, H_7, H_8, ψ, φ определяются по функциям $R = R(t,x)$, $U = U(t,x)$ следующей рекуррентной системой равенств:*

$$A = \frac{R_{tt} - R_{xx}}{R} - U, \quad B_1 = 2\frac{R_x}{R}, \quad B_2 = -2\frac{R_t}{R}, \tag{20}$$

$$D_1 = \frac{A_t}{2A}, \quad D_2 = -\frac{B_2}{A}, \quad D_3 = \frac{A_x}{2A}, \quad D_4 = -\frac{B_1}{A}, \tag{21}$$

$$E_1 = D_3 - AD_4, \quad E_2 = D_4, \quad E_3 = D_1, \quad E_4 = D_2, \tag{22}$$

$$\begin{gathered}
F_1 = E_{1x} + E_3 D_1 + E_1^2 - 2AE_3E_4, \\
F_2 = E_3 D_2, \\
F_3 = E_{2x} + E_4 D_1 + 4E_1E_2 - 2E_3E_4 - 2AE_4^2, \\
F_5 = E_4 D_2 + 2E_4^2, \\
F_6 = E_{3x} + E_3 D_3 + E_1 E_3, \\
F_7 = E_{4x} + E_3 D_4 + E_4 D_3 + 3E_1E_4 + 3E_2E_3, \\
F_8 = E_4 D_4 + 5E_2E_4,
\end{gathered} \tag{23}$$

$$G_1 = E_3 - AE_4, \quad G_2 = E_4, \quad G_3 = E_1, \quad G_4 = E_2, \tag{24}$$

$$\begin{gathered}
H_1 = D_{1t} + D_3E_1 + D_1G_1 - 2AD_4G_3,\\
H_3 = D_{2t} + D_3E_2 + D_4E_1 + D_1G_2 + 3D_2G_1 -\\
2AD_4G_4 + 2D_4G_3,\\
H_5 = D_4E_2 + 3D_2G_2 + 2D_4G_4,\\
H_6 = D_{3t} + D_3E_3 + D_1G_3,\\
H_7 = D_{4t} + D_3E_4 + D_4E_3 + D_1G_4 + 3D_2G_3 + 2D_4G_1,\\
H_8 = D_4E_4 + 3D_2G_4 + 2D_4G_2,
\end{gathered} \tag{25}$$

$$\psi = \sqrt{w^2 - A}, \quad \varphi = \sqrt{A + \psi^2},$$

где w — решение алгебраического уравнения 10-й степени

$$((H_1 - F_1)w - F_2w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5)^2 =$$

$$(w^2 - A)((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4)^2.$$

Тогда функции (R, U, S), где
1) функции (R, U) — решение уравнения

$$\varphi_t = \psi_x,$$

2) функция S — решение системы

$$S_t = \varphi, \quad S_x = \psi,$$

совместной в силу 1), являются решением системы (11)*, и, следовательно, $W = Re^{iS}$ — решение уравнения Клейна—Гордона* (1) *с потенциалом U.*

Доказательство. Исключаем функцию S из (2)

$$S_t^2 = \frac{R_{tt} - R_{xx}}{R} - U + S_x^2, \quad S_{tt} = S_{xx} + 2\frac{R_x}{R}S_x - 2\frac{R_t}{R}S_t. \tag{26}$$

В силу обозначения (20) система (26) примет вид

$$S_t = \sqrt{A + S_x^2}, \quad S_{tt} = S_{xx} + B_1S_x + B_2\sqrt{A + S_x^2}. \tag{27}$$

Из первого соотношения системы (27) находим

$$S_{tx} = \frac{A_x + 2S_xS_{xx}}{2\sqrt{A + S_x^2}}, \tag{28}$$

$$S_{tt} = \frac{A_t + 2S_xS_{tx}}{2\sqrt{A + S_x^2}} =$$

в силу (28)

$$\begin{aligned}
&= \frac{A_t}{2\sqrt{A + S_x^2}} + \frac{S_x}{\sqrt{A + S_x^2}}\frac{A_x + 2S_xS_{xx}}{2\sqrt{A + S_x^2}} =\\
&= \frac{A_t}{2\sqrt{A + S_x^2}} + \frac{S_xA_x}{2(A + S_x^2)} + \frac{S_x^2S_{xx}}{A + S_x^2}.
\end{aligned} \tag{29}$$

