О локальных точно n–транзитивных группах

М.В. Нещадим, А.А. Симонов

1 Введение

В 1872 г., Жордан (C. Jordan) [1] доказал, что среди конечных групп, за исключением симметрических S_n, знакопеременных A_n и групп Матьё M_{11}, M_{12}, отсутствуют точно k–транзитивные группы при $k > 3$. Фрейденталь (H. Freudenthal) [2] для точно 3–транзитивной группы, в случае, когда она локально компактна, связна и действует на топологическом пространстве, показал, что такая группа изоморфна группе преобразований $x \mapsto \frac{xa+b}{xc+d}$ вещественного $\mathbb{R}$ или комплексного $\mathbb{C}$ поля, с условием $ad - cb \neq 0$. Титс (J.Tits) [3] дополнительно показал, что точно 2–транзитивная группа изоморфна группе преобразований $x \mapsto xa + b$, $a \neq 0$, построенной над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или телом кватернионов $\mathbb{H}$. Несмотря на отсутствие в бесконечном случае точно k–транзитивных групп для $k > 3$, известно [4], что бесконечные k–транзитивные, но не $k + 1$–транзитивные группы существуют для произвольного k.

Если не требовать от группы дополнительных свойств, то точно 2–транзитивная группа изоморфна аффинной группе преобразований $x \mapsto xa + b$ некоторой *почти–области*, введённой Карзелом (Karzel H.) [5, 6]. Обобщение почти–области рассматривалось в [7].

Для построения *точно трижды транзитивных групп* введено *KT–поле* [8], являющееся парой (B, ε), где B — почти–область, а ε — автоморфизм мультипликативной группы почти–области, для которого справедливо тождество

$$\varepsilon(1 - \varepsilon(x)) = 1 - \varepsilon(1 - x). \tag{1}$$

Лейснер (Leissner W.) [9, 10] для построения точно n–транзитивных групп вместо одного автоморфизма $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(B^*)$ использовал $n - 2$ автоморфизма $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2} \in S_{n-2} \subseteq \mathrm{Aut}(B^*)$ с условием (1).

А.А. Симонов [11] построил обобщение точно n–транзитивных групп на *группы ограниченно точно n–транзитивные*. Среди них есть локальные точно 2–транзитивные группы, которые нельзя построить над локальными почти–областями.

Данная работа посвящена обобщениям действий топологических групп на многообразиях. Вместо топологической группы рассматривается локальная топологическая группа. Вводится понятие действия локальной группы на топологическом пространстве.

В работе строится теория локальных точно n–транзитивных групп и локальных n–псевдополей. Локальные точно n–транзитивные группы сводятся к более простым алгебраическим объектам — локальным n–псевдополям. Это может быть полезно так как, в отличие от локально компактных и связных точно n–транзитивных групп, которые отсутствуют для $n > 3$ локальные точно n–транзитивные группы есть при произвольном n, например — группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

В параграфе 2 даются определения локальной группы, изоморфизма локальных групп, непрерывной группы преобразований и локального n–псевдополя.

В параграфе 3, проводятся основные построения. В теореме 1 по локальному 2–псевдополю строится локальная точно 2–транзитивная группа. Далее результат расширяется и в теореме 2 по локальному n–псевдополю строится локальная точно n–транзитивная группа.

На следующем шаге в теореме 3 решается обратная задача — по локальной точно n–транзитивной группе строится локальное n–псевдополе. Параграф завершается теоремой 4 в которой доказывается эквивалентность категорий “локальных точно n–транзитивных групп” и “локальных n–псевдополей”.

Несколько слов о терминологии. Титсом [3] для описания точно дважды транзитивных групп была введена алгебраическая система — *псевдополе* как обобщение понятия *поля*, *тела* и *почти–поля*. Но в дальнейшем для описания таких групп стало использоваться близкое понятие — *почти–область*, в результате термин псевдополе освободился. Лейснером [10] для описания точно n–транзитивных групп было введено понятие “*G–поле степени n*”. В данной работе, вслед за введённым ранее [11] n–псевдополем, будет определено понятие “локальное *n–псевдополе*” для описания алгебраических систем, связанных с “локальными точно n–транзитивным группами”.

2 Определения

2.1 Локальная группа

Приведём определение локальных топологических групп и локального изоморфизма (см. [12, §23]):

Определение 1 *Топологическое пространство G называется* локальной группой, *если для некоторых пар a, b элементов множества G определено* произведение $ab \in G$, *причём выполнены следующие условия:*
1) если определены произведения ab, $(ab)c$, bc, $a(bc)$, то имеет место равенство $(ab)c = a(bc)$;
2) если определено произведение ab, то для всякой окрестности W элемента ab существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что при $x \in U, y \in V$ произведение xy определено и $xy \in W$;
3) в G отмечен элемент e, называемый единицей, так, что если $a \in G$, то произведение ea определено и $ea = a$;
4) если для пары a, b определено произведение ab и $ab = e$, то говорят, что a есть левый обратный элемент *для b, $a = b^{-1}$. Если для b существует левый обратный, то для всякой окрестности U элемента b^{-1} имеется такая окрестность V элемента b, что для каждого $y \in V$ существует левый обратный $y^{-1} \in U$.*

Пусть G–локальная группа. Всякую окрестность U единицы e группы G будем называть частью локальной группы G. Всякая часть U локальной группы G сама является локальной группой в силу тех операций, которые имеются в G.

Определение 2 *Пусть G и G' — две локальные группы, U и U' — их части. Говорят, что f есть* локальное изоморфное отображение *группы G на группу G', если f есть топологическое отображение части U на часть U', причем выполнены условия:*

1) Если произведение ab определено в U, то произведение $f(a)f(b)$ определено в U' и $f(ab) = f(a)f(b)$.
2) Единица при отображении f переходит в единицу.
3) Отображение f обратимо и для f^{-1} — обратного к f отображения, выполнены те же условия, что и для самого f.

Если для локальных групп G и G' существует локальное изоморфное отображение одной группы на другую, то говорят, что группы G и G' локально изоморфны.

Два локальных изоморфных отображенисе вышлия f и f' группы G на группу G' называются эквивалентными, если они совпадают на некоторой части группы G. В дальнейшем мы будем изучать локальные изоморфизмы лишь с точностью до эквивалентности.

Приведём также определение группы преобразований [12, §24]:

Определение 3 *Топологическая группа G называется непрерывной группой преобразований топологического пространства Γ, если каждому элементу $x \in G$ поставлено в соответствие преобразование x^* множества Γ, таким образом, что $(xy)^* = x^*y^*$, а функция σ двух переменных $x \in G$ и $\xi \in \Gamma$, определяемая соотношением $\sigma(x, \xi) = x^*(\xi)$, является непрерывной, т. е. даёт непрерывное отображение прямого произведения $G \times \Gamma$ топологических пространств G и Γ на топологическое пространство Γ.*

Если различным элементам группы G соответствуют различные преобразования, то G называется *эффективной группой преобразований.* В этом случае элементы группы G сами могут считаться преобразованиями ($x = x^*$).

Непрерывная группа G преобразований пространства Γ называется транзитивной, если транзитивна абстрактная группа G преобразований пространства Γ.

Далее под непрерывной группой преобразований будем подразумевать пару (Γ, G), где G — топологическая группа и Γ — топологическое пространство. Рассмотрим отображения $\psi : G \to G'$ и $\chi : \Gamma \to \Gamma'$.

Определение 4 *Пара отображений (χ, ψ) называется подобием пары (Γ, G) на пару (Γ', G'), если $\psi : G \to G'$ задаёт групповой изоморфизм, а $\chi : \Gamma \to \Gamma'$ — гомеоморфное отображение топологических пространств, и справедливо равенство*

$$\chi[g(x)] = \psi(g)(\chi[x]),$$

где $g \in G, x \in \Gamma$.

Если пара отображений (χ, ψ) задаёт подобие пар (Γ, G) и (Γ', G'), то говорят, что пары $(\Gamma, G), (\Gamma', G')$ — подобны.

Определение 5 *Непрерывную группу преобразований (Γ, G), действующую на пространстве Γ, будем называть локально точно n–транзитивной, если G — локальная группа и она действует на некотором открытом подпространстве $M \subset \Gamma^n$ точно транзитивно.*

Заметим, что при рассмотрении групп Ли вместо термина "*точно транзитивная группа*" используется "*просто транзитивная группа*".

2.2 Локальное псевдополе

Рассмотрим симметрическую группу S_n и группу преобразований (G, S_n), действующую локально $G \times S_n \to G$ в пространстве G. Иными словами, на G определены локальные гомеоморфизмы f_α занумерованные элементами $\alpha \in S_n$, для которых справедливо $f_\beta(f_\alpha(x)) = f_{\alpha\cdot\beta}(x)$.

Как известно, симметрическая группа S_n порождается транспозициями $(1, i)$, где $i = 2, 3, \dots, n$. Отметим, что

$$(1,i)(1,j)(1,i) = (1,j)(1,i)(1,j) = (i,j) \quad \text{для} \quad i \neq j.$$

Обозначим инволютивные локальные гомеоморфизмы, задаваемые транспозициями:

$$f_{(1,i)} = \varphi_i, \text{ для } (i = 2, \dots, n).$$

На G почти всюду[1] определена бинарная операция $(\cdot) : G \times G \to G$ такая, что её ограничение на G_1 приводит к тому, что на $G_1 \subset G$ задана структура локальной группы — $\langle G_1; \cdot, E, e\rangle$. При помощи локальных гомеоморфизмов φ_i, по локальной группе $\langle G_1; \cdot, E, e\rangle$ построим локально изоморфные группы

$$\varphi_i : \langle G_1; \cdot, E, e\rangle \mapsto \langle G_i; \cdot_i, E_i, e_i\rangle,$$

где $E(x) = x^{-1}$ — локальный гомеоморфизм задающий взятие обратного в группе G_1, а $x \cdot_i y = \varphi_i(\varphi_i(x)\varphi_i(y))$, $E_i(x) = \varphi_i(E(\varphi_i(x)))$ — умножение и взятие обратного в группе G_i; e, $e_i = \varphi_i(e)$ — локальные единицы в соответствующих группах G_1 и G_i.

Определение 6 *Будем говорить, что группа преобразований (G, S_n) задаёт локальное n–псевдополе $\langle G; \cdot, E, \varphi_2, \dots, \varphi_n, e\rangle$, если выполнены следующие условия:*

1. *если определены произведения $a\varphi_i(b^{-1})$, $\varphi_i(a\varphi_i(b^{-1}))b$, $a \cdot_i b$, то имеет место равенство*

$$a \cdot_i b = \varphi_i(\varphi_i(a)\varphi_i(b)) = \varphi_i(a\varphi_i(b^{-1}))b; \tag{2}$$

2. *если определено произведение $a \cdot_i b$, то для всякой окрестности W элемента $a \cdot_i b$ существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что при $x \in U, y \in V$ произведения $x \cdot_i y$, $x\varphi_i(y^{-1})$, $\varphi_i(x\varphi_i(y^{-1}))y$ определены и $x \cdot_i y = \varphi_i(x\varphi_i(y^{-1}))y \in W$;*

3. *локальный гомеоморфизм $\sigma_{ij} = \varphi_j\varphi_i\varphi_j$ при $i \neq j$ является локальным автоморфизмом группы G_1;*

4. *если для некоторого $a \in G$ определены $\varphi_i E\varphi_i(a)$ и $E\varphi_i E(a)$, то справедливо равенство*

$$\varphi_i E\varphi_i(a) = E\varphi_i E(a),$$

[1] Размерность пространства где операция не определена меньше размерности G.

5. *элементы $e_i = \varphi_i(e) \in G$, для бинарной операции на G, являются левыми нулями, то есть $e_i \cdot x = e_i$, для $x \in U$ из окрестности единицы $e \in G_1$.*

Уравнение (28) можно записать в виде связи двух групповых операций:

$$(a \cdot_i b)b^{-1} = \varphi_i(a) \cdot_i b^{-1},$$

для $a \in U \cap \varphi_i(U), b \in V \subset U \cap \varphi_i(U)$.

3 Основные построения

3.1 Локальная точно 2–транзитивная группа

Теорема 1 *По локальному 2–псевдополю $\langle G; \cdot, E, \varphi_2, e\rangle$ можно построить локальную точно 2–транзитивную группу преобразований (G, G^2).*

1^0. Рассмотрим топологическое пространство G и его квадрат G^2, выделим окрестности $U, U_2 \subset G$; $W, W_2 \subset G^2$ локальных единиц $e \in U$, $e_2 \in U_2 = \varphi_2(U)$ и $W \subset (U \times (U_2 \cap U))$, $W_2 \subset ((U_2 \cap U) \times U_2)$ такие, что для произвольных $x \in U, (y_1, y_2) \in W$ и $x' \in U_2, (y_1', y_2') \in W_2$ справедливо

$$\varphi_2(x\varphi_2(y_1y_2^{-1}))y_2 \in G \text{ и } \varphi_2(x' \cdot_2 \varphi_2(y_2' \cdot_2 E_2(y_1'))) \cdot_2 y_1' \in G.$$

Определим функции $f_i : G \times G^2 \to G$

$$f_1(x, y_1, y_2) = \varphi_2(x\varphi_2(y_1y_2^{-1}))y_2, \text{ для } x \in U, (y_1, y_2) \in W \tag{3}$$

и

$$f_2(x, y_1, y_2) = \varphi_2(x \cdot_2 \varphi_2(y_2 \cdot_2 E_2(y_1))) \cdot_2 y_1, \text{ для } x \in U_2, (y_1, y_2) \in W_2. \tag{4}$$

Для $x \in U \cap U_2, (y_1, y_2) \in W \cap W_2$, обе функции $f_1(x, y_1, y_2)$ и $f_2(x, y_1, y_2)$ определены и они, с учётом (28), совпадают:

$$\begin{aligned} f_2(x, y_1, y_2) = \varphi_2\left(x \cdot_2 \varphi_2\left(y_2 \cdot_2 E_2(y_1)\right)\right) \cdot_2 y_1 = \left(\varphi_2(x) \cdot \left(y_2 \cdot_2 E_2(y_1)\right)\right) \cdot_2 y_1 = \\ \varphi_2\left(\varphi_2\left(\varphi_2(x) \cdot \varphi_2\left(\varphi_2(y_2)\varphi_2 E_2(y_1)\right)\right) \cdot \varphi_2(y_1)\right) = \\ \varphi_2\left(x\varphi_2\left(\varphi_2(y_1)E\varphi_2(y_2)\right) \cdot \varphi_2 E(y_2)\right) y_2 = \\ \varphi_2\left(x\varphi_2\left(y_1 E(y_2)\right) E\varphi_2 E(y_2)\varphi_2 E(y_2)\right) y_2 = \\ \varphi_2\left(x\varphi_2\left(y_1 E(y_2)\right)\right) y_2 = f_1(x, y_1, y_2). \end{aligned}$$