В силу (29) и второго соотношения (27) получаем

$$\frac{A_t}{2\sqrt{A + S_x^2}} + \frac{S_xA_x}{2(A + S_x^2)} + \frac{S_x^2S_{xx}}{A + S_x^2} = S_{xx} + B_1S_x + B_2\sqrt{A + S_x^2},$$

$$\frac{AS_{xx}}{A+S_x^2} = \frac{A_t}{2\sqrt{A+S_x^2}} + \frac{S_xA_x}{2(A+S_x^2)} - B_1S_x - B_2\sqrt{A+S_x^2},$$

$$S_{xx} = \frac{A_t}{2A}\sqrt{A+S_x^2} + \frac{A_x}{2A}S_x - \frac{B_1}{A}(A+S_x^2)S_x - \frac{B_2}{A}(A+S_x^2)^{3/2}.$$

Далее будем записывать все соотношения в виде

$$f(w) + S_xg(w),$$

где $w = \sqrt{A+S_x^2}$ и f, g — рациональные функции от w. В силу этого соглашения

$$S_{xx} = \frac{A_t}{2A}w - \frac{B_2}{A}w^3 + S_x\left(\frac{A_x}{2A} - \frac{B_1}{A}w^2\right).$$

В силу обозначения (21) система (27) свелась к виду

$$S_t = w, \quad S_{xx} = D_1w + D_2w^3 + S_x\left(D_3 + D_4w^2\right). \tag{30}$$

Составим условие совместности $(S_t)_{xx} = (S_{xx})_t$.

Соотношение (28) в силу системы (30) принимает вид

$$S_{tx} = \frac{A_x}{2}w^{-1} + S_xw^{-1}S_{xx} =$$

$$= \frac{A_x}{2}w^{-1} + S_x\left(D_1 + D_2w^2 + S_x(D_3w^{-1} + D_4w)\right) =$$

$$= \frac{A_x}{2}w^{-1} + S_x(D_1 + D_2w^2) + S_x^2(D_3w^{-1} + D_4w) =$$

(в силу равенства $S_x^2 = w^2 - A$)

$$= \frac{A_x}{2}w^{-1} + S_x(D_1 + D_2w^2) + (w^2 - A)(D_3w^{-1} + D_4w) =$$

$$= \frac{A_x}{2}w^{-1} + S_x(D_1 + D_2w^2) + D_3w + D_4w^3 - AD_3w^{-1} - AD_4w =$$

$$= (\frac{A_x}{2} - AD_3)w^{-1} + (D_3 - AD_4)w + D_4w^3 + S_x(D_1 + D_2w^2).$$

В силу обозначения (21)

$$\frac{A_x}{2} - AD_3 = \frac{A_x}{2} - A\frac{A_x}{2A} = 0.$$

В силу обозначения (22)

$$S_{tx} = E_1w + E_2w^3 + S_x(E_3 + E_4w^2). \tag{31}$$

Так как $S_t = w$, то

$$w_x = E_1w + E_2w^3 + S_x(E_3 + E_4w^2).$$

Из (31) находим

$$S_{txx} = E_{1x}w + E_{2x}w^3 + S_x(E_{3x} + E_{4x}w^2) +$$

$$+ S_{xx}(E_3 + E_4w^2) + (E_1w + 3E_2w^2 + 2E_4S_xw)w_x =$$

$$= E_{1x}w + E_{2x}w^3 + S_x(E_{3x} + E_{4x}w^2) +$$

$$+ (E_3 + E_4w^2)(D_1w + D_2w^3 + S_x(D_3 + D_4w^2)) +$$

$$+ (E_1w + 3E_2w^2 + 2E_4S_xw)(E_1w + E_2w^3 + S_x(E_3 + E_4w^2)) =$$

$$
\begin{gathered}
= E_{1x}w + E_{2x}w^3 + S_x(E_{3x} + E_{4x}w^2) + \\
+E_3D_1w + E_3D_2w^2 + E_4D_1w^3 + E_4D_2w^5 + \\
+S_x(E_3D_3 + E_3D_4w^2 + E_4D_3w^2 + E_4D_4w^4) + \\
+E_1^2w + E_2E_1w^3 + 2E_1E_4w^2S_x + \\
+E_1E_2w^3 + 3E_2^2w^5 + 2E_2E_4S_xw^4 + \\
+S_x(E_1E_3 + E_1E_4w^2 + 3E_2E_3w^2 + 3E_2E_4w^4) + \\
+S_x^2(2E_3E_4w + 2E_4^2w^3) = \\
= (E_{1x} + E_3D_1 + E_1^2)w + E_3D_2w^2 + \\
+(E_{2x} + E_4D_1 + 4E_1E_2)w^3 + E_4D_2w^5 + \\
+S_x\left[E_{3x} + E_{4x}w^2 + E_3D_3 + E_3D_4w^2 + \right. \\
+E_4D_3w^2 + E_4D_4w^4 + 2E_1E_4w^2 + 2E_2E_4w^4 + \\
\left. + E_1E_3 + E_1E_4w^2 + 3E_2E_3w^2 + 3E_2E_4w^4\right] + \\
+S_x^2(2E_3E_4w + 2E_4^2w^3) = \\
= (E_{1x} + E_3D_1 + E_1^2)w + E_3D_2w^2 + (E_{2x} + E_4D_1 + 4E_1E_2)w^3 + E_4D_2w^5 + \\
+S_x\left[(E_{3x} + E_3D_3 + E_1E_3) + w^2(E_{4x} + E_3D_4 + E_4D_3 + 3E_1E_4 + 3E_2E_3)\right. \\
\left. + w^4(E_4D_4 + 5E_2E_4)\right] + (w^2 - A)(2E_3E_4w + 2E_4^2w^3) = \\
= (E_{1x} + E_3D_1 + E_1^2 - 2AE_3E_4)w + E_3D_2w^2 + \\
+(E_{2x} + E_4D_1 + 4E_1E_2 - 2E_3E_4 - 2AE_4^2)w^3 + (E_4D_2 + 2E_4^2)w^5 + \\
+S_x\left[(E_{3x} + E_3D_3 + E_1E_3) + w^2(E_{4x} + E_3D_4 + E_4D_3 + 3E_1E_4 + 3E_2E_3)\right. \\
\left. + w^4(E_4D_4 + 5E_2E_4)\right].
\end{gathered}
$$

В силу обозначения (23)

$$S_{txx} = F_1w + F_2w^2 + F_3w^3 + F_5w^5 + S_x(F_6 + F_7w^2 + F_8w^4). \tag{32}$$

Далее находим

$$w_t = \frac{A_t + 2S_xS_{tx}}{2w} =$$

в силу (31)

$$
\begin{gathered}
= \frac{A_t}{2w} + \frac{S_x}{w}(E_1w + E_2w^3 + S_x(E_3 + E_4w^2)) = \\
= \frac{A_t}{2w} + S_x(E_1 + E_2w^2) + \frac{S_x^2}{w}(E_3 + E_4w^2) = \\
= \frac{A_t}{2w} + S_x(E_1 + E_2w^2) + \frac{w^2 - A}{w}(E_3 + E_4w^2) = \\
= \frac{A_t}{2w} + S_x(E_1 + E_2w^2) + E_3w + E_4w^3 - \frac{AE_3}{w} - AE_4w = \\
= (\frac{A_t}{2} - AE_3)w^{-1} + (E_3 - AE_4)w + E_4w^3 + S_x(E_1 + E_2w^2) =
\end{gathered}
$$