Для $x = e$ и $(y_1, y_2) \in W$ определена только первая функция, так как умножение $e \cdot_2 t$ для $t \in U_2$ не определено. Тогда

$$f_1(e, y_1, y_2) = \varphi_2(e\varphi_2(y_1y_2^{-1}))y_2 = \varphi_2(\varphi_2(y_1y_2^{-1}))y_2 = (y_1y_2^{-1})y_2 = y_1. \tag{5}$$

В противном случае, для $x = e_2$ и $(y_1, y_2) \in W_2$ определена вторая функция и из аналогичных построений:

$$f_2(e_2, y_1, y_2) = y_2, \tag{6}$$

при этом для первой функции

$$f_1(e_2, y_1, y_2) = \varphi_2(e_2\varphi_2(y_1 y_2^{-1}))y_2 = \varphi_2(e_2)y_2 = ey_2 = y_2$$

получается то же значение.

Рассмотрим функцию f_2 для $x, y \in U \cap U_2$:

$$f_2(x, y, e_2) = \varphi_2\left(x \cdot_2 \varphi_2\left(e_2 \cdot_2 E_2(y)\right)\right) \cdot_2 y = \\ \varphi_2\left(x \cdot_2 \varphi_2 E_2(y)\right) \cdot_2 y = \varphi_2\left(\left(x \cdot_2 \varphi_2 E_2(y)\right) \cdot \varphi_2(y)\right) = \\ \varphi_2\left(\left(x \cdot_2 E\varphi_2(y)\right) \cdot \varphi_2(y)\right) = \varphi_2\left(\varphi_2(x) \cdot_2 \varphi_2(y)\right) = x \cdot y. \quad (7)$$

Аналогично для функции f_1 и $x, y \in U \cap U_2$:

$$f_1(x, e_1, y) = x \cdot_2 y.$$

Далее определим функцию f и будем понимать, что f равна f_1 и/или f_2 и/или одной из двух групповых операций в том смысле, что когда какие то функции определены одновременно, то разницы нет какую из них рассматривать, т.к. они равны. Но, если определена только одна из функций, то f равна именно этой определённой функции:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} f_1(x, y, z), & \text{при } x \in U, (y, z) \in W, \\ x \cdot y, & \text{при } x, y \in U, z = e_2, \\ f_2(x, y, z), & \text{при } x \in U_2, (y, z) \in W_2, \\ x \cdot_2 z, & \text{при } x, z \in U_2, y = e, \end{cases} \quad (8)$$

и функция f определена для $x \in U \cup U_2$ и $(y, z) \in U \times U_2 \cup U_2 \times U$. Построим бинарную локальную операцию $(\circ_2) : G^2 \times G^2 \to G^2$ в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \circ_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, y_2) \\ f(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для удобства пары из G^2, записанные в виде столбца $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ или строки (x_1, x_2) различать не будем.

2^0. Проверим условие 1) определения 1 локальной группы — выполнение ассоциативности для тройки пар:

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in G^2.$$

С одной стороны для i–ой компоненты произведения

$$(x_1, x_2) \circ_2 \left((y_1, y_2) \circ_2 (z_1, z_2)\right)$$

можно записать:

$$\varphi_2(\varphi_2(x_i\varphi_2(y_1y_2^{-1}))y_2\varphi_2(z_1z_2^{-1}))z_2 = \\ \varphi_2(\varphi_2(x_i\varphi_2(y_1y_2^{-1}))\varphi_2\varphi_2(y_2\varphi(z_1z_2^{-1})))z_2 = \\ \varphi_2(x_i\varphi_2(y_1y_2^{-1})\varphi_2E\varphi_2(y_2\varphi_2(z_1z_2^{-1})))\varphi_2(y_2\varphi_2(z_1z_2^{-1}))z_2 = \\ \varphi_2(x_i\varphi_2(y_1\varphi_2(z_1z_2^{-1})E\varphi_2(y_2\varphi_2(z_1z_2^{-1})))\varphi_2(y_2\varphi_2(z_1z_2^{-1}))z_2.$$

В результате преобразований функции φ_2 пришли к записи i–ой компоненты уже произведения $((x_1, x_2)\circ_2(y_1, y_2))\circ_2(z_1, z_2)$ так, что локальная (убедимся в её локальности далее) операция $\circ_2$ ассоциативна и можно говорить, что $\langle G^2; \circ_2\rangle$ — локальная полугруппа.

3^0. Проверим условие 2) определения 1 локальной группы.
Пусть для некоторых a, b, c определено значение функции $f(a, b, c)$. Так как на G определена локальная группа и изоморфная ей с умножением $(\cdot_2)$, то для всякой окрестности W_1 элемента cb^{-1} существуют такие окрестности U_1 и V_1 элементов c и b^{-1}, что при $x \in U_1, y \in V_1$ произведение xy определено и $xy \in W_1$. Далее, для всякой окрестности W_2 элемента $a' \cdot_2 b'$ существуют такие окрестности U_2 и V_2 элементов a' и b', что при $x \in U_2, y \in V_2$ произведение $x \cdot_2 y$ определено и $x \cdot_2 y \in W_2$. И, наконец, для всякой окрестности W_3 элемента $a''b''$ существуют такие окрестности U_3 и V_3 элементов a'' и b'', что при $x \in U_3, y \in V_3$ произведение xy определено и $xy \in W_3$. Тогда, по суперпозиции, для произвольной окрестности $W = W_3 \ni f(a, b, c)$ существуют такие окрестности $U = \varphi_2(U_2)$, $V' \subseteq V_3 \cap E(V_1)$, $V \subseteq U_1$, при условии $V_2 \subseteq W_1, U_3 \subseteq W_2$, что для произвольных $x \in U, y \in V', z \in V$ выполнено $f(x, y, z) \in W$.

Рассмотрим произвольные пары $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$, для которых определено $(c_1, c_2) = (f(a_1, b_1, b_2), f(a_2, b_1, b_2))$, но, тогда, из предыдущего построения для произвольной окрестности $W \ni (c_1, c_2)$ существуют такие окрестности $U \ni (a_1, a_2), V \ni (b_1, b_2)$, что для произвольных $(x_1, x_2) \in U, (y_1, y_2) \in V$ выполнено

$$(f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)) = (x_1, x_2)\circ_2(y_1, y_2) \in W,$$

следовательно, операция $(\circ_2)$ — локальная.

4^0. Рассмотрим в качестве локальной единицы пару (e, e_2), тогда, с учётом (5) и (6): $(e, e_2) \circ_2 (y_1, y_2) = (y_1, y_2)$. Таким образом, пара $(e, e_2) \in G^2$ является локальной единицей, а $\langle G^2; \circ_2\rangle$ — локальный моноид.