в силу (21) и (22)

$$= (E_3 - AE_4)w + E_4w^3 + S_x(E_1 + E_2w^2).$$

В силу обозначения (24)

$$w_t = G_1 w + G_2 w^3 + S_x(G_3 + G_4 w^2).$$

Далее из второго соотношения (30) находим $(S_{xx})_t$

$$S_{xxt} = D_{1t}w + D_{2t}w^3 + S_x(D_{3t} + D_{4t}w^2)+$$

$$+S_{tx}(D_{3t} + D_{4t}w^2) + (D_1 + 3D_2w^2 + 2S_xD_4w)w_t =$$

$$= D_{1t}w + D_{2t}w^3 + S_x(D_{3t} + D_{4t}w^2)+$$

$$+(D_3 + D_4w^2)(E_1w + E_2w^3 + S_x(E_3 + E_4w^2))+$$

$$+(D_1 + 3D_2w^2 + 2S_xD_4w)(G_1w + G_2w^3 + S_x(G_3 + G_4w^2)) =$$

$$= (D_{1t}w + D_{2t}w^3) + (D_3 + D_4w^2)(E_1w + E_2w^3)+$$

$$+(D_1 + 3D_2w^2)(G_1w + G_2w^3) + 2S_x^2D_4w(G_3 + G_4w^2)+$$

$$+S_x\left[(D_{3t} + D_{4t}w^2) + (D_3 + D_4w^2)(E_3 + E_4w^2)+\right.$$

$$\left.+ (D_1 + 3D_2w^2)(G_3 + G_4w^2) + 2D_4w(G_1w + G_2w^3)\right] =$$

$$= D_{1t}w + D_{2t}w^3 + D_3E_1w + D_3E_2w^3 + D_4E_1w^3 + D_4E_2w^5+$$

$$+D_1G_1w + D_1G_2w^3 + 3D_2G_1w^3 + 3D_2G_2w^5$$

$$+2D_4(w^2 - A)(G_3 + G_4w^2)w+$$

$$+S_x\left[D_{3t} + D_{4t}w^2 + D_3E_3 + D_3E_4w^2 + D_4E_4w^4)+\right.$$

$$\left.+ D_1G_3 + D_1G_4w^2 + 3D_2G_3w^2 + 3D_2G_4w^4 + 2D_4G_1w^2 + 2D_4G_2w^4\right] =$$

$$= w(D_{1t} + D_3E_1 + D_1G_1 - 2AD_4G_3)+$$

$$+w^3(D_{2t} + D_3E_2 + D_4E_1 + D_1G_2 + 3D_2G_1 - 2AD_4G_4 + 2D_4G_3)+$$

$$+w^5(D_4E_2 + 3D_2G_2 + 2D_4G_4) + S_x\left[(D_{3t} + D_3E_3 + D_1G_3)+\right.$$

$$+w^2(D_{4t} + D_3E_4 + D_4E_3 + D_1G_4 + 3D_2G_3 + 2D_4G_1)+$$

$$\left.+ w^4(D_4E_4 + 3D_2G_4 + 2D_4G_2)\right].$$

В силу обозначения (25)

$$S_{xxt} = H_1w + H_3w^3 + H_5w^5 + S_x(H_6 + H_7w^2 + H_8w^4). \tag{33}$$

В силу (32) и (33) условие совместности $S_{txx} = S_{xxt}$ принимает вид

$$(H_1 - F_1)w - F_2w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5+$$

$$+S_x((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4) = 0. \tag{34}$$

Из соотношения (34) находим

$$S_x = \psi,$$

где ψ зависит только от функций R и U и их производных. Далее из первого соотношения (27) получаем

$$S_t = \varphi,$$

где

$$\varphi = \sqrt{A + \psi^2}.$$

И остаётся составить условие совместности

$$\varphi_x = \psi_t$$

— искомое соотношение на функции R и U.

Отметим, что для того чтобы найти S_x из (34) надо составить равенство

$$(H_1 - F_1)w - F_2 w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5 =$$

$$-S_x((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4),$$

возвести его в квадрат

$$((H_1 - F_1)w - F_2 w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5)^2 =$$

$$S_x^2((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4)^2,$$

подставить $S_x^2 = w^2 - A$

$$((H_1 - F_1)w - F_2 w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5)^2 =$$

$$(w^2 - A)((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4)^2$$

решить полученное уравнение степени 10 относительно w и найти

$$S_x = \sqrt{w^2 - A}$$

— функцию от R и U и их производных.