Убедимся, что левым обратным к (x_1, x_2) является:

$$\begin{pmatrix} \varphi_2(x_2^{-1})E\varphi_2(x_1x_2^{-1}) \\ E\varphi_2(x_1x_2^{-1}) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Действительно, в произведении:

$$\begin{pmatrix} \varphi_2(x_2^{-1})E\varphi_2(x_1x_2^{-1}) \\ E\varphi_2(x_1x_2^{-1}) \end{pmatrix} \circ_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

для первой компоненты имеем

$$f_1(\varphi_2(x_2^{-1})E\varphi_2(x_1x_2^{-1}), x_1, x_2) = \\ \varphi_2(\varphi_2(x_2^{-1})E\varphi_2(x_1x_2^{-1})\varphi_2(x_1x_2^{-1}))x_2 = \varphi_2^2(x_2^{-1})x_2 = x_2^{-1}x_2 = e.$$

Для второй компоненты —

$$f_2(E\varphi_2(x_1x_2^{-1}), x_1, x_2) = \varphi_2\left(E\varphi_2(x_1x_2^{-1}) \cdot_2 \varphi_2\left(x_2 \cdot_2 E_2(x_1)\right)\right) \cdot_2 x_1 = \\ \left(\varphi_2E\varphi_2(x_1x_2^{-1}) \cdot \varphi_2\left(\varphi_2(x_2) \cdot \varphi_2E_2(x_1)\right)\right) \cdot_2 x_1 = \\ \left(\varphi_2E\varphi_2(x_1x_2^{-1}) \cdot \varphi_2\left(x_2E(x_1)\right)\varphi_2E\varphi_2(x_1)\right) \cdot_2 x_1 = \\ \left(\varphi_2E\varphi_2(x_1)\right) \cdot_2 x_1 = E_2(x_1) \cdot_2 x_1 = e_2.$$

Справедливость условия 4) определения 1 локальной группы следует из суперпозиции локальных групповых операций, локальности преобразований φ_2 и взятия обратного в локальной группе. В результате, приходим к тому, что $\langle G^2; \circ_2 \rangle$ — локальная группа. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что группа G вкладывается в группу G^2, $G \ni x \mapsto (x, e_2) \in G^2$, причём образ G при таком вложении совпадает со стабилизатором $G \simeq (G^2)_{e_2}$ элемента e_2 в группе G^2, что следует из (7) и определения функции (8).

В качестве примера группы G рассмотрим мультипликативную группу $\mathbb{R}^*$ и функцию $\varphi_2(x) = -x + 1$. Соответствующая группа G^2 строится при помощи функции $f(x, a, b) = x(a-b)+b$ и изоморфна аффинной группе преобразований множества $\mathbb{R}$.

3.2 Инфиксно–постфиксная запись

Выше, при помощи гомеоморфизма φ_2 и группы преобразований (G, G), построили группу (G, G^2). При рассмотрении n–псевдополей и увеличении числа n от 2–х до 3-х и более, существенно возрастёт количество скобок. Чтобы избежать их нагромождения, будем использовать комбинированную инфиксную и постфиксную запись формул.

Постфиксную запись для группы можно записать в виде действия группы на себе $G \times G' \to G$. Так, бинарную операцию умножения в группе G можно записать в виде функции (или унарной операции) $x \cdot y \equiv f_y(x)$, а в постфиксной записи — через правое действие $f_y(x) \equiv x \bullet [y]$, где $x \in G, [y] \in G'$. Для умножения трёх элементов

$$(x \cdot y) \cdot z = f_z(f_y(x)) = x \bullet [y][z].$$

Выполнение ассоциативности приводит к тождеству

$$x \bullet [y][z] = x \cdot (y \cdot z) = f_{y \cdot z}(x) = x \bullet [y \cdot z].$$

Для краткости точку в умножении будем опускать так, что

$$x \bullet [y][z] = x \bullet [y \cdot z] = x \bullet [yz].$$

Для обратной операции $x^{-1} = E(x)$ тождество $E(E(x)) = x$ в постфиксной записи будет выглядеть в следующем виде:

$$x \bullet EE = x \quad \text{или кратко} \quad EE = id.$$

Тождество $abb^{-1} = a$ для группы в постфиксной записи выглядит в виде:

$$a \bullet [b][b^{-1}] = a \quad \text{или сокращённо} \quad [b][b^{-1}] = id.$$

В результате чего, в постфиксной записи, когда подряд встречаются умножение на элемент и его обратный, будем сокращать это произведение.

Тождество 2 из определения 7 запишется в виде:

$$a \bullet \varphi_i[\varphi_i(b)]\varphi_i = a \bullet [\varphi_i E(b)]\varphi_i[b],$$

где $\varphi_i E(b) = \varphi_i(b^{-1})$, тогда сокращённо для $b' = \varphi_i(b)$:

$$\varphi_i[b']\varphi_i = [E_i(b')]\varphi_i[\varphi_i(b')], \tag{11}$$

где, напомним, $E_i = \varphi_i E \varphi_i = E \varphi_i E$. Тождество

$$\sigma_{ij}(\sigma_{ij}(x)y) = x\sigma_{ij}(y),$$

справедливое для автоморфизма σ_{ij} из пункта 3) определения 7 для группы G перепишется в виде:

$$\sigma_{ij}[y]\sigma_{ij} = [\sigma_{ij}(y)]. \tag{12}$$

Для φ_i и σ_{jk} справедливы соотношения:

$$\varphi_i \sigma_{jk} = \sigma_{jk}\varphi_i, \tag{13}$$

при $i \neq j, k$ и

$$\varphi_i \sigma_{ij} = \varphi_j \varphi_i. \tag{14}$$

Подытожим переход к смешанной инфиксно–постфиксной записи:

- формулы разбиваются на функции (унарные операции) — φ_i, E, σ_{ij}, умножение справа $[y]$ и записываются в постфиксной форме;
- если элемент $y = f(x)$ в унарной операции правого умножения $[y]$ сам является некоторой функцией, то она записывается уже в инфиксной форме $[f(x)]$.

Полученную в теореме 1 функцию (3) запишем в виде двухэлементного кортежа

$$f_1(x, y_1, y_2) \equiv x \bullet [y_1, y_2] = x \bullet [\varphi_2(y_1 y_2^{-1})]\varphi_2[y_2]. \tag{15}$$

(Обратим внимание, что запись в квадратных скобках $[y_1, y_2]$ ни в коем случае не говорит, что мы рассматриваем коммутатор элементов y_1 и y_2 — это просто обозначение для двухэлементного кортежа. Более того, нигде далее нам не придётся рассматривать коммутатор так, что такая запись не должна вводить в заблуждение.) Тогда для функции f_2 можно записать:

$$f_2(x, y_1, y_2) = x \bullet \varphi_2 \left[\varphi_2(y_2), \varphi_2(y_1)\right] \varphi_2,$$

а для естественной записи функции (8) принять соглашение:

$$[x, e_2] = [x], \quad [e, y] = \varphi_2 \left[\varphi_2(y)\right] \varphi_2.$$

Покажем, что имеет место следующая

Лемма 3.1 *Если для некоторых $x \in U \subset G$ и $(y_1, y_2) \in W \subset G^2$, для которых, с одной стороны определены $x \bullet [y_1, y_2]\varphi_2$ и $x \bullet [\varphi_2(y_1), \varphi_2(y_2)]$, а с другой стороны определены $x \bullet \varphi_2[y_1, y_2]$ и $[x \bullet y_2, y_1]$, то справедливы равенства:*

$$[y_1, y_2]\varphi_2 = [\varphi_2(y_1), \varphi_2(y_2)] \quad и \quad \varphi_2[y_1, y_2] = [y_2, y_1].$$