Теорема доказана. □

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ c — ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ U ИЗ СИСТЕМЫ (2)

Из первого соотношения (2) находим

$$U = \frac{1}{R}(R_{tt} - R_{xx}) + (S_x^2 - S_t^2). \tag{35}$$

На функции R и S остаётся второе соотношение системы (2).

$$S_{tt} - S_{xx} = 2\left(\frac{R_x}{R}S_x - \frac{R_t}{R}S_t\right). \tag{36}$$

Пример 1. Если R, S пара гармонически сопряжённых функций

$$R_t = S_x, \quad R_x = -S_t,$$

то (36) принимает вид

$$S_{tt} - S_{xx} = 0.$$

Следовательно,

$$S = f(x+t) + g(x-t),$$

где f, g — некоторые функции одного аргумента. Тогда на функцию R имеем систему

$$R_t = f'(x+t) + g'(x-t), \quad R_x = -f'(x+t) + g'(x-t).$$

Из условия совместности $R_{tx} = R_{xt}$ получаем

$$f''(x+t) + g''(x-t) = 0.$$

Так как $x+t$, $x-t$ — независимые переменные, то

$$f''(x+t)=\lambda, \quad g''(x-t)=-\lambda, \quad \lambda=const$$

и

$$f=\frac{\lambda}{2}(x+t)^2+a_1(x+t)+a_0, \quad g=-\frac{\lambda}{2}(x-t)^2+b_1(x-t)+b_0,$$

где a_1, a_0, b_1, b_0 — некоторые константы. Далее находим

$$S=2\lambda xt+a_1(x+t)+b_1(x-t)+a_0+b_0.$$

Из системы

$$R_t=S_x=2\lambda t+a_1+b_1, \quad R_x=-S_t=-2\lambda x-a_1+b_1$$

находим

$$R=\lambda(t^2-x^2)+a_1(t-x)+b_1(t+x)+a_0+c_0,$$

где c_0 — некоторая константа. По формуле (3) находим U

$$U=\frac{4\lambda}{R}+4\lambda^2(t^2-x^2)+4\lambda\left(t(a_1+b_1)+x(b_1-a_1)\right)+4a_1b_1.$$

Итак, функции

$$R=\lambda(t^2-x^2)+a_1(t-x)+b_1(t+x)+a_0+c_0,$$
$$S=2\lambda xt+a_1(x+t)+b_1(x-t)+a_0+b_0,$$
$$U=\frac{4\lambda}{R}+4\lambda^2(t^2-x^2)+4\lambda\left(t(a_1+b_1)+x(b_1-a_1)\right)+4a_1b_1,$$

где a_1, a_0, b_1, b_0, c_0 — некоторые константы, являются решением системы (2).

Пример 2. Пусть

$$S_t=\varphi(R), \quad S_x=\psi(R),$$

где φ, ψ — некоторые функции одного аргумента. Тогда из условия совместности $S_{xt}=S_{tx}$ получаем

$$\varphi'(R)R_x=\psi'(R)R_t.$$

Следовательно, функция R является решением неявного уравнения

$$t\varphi'(R)+x\psi'(R)=f(R),$$

где f — некоторая функция одного аргумента.

Уравнение (36) принимает вид

$$\varphi'(R)R_t-\psi'(R)R_x=\frac{2}{R}(\psi(R)R_x-\varphi(R)R_t)$$

или

$$\left(\psi'(R)+\frac{2\psi(R)}{R}\right)R_x=\left(\varphi'(R)+\frac{2\varphi(R)}{R}\right)R_t.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} \psi'(R) & \varphi'(R) \\ \varphi'(R)+\frac{2\varphi(R)}{R} & \psi'(R)+\frac{2\psi(R)}{R} \end{pmatrix}$$

должна быть вырожденной. Отсюда

$$\psi'(R)\left(\psi'(R)+\frac{2\psi(R)}{R}\right)=\varphi'(R)\left(\varphi'(R)+\frac{2\varphi(R)}{R}\right).$$

Итак, функции $\varphi(R)$ и $\psi(R)$ не могут быть любыми. Они связаны этим соотношением. Для функции U имеем формулу (35)

$$U = \frac{1}{R}(R_{tt} - R_{xx}) + (\psi^2(R) - \varphi^2(R)).$$

Вывод. Пусть функции $\varphi(R)$ и $\psi(R)$ связаны дифференциальным соотношением

$$\psi'^2(R) - \varphi'^2(R) = \frac{1}{R}((\varphi^2(R))' - (\psi^2(R))'). \tag{37}$$

Тогда функции R, S, U такие, что

1) R — решение уравнения

$$t\varphi'(R) + x\psi'(R) = f(R),$$

где f — некоторая функция одного аргумента,

2) S — решение системы

$$S_t = \varphi(R), \quad S_x = \psi(R),$$

совместной в силу 1),

3)

$$U = \frac{1}{R}(R_{tt} - R_{xx}) + (\psi^2(R) - \varphi^2(R))$$

удовлетворяют системе (2).