Действительно, распишем первое равенство:

$$x \bullet [y_1, y_2]\varphi_2 = \varphi_2\left(\varphi_2\left(x\varphi_2\left(y_1y_2^{-1}\right)\right)y_2\right) =$$
$$\varphi_2\left(x\varphi_2\left(y_1y_2^{-1}\right)\varphi_2 E\varphi_2\left(y_2\right)\right)\varphi_2\left(y_2\right) =$$
$$\varphi_2\left(x\varphi_2\left(\varphi_2\left(y_1\right)\varphi_2 E\varphi_2\left(y_2^{-1}\right)\right)\varphi_2\left(y_2^{-1}\right)\varphi_2 E\varphi_2\left(y_2\right)\right)\varphi_2\left(y_2\right) =$$
$$\varphi_2\left(x\varphi_2\left(\varphi_2\left(y_1\right)E\varphi_2\left(y_2\right)\right)\right)\varphi_2\left(y_2\right) = x \bullet [\varphi_2(y_1), \varphi_2(y_2)].$$

Для второго равенства:

$$x \bullet \varphi_2[y_1, y_2] = \varphi_2\left(\varphi_2\left(x\right)\varphi_2\left(y_1y_2^{-1}\right)\right)y_2 =$$
$$\varphi_2\left(x\varphi_2\left(y_2y_1^{-1}\right)\right)y_1y_2^{-1}y_2 = \varphi_2\left(x\varphi_2\left(y_2y_1^{-1}\right)\right)y_1 = x \bullet [y_2, y_1].$$

□

3.3 Локальная точно n–транзитивная группа

Для набора $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in G^n$ определим функцию–кортеж в виде суперпозиции кортежа меньшей размерности и функции φ_n:

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] =$$
$$\left[\varphi_n(x_1x_n^{-1}), \ldots, \varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})\right]\varphi_n[x_n]. \tag{16}$$

Лемма 3.2 *Для кортежа (16) при $i \leq n$ справедливы равенства:*

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]\,\varphi_i = [\varphi_i(x_1), \ldots, \varphi_i(x_{n-1}), \varphi_i(x_n)]\,, \tag{17}$$

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]\,[y] = [x_1y, \ldots, x_{n-1}y, x_ny] \tag{18}$$

и

$$\varphi_i\,[x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n] = [x_i, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_1, x_{i+1}, \ldots, x_n]\,. \tag{19}$$

Докажем утверждения по индукции. Выражение (18) получается просто из определения кортежа (16) и равенства:

$$x_ix_{n-1}^{-1} = x_iy(x_{n-1}y)^{-1}.$$

Для получения (17) можно записать:

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]\,\varphi_i \overset{(16)\text{ и }(11)}{=}$$
$$\left[\varphi_n(x_1x_n^{-1}), \ldots, \varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})\right]\varphi_n\varphi_i[E_i(x_n)]\varphi_i[\varphi_i(x_n)],$$

которое при $i = n$, с учётом индукции, превращается в равенство

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]\,\varphi_n =$$
$$\left[\varphi_n(x_1x_n^{-1})E_n(x_n), \ldots, \varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})E_n(x_n)\right]\varphi_n[\varphi_n(x_n)] =$$
$$[\varphi_n(\varphi_n(x_1)E\varphi_n(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_n(x_{n-1})E\varphi_n(x_n))]\,\varphi_n[\varphi_n(x_n)] =$$

$$[\varphi_n(x_1),\ldots,\varphi_n(x_{n-1}),\varphi_n(x_n)]\,.$$

Чтобы рассмотреть случай $i\in\{2,\ldots,n-1\}$, вспомним, что из определения автоморфизма σ_{ij} следует тождество $\varphi_n\varphi_i=\varphi_i\sigma_{in}$. Следовательно:

$$\left[\varphi_n(x_1x_n^{-1}),\ldots,\varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})\right]\varphi_i\sigma_{in}[E_i(x_n)]\varphi_i[\varphi_i(x_n)]\overset{(12)}{=}$$

$$\left[\varphi_i\varphi_n(x_1x_n^{-1}),\ldots,\varphi_i\varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})\right][\sigma_{in}E_i(x_n)]\sigma_{in}\varphi_i[\varphi_i(x_n)]\overset{\sigma_{in}\varphi_i=\varphi_i\varphi_n}{=}$$

$$\left[\varphi_i\varphi_n(x_1x_n^{-1}),\ldots,\varphi_i\varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})\right][\sigma_{in}E_i(x_n)]\varphi_i\varphi_n[\varphi_i(x_n)]=$$

$$\left[\sigma_{in}\varphi_i(x_1x_n^{-1})\sigma_{in}E_i(x_n),\ldots,\sigma_{in}\varphi_i(x_{n-1}x_n^{-1})\sigma_{in}E_i(x_n)\right]\varphi_i\varphi_n[\varphi_i(x_n)]=$$

$$\left[\sigma_{in}\left(\varphi_i(x_1x_n^{-1})E_i(x_n)\right),\ldots,\sigma_{in}\left(\varphi_i(x_{n-1}x_n^{-1})E_i(x_n)\right)\right]\varphi_i\varphi_n[\varphi_i(x_n)]=$$

$$\left[\varphi_n\left(\varphi_i(x_1)E\varphi_i(x_n)\right),\ldots,\varphi_n\left(\varphi_i(x_{n-1})E\varphi_i(x_n)\right)\right]\varphi_n[\varphi_i(x_n)]=$$

$$[\varphi_i(x_1),\ldots,\varphi_i(x_{n-1}),\varphi_i(x_n)]\,.$$

Итак, выражение (17) доказано. Покажем теперь справедливость (19). Для кортежа $n=2$ справедливость была показана в лемме 3.1. Рассмотрим теперь $n=3$ для φ_3:

$$\varphi_3[y_1,y_2,y_3]=\varphi_3[\varphi_3(y_1y_3^{-1}),\varphi_3(y_2y_3^{-1})]\varphi_3[y_3]=$$

$$\varphi_3[y_1^{(1)},y_2^{(1)}]\varphi_3[y_3]=\varphi_2\sigma_{23}\varphi_2[y_1^{(1)},y_2^{(1)}]\varphi_3[y_3]=\varphi_2\sigma_{23}[y_2^{(1)},y_1^{(1)}]\varphi_3[y_3]=$$

$$\varphi_2[\sigma_{23}\varphi_2(y_2^{(1)}E(y_1^{(1)}))]\sigma_{23}\varphi_2[y_1^{(1)}]\varphi_3[y_3]=$$

$$\varphi_2[\varphi_2\varphi_3(y_2^{(1)}E(y_1^{(1)}))]\varphi_2\varphi_3[y_1^{(1)}]\varphi_3[y_3]=$$

$$\varphi_2[\varphi_2\varphi_3(\varphi_3(y_2y_3^{-1})E\varphi_3(y_1y_3^{-1}))]\varphi_2[\varphi_3E(y_1y_3^{-1})]\varphi_3[y_1y_3^{-1}][y_3]=$$

$$\varphi_2[\varphi_2\left(\varphi_3(y_2y_3^{-1}E(y_1y_3^{-1}))E_3(y_1y_3^{-1})\right)]\varphi_2[\varphi_3(y_3y_1^{-1})]\varphi_3[y_1]=$$

$$\varphi_2[\varphi_2\left(\varphi_3(y_2y_1^{-1})E\varphi_3(y_3y_1^{-1})\right)]\varphi_2[\varphi_3(y_3y_1^{-1})]\varphi_3[y_1]=$$