Покажем, что общее решение уравнения (37) даётся формулами

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(b + \exp\left(-\int \frac{b'}{(Rb)'}dR\right)\right), \quad \psi = \frac{1}{2}\left(b - \exp\left(-\int \frac{b'}{(Rb)'}dR\right)\right),$$

где $b = b(R)$ — произвольная функция.

Действительно, перепишем (10) в виде:

$$R(\varphi'^2 - \psi'^2(R)) + (\varphi^2 - \psi^2)' = 0,$$

или

$$R(\varphi' - \psi')(\varphi' + \psi') + ((\varphi - \psi)(\varphi + \psi))' = 0.$$

Введём обозначения

$$a = \frac{1}{2}(\varphi + \psi), \quad b = \frac{1}{2}(\varphi - \psi).$$

Тогда уравнение примет вид

$$Ra'b' + a'b + ab' = 0$$

или

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{Rb' + b}.$$

Интегрированием находим

$$a = \exp\left(-\int \frac{b'}{(Rb)'}dR\right)$$

и возвращаемся к функциям φ, ψ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляется интересным провести аналогичный анализ уравнений, связывающих функции амплитуды, потенциала и фазовую функцию для многомерного уравнения Шредингера, а также применить полученные результаты к нелинейным уравнениям Шредингера, когда потенциал является функцией от амплитуды. Например, для кубического уравнения Шредингера [13, 32]. Отметим также, что некоторые результаты, связанные с конструктивным подходом исследования уравнений математической физики и применением их к поиску коэффициентов и решений можно найти в работах [15, 16, 33–36].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
4. *Виноградов А. М.* Симметрии и законы сохранений уравнений математической физики. М.: Факториал, 1997.
5. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
6. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли-Бэклунда // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 1. С. 25–36.
7. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* О бесконечных алгебрах Ли-Бэклунда // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 4. С. 79–80.
8. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
9. *Виноградов А. М.* Когомологический анализ уравнений с частными производными и вторичное исчисление. М.: МЦНМО, 2021.
10. *Miura R. M.* Backlund transformations. Lecture Notes in Mathematics, V. 515. Heidelberg: Springer, 1976.
11. *Жаринов В. В.* О соответствии Бэклунда // Матем. сб. 1988. Т. 136, № 2. С. 274–291.
12. *Жаринов В. В.* О соответствии Бэклунда для эволюционных уравнений в многомерном пространстве // Теор. и мат. физика. 2006. Т. 147, № 1. С. 3–13.
13. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
14. *Капцов О. В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
15. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Обобщённое преобразование Коула-Хопфа // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 21, № 3. С. 18–25; DOI: 10.17377/sibjim.2018.21.302
16. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Метод дифференциальных связей и нелинейные обратные задачи. Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 2. С. 36–47.
17. *Гельфанд И. М., Локуциевский О. В.* Метод “прогонки” для решения разностных уравнений // Введение в теорию разностных схем. 1962. С. 283–309.
18. *Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И.* Метод расчёта поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24, № 2. С. 272–286.
19. *Фатьянов А. Г., Михайленко Б. Г.* Метод расчёта нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Доклады РАН. 1988. Т. 301, № 4. С. 834–839.
20. *Карчевский А. Л.* Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и Геофизика. 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
21. *Карчевский А. Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. матем. 2020. Т. 23, № 4. С. 48–68

22. *Konopelchenko B. G.* The group structure of Backlund transformations // Phys. Lett. A. 1979. V. 74, N 3–4. P. 189–192.