$$[\varphi_2E\left(\varphi_3(y_2y_1^{-1})E\varphi_3(y_3y_1^{-1})\right)]\varphi_2[\varphi_3(y_2y_1^{-1})E\varphi_3(y_3y_1^{-1})][\varphi_3(y_3y_1^{-1})]\varphi_3[y_1]=$$

$$[\varphi_2\left(\varphi_3(y_3y_1^{-1})E\varphi_3(y_2y_1^{-1})\right)]\varphi_2[\varphi_3(y_2y_1^{-1})]\varphi_3[y_1]=$$

$$[\varphi_3(y_3y_1^{-1}),\varphi_3(y_2y_1^{-1})]\varphi_3[y_1]=[y_3,y_2,y_1].$$

Покажем справедливость соотношения (19), если оно выполнено для кортежей меньшей размерности:

$$\varphi_n[y_1,\ldots,y_{n-2},y_{n-1},y_n]=\varphi_{n-1}\sigma_{n,n-1}\varphi_{n-1}[y_1^{(1)},\ldots,y_{n-2}^{(1)},y_{n-1}^{(1)}]\varphi_n[y_n]=$$

$$\varphi_{n-1}\sigma_{n,n-1}[y_{n-1}^{(1)},y_2^{(1)},\ldots,y_{n-2}^{(1)},y_1^{(1)}]\varphi_n[y_n]=$$

$$\varphi_{n-1}\sigma_{n,n-1}[y_{n-1}^{(2)},y_2^{(2)},\ldots,y_{n-2}^{(2)}]\varphi_{n-1}[y_1^{(1)}]\varphi_n[y_n],\tag{20}$$

где

$$y_i^{(1)}=y_i\bullet[E(y_n)]\varphi_n\quad\text{и}\quad y_i^{(2)}=y_i^{(1)}\bullet[E(y_1^{(1)})]\varphi_{n-1}.\tag{21}$$

Подействуем преобразованием $\sigma_{n,n-1}$:

$$\sigma_{n,n-1}\left(y_i^{(2)}\right)=y_i\bullet[E(y_n)]\varphi_n[E\varphi_n(y_1y_n^{-1})]\varphi_{n-1}\sigma_{n,n-1}=$$

$$y_i \bullet [E(y_n)]\varphi_n[E\varphi_n(y_1y_n^{-1})]\varphi_n\varphi_{n-1} =$$
$$y_i \bullet [E(y_n)][E_nE\varphi_n(y_1y_n^{-1})]\varphi_n[\varphi_nE\varphi_n(y_1y_n^{-1})]\varphi_{n-1} =$$
$$y_i \bullet [E(y_n)][E(y_1y_n^{-1})]\varphi_n[E\varphi_n(y_ny_1^{-1})]\varphi_{n-1} =$$
$$y_i \bullet [E(y_1)]\varphi_n[E\varphi_n(y_ny_1^{-1})]\varphi_{n-1} = (y_i')^{(2)}. \tag{22}$$

Продолжим выражение (20) с учётом (21) и (22):

$$\varphi_{n-1}\sigma_{n,n-1}[y_{n-1}^{(2)}, y_2^{(2)} \dots, y_{n-2}^{(2)}]\varphi_{n-1}[y_1^{(1)}]\varphi_n[y_n] =$$
$$\varphi_{n-1}[(y_{n-1}')^{(2)}, (y_2')^{(2)}, \dots, (y_{n-2}')^{(2)}]\sigma_{n,n-1}\varphi_{n-1}[y_1^{(1)}]\varphi_n[y_n] =$$
$$\varphi_{n-1}[(y_{n-1}')^{(2)}, (y_2')^{(2)}, \dots, (y_{n-2}')^{(2)}]\varphi_{n-1}\varphi_n[y_1^{(1)}]\varphi_n[y_n] =$$
$$\varphi_{n-1}[(y_{n-1}')^{(2)}, (y_2')^{(2)}, \dots, (y_{n-2}')^{(2)}]\varphi_{n-1}[E_n(y_1^{(1)})]\varphi_n[\varphi_n(y_1^{(1)})][y_n] =$$
$$\varphi_{n-1}[(y_{n-1}')^{(2)}, (y_2')^{(2)}, \dots, (y_{n-2}')^{(2)}]\varphi_{n-1}[\varphi_n(y_ny_1^{-1})]\varphi_n[y_1y_n^{-1}][y_n] =$$
$$\varphi_{n-1}[(y_{n-1}')^{(2)}, (y_2')^{(2)}, \dots, (y_{n-2}')^{(2)}]\varphi_{n-1}[\varphi_n(y_ny_1^{-1})]\varphi_n[y_1] =$$
$$\varphi_{n-1}[(y_{n-1}')^{(1)}, (y_2')^{(1)}, \dots, (y_{n-2}')^{(1)}, (y_n')^{(1)}]\varphi_n[y_1] =$$
$$[(y_n')^{(1)}, (y_2')^{(1)}, \dots, (y_{n-1}')^{(1)}]\varphi_n[y_1] = [y_n, y_2, \dots, y_{n-1}, y_1],$$

где $(y_k')^{(1)} = \varphi_n(y_ky_1^{-1})$.

Осталось проверить (19) для n и φ_i при $i < n$:

$$\varphi_i[y_1, \dots, y_i, \dots, y_n] = \varphi_i[y_1^{(1)}, \dots, y_i^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)}]\varphi_n[y_n] =$$
$$[y_i^{(1)}, \dots, y_1^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)}]\varphi_n[y_n] = [y_1, \dots, y_i, \dots, y_n].$$

Лемма доказана. □

Определим функцию $f : G \times G^n \to G$ в виде:

$$f(x, y_1, \dots, y_n) =$$
$$\begin{cases} x \bullet [y_1, \dots, y_{n-1}], & \text{при} \quad y_n = e_n, \\ x \bullet [y_1, \dots, y_n], & \text{при} \quad x \in U, \\ x \bullet \varphi_i [\varphi_i(y_i), \dots, \varphi_i(y_1), \dots, \varphi_i(y_n)] \varphi_i, & \text{при} \quad x \in \varphi_i(U), \end{cases} \tag{23}$$

где $U \subset G$ окрестность единицы $e \in G$. Если $x \in \varphi_i(U) \cap U$, то с учётом леммы 3.2:

$$x \bullet [y_1, \dots, y_n] = x \bullet \varphi_i [\varphi_i(y_i), \dots, \varphi_i(y_1), \dots, \varphi_i(y_n)] \varphi_i.$$

При помощи функций (23) построим умножение в G^n:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f(x_n, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

для наборов: $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in G^n$.

Теорема 2 *По локальному n–псевдополю можно построить локальную точно n–транзитивную группу преобразований (G, G^n) с умножением (24).*

1^0. Проверим условие 1) определения 1 локальной группы — ассоциативность операции (24).