23. *Sasaki R.* Canonical structure of Backlund transformations // Phys. Lett. A. 1980. V. 78, N 5–6. P. 7–10.

24. *Konopelchenko B. G.* Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations // Phys. Lett. A. 1982. V. 87, N 9. P. 445–448.

25. *Kuznetsov V. B., Sklyanin E. K.* On Backlund transformations for many-body systems // J. Physics A. 1998. V. 31, N 9. P. 2241–2251.

26. *Белоусов Н. М.* Преобразование Бэклунда для нелинейного уравнения Шредингера // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 494. С. 6–22.

27. *Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.* Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. М.: МЦНМО, 2005.

28. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Теоретическая физика. Квантовая электродинамика, Т. IV. Издание 4-е, исправленное. М.: Физматлит, 2002.

29. *Нещадим М. В.* Преобразования Бэклунда для одномерного уравнения Шредингера // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 2. С. 116–125; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.209

30. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИИТЛ, 1948.

31. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.

32. *Нещадим М. В., Чупахин А. П.* Частично-инвариантные решения кубического уравнения Шредингера // Вестник УдГУ. 2008. № 3. С. 35–41.

33. *Anikonov Yu. E., Neshchadim M. V.* Algebraic-Analytic Methods for Constructing Solutions to Differential Equations and Inverse Problems // J. Math. Sci. 2016. V. 215, N 4. P. 444–459.

34. *Anikonov Yu. E., Neshchadim M. V.* Representations for the solutions and coefficients of second-order differential equations // J. Appl. Ind. Math. 2013. V. 7, N 1. P. 1–7.

35. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 2. С. 40–49.

36. *Нещадим М. В.* Обратная задача теории совместимости и функционально-инвариантные решения волнового уравнения в двумерном пространстве // Вест. ЮУрГУ. Сер. матем. моделир. и программир. 2012. № 14. С. 99–107.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.9

BACKLUND TRANSFORMATIONS OF THE RELATIVISTIC SCHRODINGER EQUATION

© 2023 **M. V. Neshchadim**[1,2a], **A. A. Simonov**[2b]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]neshch@math.nsc.ru, [b]a.simonov@g.nsu.ru

Received 23.07.2023, revised 12.10.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. We study the system of equations obtained on the basis of the relativistic Schrodinger equation and relating the potential, amplitude, and phase functions. Using the methods of the theory of consistency of systems of partial differential equations, we obtain completely integrable systems that relate only two functions of the above three. The systems found are related by Backlund transformations.

Keywords: relativistic Schrodinger equation, Backlund transformation, consistency condition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.408

REFERENCES

1. L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
2. N. Kh. Ibragimov, *Transformation Groups in Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
3. P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer, New York—Berlin—Heidelberg—Tokyo, 1986; Mir, Moscow, 1989).
4. A. M. Vinogradov, *Symmetries and Conservation Laws of Equations of Mathematical Physics* (Faktorial, Moscow, 1997) [in Russian].
5. A. F. Sidorov, V. P. Shapeev, and N. N. Yanenko, *The differential Constraint Method and Application in Gas Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1984) [in Russian].
6. N. Kh. Ibragimov and A. B. Shabat, "Evolution equations with a nontrivial Lie—Backlund group," Funkts. Anal. Pril. **14** (1), 25–36 (1980) [in Russian].
7. N. Kh. Ibragimov and A. B. Shabat, "On infinite Lie—Backlund algebras," Funkts. Anal. Pril. **14** (4), 79–80 (1980) [in Russian].
8. A. M. Vinogradov, I. S. Krasil'shchik, and V. V. Lychagin, *Introduction to the Geometry of Nonlinear Differential Equations* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
9. A. M. Vinogradov, *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus* (MTsNMO, Moscow, 2021) [in Russian].
10. R. M. Miura, *Backlund Transformations. Lect. Notes Math., Vol. 515* (Springer, Heidelberg, 1976).
11. V. V. Zharinov, "On Backlund correspondences," Math. USSR-Sb. **64** (1), 277–293 (1989).
12. V. V. Zharinov, "Backlund correspondences for evolution equations in a multidimensional space," Theor. Math. Phys. **147** (1), 449–459 (2006).
13. M. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981; Mir, Moscow, 1987).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 828–841.

14. O. V. Kaptsov, *Methods for Integrating Partial Differential Equations* (Fizmatlit, Moscow, 2009) [in Russian].
15. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Generalized Cole—Hopf transformation," Sib. Zh. Ind. Mat. **21** (3), 18–25 (2018) https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.302 [J. Appl. Ind. Math. **12** (3), 409–416 (2018) https://doi.org/10.1134/S199047891803002X].
16. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "The method of differential relations and nonlinear inverse problems," Sib. Zh. Ind. Mat. **18** (2), 36–47 (2015) [in Russian].
17. I. M. Gel'fand and O. V. Lokutsievskii, "The "sweep" method for solving difference equations," in *Introduction to the Theory of Difference Schemes* (1962), pp. 283–309 [in Russian].
18. G. V. Akkuratov and V. I. Dmitriev, "Method for calculating the field of steady elastic vibrations in a layered medium," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **24** (2) 272–286 (1984) [U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. **24** (1), 166–176 (1984)].
19. A. G. Fat'yanov and B. G. Mikhailenko, "Method for calculating unsteady wave fields in inelastic layered inhomogeneous media," Dokl. Akad. Nauk SSSR **301** (4), 834–839 (1988) [in Russian].
20. A. L. Karchevsky, "Analytical solution of Maxwell's equations in the frequency domain for horizontally layered anisotropic media," Geol. Geophys. **48** (8), 889–898 (2007) [in Russian].
21. A. L. Karchevsky, "Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types," Sib. Zh. Ind. Mat. **23** (4), 48–68 (2020) [J. Appl. Industrial. Math. **14** (4), 648–665 (2020)].
22. B. G. Konopelchenko, "The group structure of Backlund transformations," Phys. Lett. A **74** (3–4), 189–192 (1979).
23. R. Sasaki, "Canonical structure of Backlund transformations," Phys. Lett. A **78** (5–6), 7–10 (1980).
24. B. G. Konopelchenko, "Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations," Phys. Lett. A **87** (9), 445–448 (1982).
25. V. B. Kuznetsov and E. K. Sklyanin, "On Backlund transformations for many-body systems," J. Phys. A **31** (9), 2241–2251 (1998).
26. N. M. Belousov, "Backlund transformation for the nonlinear Schrodinger equation," Zap. Nauchn. Semin. POMI **494**, 6–22 (2020) [in Russian].
27. T. Miwa, M. Jimbo, and E. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000; MTsNMO, Moscow, 2005).
28. V. B. Berestetsky, E. M. Lifshits, and L. P. Pitaevsky, *Theoretical Physics. Quantum Electrodynamics, Vol. IV* (Fizmatlit, Moscow, 2002) [in Russian].
29. M. V. Neshchadim, "Backlund transformations for the one-dimensional Schrodinger equation," Sib. Zh. Ind. Mat. **24** (2), 116–125 (2021) https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.209 [J. Appl. Ind. Math. **15** (2), 307–314 (2021) https://doi.org/10.1134/S1990478921020125].
30. S. P. Finikov, *Cartan Method of Exterior Forms* (GIITL, Moscow—Leningrad, 1948) [in Russian].
31. J. F. Pommaret, *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups* (CRC Press, New York, 1978; Mir, Moscow, 1983).
32. M. V. Neshchadim and A. P. Chupakhin, "Partially invariant solutions of the cubic Schrodinger equation," Vestn. UdGU (3), 35–41 (2008) [in Russian].
33. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Algebraic-analytic methods for constructing solutions to differential equations and inverse problems," J. Math. Sci. **215** (4), 444–459 (2016).
34. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Representations for the solutions and coefficients of secondorder differential equations," J. Appl. Ind. Math. **7** (1), 1–7 (2013).
35. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Representations for the solutions and coefficients of evolution equations," Sib. Zh. Ind. Mat. **16** (2), 40–49 (2013) [J. Appl. Ind. Math. **7** (3), 326–334 (2013)].
36. M. V. Neshchadim, "Inverse problem of consistency theory and functionally invariant solutions of the wave equation in two-dimensional space," Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Model. Program. (14), 99–107 (2012) [in Russian].