Из определения кортежей (15), (16) и с учётом леммы 3.2:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \left[x_1^{(n-1)}\right] \varphi_2 \left[x_2^{(n-2)}\right] \ldots \left[x_{n-2}^{(2)}\right] \varphi_{n-1} \left[x_{n-1}^{(1)}\right] \varphi_n \left[x_n\right], \qquad (25)$$

где $x_j^{(k)} = \varphi_{n+1-k} \left(x_j^{(k-1)} E \left(x_{n+1-k}^{(k-1)}\right)\right)$ и $x_j^{(0)} = x_j$. Тогда, с учётом выражений (17), (18) умножение кортежей $[x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n]$ запишется в виде

$$[x_1, \ldots, x_n]\,[y_1, \ldots, y_n] = [x_1 \bullet [y_1, \ldots, y_n], \ldots, x_n \bullet [y_1 \ldots, y_n]]. \qquad (26)$$

Следовательно,

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \bullet [y_1, \ldots, y_n] \\ \vdots \\ x_n \bullet [y_1, \ldots, y_n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \bullet [y_1, \ldots, y_n]\,[z_1, \ldots, z_n] \\ \vdots \\ x_n \bullet [y_1, \ldots, y_n]\,[z_1, \ldots, z_n] \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \bullet [y_1 \bullet [z_1, \ldots, z_n], \ldots, y_n \bullet [z_1, \ldots, z_n]] \\ \vdots \\ x_n \bullet [y_1 \bullet [z_1, \ldots, z_n], \ldots, y_n \bullet [z_1, \ldots, z_n]] \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right).$$

Условие 2) определения 1 выполнено по суперпозиции.

2^0. Проверим условие 3) определения 1 локальной группы. Убедимся, что $(e, e_2, \ldots, e_n) \in G^n$ задает левый нейтральный элемент. Для единицы e имеем:

$$f(e, x_1, \ldots, x_n) = e \bullet [x_1, \ldots, x_n] =$$
$$e \bullet [\varphi_n(x_1 x_n^{-1}), \ldots, \varphi_n(x_{n-1} x_n^{-1})]\varphi_n[x_n] = \varphi_n(x_1 x_n^{-1}) \bullet \varphi_n[x_n] = x_1.$$

Следовательно, при $i \geq 2$:

$$f(e_i, y_1, \ldots, y_n) = e_i \bullet \varphi_i \left[\varphi_i(y_i), \ldots, \varphi_i(y_1), \ldots, \varphi_i(y_n)\right] \varphi_i =$$
$$e \bullet \left[\varphi_i(y_i), \ldots, \varphi_i(y_1), \ldots, \varphi_i(y_n)\right] \varphi_i = \varphi_i(y_i) \bullet \varphi_i = y_i.$$

3^0. Проверим условие 4) определения 1 локальной группы.

Пусть, в локальной группе G^{n-1} для $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in G^{n-1}$ имеется обратный $(x_1, \ldots, x_{n-1})^{-1} \in G^{n-1}$ такой, что

$$(x_1, \ldots, x_{n-1})^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (e_1, \ldots, e_{n-1}),$$

где $e_1 = e$. Тогда для кортежа $[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ имеется обратный кортеж $[x_1, \ldots, x_{n-1}]^{-1}$ и для произвольного $y \in U$ выполнено

$$y \bullet [x_1, \ldots, x_{n-1}]^{-1}[x_1, \ldots, x_{n-1}] = y.$$

Обратным к элементу $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$ будет:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_n(x_n^{-1}) \bullet [x_1{}^{(1)}, \ldots, x_{n-1}{}^{(1)}]^{-1} \\ \vdots \\ \varphi_i\varphi_n E\varphi_i(x_n) \bullet \varphi_i[(\varphi_i(x_i))^{(1)}, \ldots, (\varphi_i(x_{n-1}))^{(1)}]^{-1}\varphi_i \\ \vdots \\ E\varphi_n(x_1) \bullet \varphi_n[(\varphi_n(x_n))^{(1)}, \ldots, (\varphi_n(x_{n-1}))^{(1)}]^{-1}\varphi_n \end{pmatrix}, \qquad (27)$$

где $x_j^{(1)} = \varphi_n\left(x_j x_n^{-1}\right)$ и

$$(\varphi_i(x_j))^{(1)} = \begin{cases} \varphi_n\left(\varphi_i(x_j)E\varphi_i(x_n)\right), & 1 < i < n, \\ \varphi_n\left(\varphi_n(x_n)E\varphi_n(x_1)\right), & i = n. \end{cases}$$

Умножение справа на $(x_1, \ldots, x_n)$ приводит к умножению на кортеж. Для первой компоненты:

$$\begin{aligned} &\varphi_{\mathrm{n}}(x_n^{-1}) \bullet [x_1{}^{(1)}, \ldots, x_{n-1}{}^{(1)}]^{-1}[x_1, \ldots, x_n] = \\ &\qquad \varphi_{\mathrm{n}}(x_n^{-1}) \bullet [x_1{}^{(1)}, \ldots, x_{n-1}{}^{(1)}]^{-1}[x_1{}^{(1)}, \ldots, x_{n-1}{}^{(1)}]\varphi_{\mathrm{n}}[x_n] = \\ &\qquad\qquad \varphi_{\mathrm{n}}(x_n^{-1}) \bullet \varphi_{\mathrm{n}}[x_n] = x_n^{-1} \bullet [x_n] = e. \end{aligned}$$

Для компонент с номерами $i = 2, \ldots, n-1$ имеем:

$$\begin{aligned} &\varphi_i\varphi_n E\varphi_i(x_n) \bullet \varphi_i[(\varphi_i(x_i))^{(1)}, \ldots, (\varphi_i(x_{n-1}))^{(1)}]^{-1}\varphi_i \times \\ &\qquad (\varphi_i[\varphi_i(x_i), \ldots, \varphi_i(x_n)]\varphi_i) = \\ &\qquad \varphi_i\varphi_n E\varphi_i(x_n) \bullet \varphi_i[(\varphi_i(x_i))^{(1)}, \ldots, (\varphi_i(x_{n-1}))^{(1)}]^{-1}\varphi_i \times \\ &\qquad \left(\varphi_i[(\varphi_i(x_i))^{(1)}, \ldots, (\varphi_i(x_{n-1}))^{(1)}]\varphi_n[\varphi_i(x_n)]\varphi_i\right) = \\ &\qquad \varphi_i\varphi_n E\varphi_i(x_n) \bullet \varphi_i\varphi_n[\varphi_i(x_n)]\varphi_i = E\varphi_i(x_n) \bullet [\varphi_i(x_n)]\varphi_i = \varphi_i(e) = e_i. \end{aligned}$$

И для последней компоненты:

$$\begin{aligned} &E\varphi_n(x_1) \bullet \varphi_n[(\varphi_n(x_n))^{(1)}, \ldots, (\varphi_n(x_{n-1}))^{(1)}]^{-1}\varphi_n \times \\ &\qquad (\varphi_n[\varphi_n(x_n), \varphi_n(x_2) \ldots, \varphi_n(x_{n-1}), \varphi_n(x_1)]\varphi_n) = \\ &\qquad E\varphi_n(x_1) \bullet \varphi_n[(\varphi_n(x_n))^{(1)}, \ldots, (\varphi_n(x_{n-1}))^{(1)}]^{-1}\varphi_n \times \\ &\qquad \left(\varphi_n[(\varphi_n(x_n))^{(1)}, \ldots, (\varphi_n(x_{n-1}))^{(1)}]\varphi_n[\varphi_n(x_1)]\varphi_n\right) = \\ &\qquad\qquad E\varphi_n(x_1) \bullet [\varphi_n(x_1)]\varphi_n = \varphi_n(e) = e_n. \end{aligned}$$

Таким образом, (27) задаёт обратный в локальной группе G^n.

Построенная локальная группа G^n при действии на самой себе — точно транзитивна, следовательно, как локальная группа преобразований G^n множества

G, она является точно n–транзитивной.
Теорема доказана. $\square$

Итак, построено отображение $F_2 : \langle G, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle \to (G, G^n)$, т.е. процедура, когда по произвольному n–псевдополю $\langle G, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ конструируется соответствующая группа преобразований (G, G^n).

3.4 Примеры

В качестве простейшего примера локальной точно дважды транзитивной группы приведём группу аффинных преобразований поля вещественных или комплексных чисел $x \to xa + b$, для которой соответствующую группу T_2 можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(y_1 - y_2) + y_2 \\ x_2(y_1 - y_2) + y_2 \end{pmatrix}.$$

В качестве нейтрального элемента выступает $(1, 0)$. Соответствующее локальное 2–псевдополе запишется при помощи действующей на мультипликативной группе G функции $\varphi_2(x) = -x + 1$.

Расширяя этот пример на случай $n = 3$, перейдём к локально изоморфной группе $\psi : G \to G'$ при помощи преобразования $\psi(x) = \frac{2x}{x+1}$ и обратного $\psi^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}$ так, что умножение в G':

$$x \cdot' y = \frac{2xy}{1 + x + y - xy},$$

с действующими на данной группе функциями

$$\varphi_2'(x) = \psi^{-1}\varphi_2\psi(x) = \frac{1 - x}{1 + 3x} \text{ и } \varphi_3'(x) = -x$$

и $e_1' = 1, e_2' = 0, e_3' = -1$. В этом случае групповое умножение в T_3 можно записать при помощи функции–кортежа

$$x \bullet [y_1, y_2, y_3] = \frac{x(2y_1y_3 - y_2(y_1 + y_3)) + y_2(y_3 - y_1)}{x(y_1 - 2y_2 + y_3) + y_3 - y_1}.$$

Дополнительные примеры для групп T_n преобразований множества $\mathbb{R}^2$ для $n \leq 4$ можно найти в [14].

Группа $GL_n(\mathbb{R})$ является примером локальной точно n–транзитивной группы преобразования $\mathbb{R}^n$, которая строится при помощи локального n–псевдополя, с выделенными элементами:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1),$$

мультипликативной группой G с умножением

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2, \ldots, x_1y_n + x_n)$$

и функциями φ_i, которые при действии на строку $(x_1, \dots, x_n)$ переставляют в строке два элемента x_1 и x_i, оставляя остальные на месте.

С этой же группой G и функциями φ_i, как при построении матричной группы GL_n, за исключением φ_n, которая заменяется на

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}, x_2, \dots, x_n),$$

строится [15] группа T_n, которая неизоморфна GL_n, но вложима в GL_{n+1}.

3.5 Локальное n-псевдополе

Определение 7 *Будем говорить, что группа преобразований (G, S_n) задаёт локальное n–псевдополе $\langle G; \cdot, E, \varphi_2, \dots, \varphi_n, e\rangle$, если выполнены следующие условия:*

1. *если определены произведения $a\varphi_i(b^{-1})$, $\varphi_i(a\varphi_i(b^{-1}))b$, $a \cdot_i b$, то имеет место равенство*

$$a \cdot_i b = \varphi_i(\varphi_i(a)\varphi_i(b)) = \varphi_i(a\varphi_i(b^{-1}))b; \tag{28}$$

2. *если определено произведение $a \cdot_i b$, то для всякой окрестности W элемента $a \cdot_i b$ существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что при $x \in U, y \in V$ произведения $x \cdot_i y$, $x\varphi_i(y^{-1})$, $\varphi_i(x\varphi_i(y^{-1}))y$ определены и $x \cdot_i y = \varphi_i(x\varphi_i(y^{-1}))y \in W$;*

3. *локальный гомеоморфизм $\sigma_{ij} = \varphi_j\varphi_i\varphi_j$ при $i \neq j$ является локальным автоморфизмом группы G_1;*

4. *если для некоторого $a \in G$ определены $\varphi_i E\varphi_i(a)$ и $E\varphi_i E(a)$, то справедливо равенство*
$$\varphi_i E\varphi_i(a) = E\varphi_i E(a),$$

5. *элементы $e_i = \varphi_i(e) \in G$, для бинарной операции на G, являются левыми нулями, то есть $e_i \cdot x = e_i$, для $x \in U$ из окрестности единицы $e \in G_1$.*

Уравнение (28) можно записать в виде связи двух групповых операций:

$$(a \cdot_i b)b^{-1} = \varphi_i(a) \cdot_i b^{-1},$$

для $a \in U \cap \varphi_i(U), b \in V \subset U \cap \varphi_i(U)$.

Покажем, что по локальной точно n–транзитивной группе можно построить локальное n–псевдополе. А именно, имеет место теорема

Теорема 3 *По локальной точно n–транзитивной группе T_n преобразований множества G можно построить локальное n–псевдополе.*

1^0. Так как T_n — локальная точно n–транзитивная группа, то стабилизатор произвольных n различных элементов из G тривиален. Рассмотрим n различных элементов $e_1, \dots, e_n$ из G, для которых существует нетривиальный стабилизатор элементов $e_2, \dots, e_n$. Фиксируем этот набор $[e_1, \dots, e_n]$.

Действие группы T_n на множестве G записывается в виде $a \mapsto a{\cdot}x$, где $x \in T_n$, $a \in G$. Зададим структуру локальной группы на множестве G^n. Элементу $x \in T_n$ сопоставим набор $[x_1, \ldots, x_n]$ из G^n по правилу:

$$[x_1, \ldots, x_n] = [e_1 \cdot x, \ldots, e_n \cdot x] = [e_1, \ldots, e_n] \cdot x,$$

тогда нейтральному элементу $e \in T_n$ сопоставится набор $[e_1, \ldots, e_n] \in G^n$. Определим операцию умножения таких наборов по правилу:

$$[x_1, \ldots, x_n][y_1, \ldots, y_n] = [e_1, \ldots, e_n] \cdot (xy) = [x_1, \ldots, x_n] \cdot y = \\ [x_1 \cdot y, \ldots, x_n \cdot y] = [x_1 \cdot [y_1, \ldots, y_n], \ldots, x_n \cdot [y_1, \ldots, y_n]], \quad (29)$$

где использовали, что в силу соответствия $T_n \ni x \mapsto [x_1, \ldots, x_n] \in G^n$, элементы группы G^n действуют на элементах множества G по правилу

$$a \cdot [x_1, \ldots, x_n] \equiv a \cdot x, \text{ где } \ a \in G, x \in T_n.$$

По построению локальные группы T_n и G^n локально изоморфны.

Действие группы G^n на элементах e_i следуют из тождества

$$[e_1, \ldots, e_n] \cdot [x_1, \ldots, x_n] = \\ [e_1 \cdot [x_1, \ldots, x_n], \ldots, e_n \cdot [x_1, \ldots, x_n]] = [x_1, \ldots, x_n]. \quad (30)$$

Обозначим через G^1 стабилизатор элементов $e_2, \ldots, e_n$ в группе G^n. Если $[y_1, \cdots, y_n] \in G^1$, то по определению стабилизатора

$$e_i \cdot [y_1, \cdots, y_n] = e_i, \text{ для } \ i \in \{2, \ldots, n\}.$$

Следовательно, с учётом (30) стабилизатор G^1 состоит из элементов

$$[y_1, e_2, \ldots, e_n] \in G^n.$$

Обозначим $[y_1] = [y_1, e_2, \ldots, e_n]$, тогда

$$a \cdot [y_1, e_2, \ldots, e_n] = a \cdot [y_1]\,, \; e_1 \cdot [y_1] = y_1 \text{ и } e_i \cdot [y_1] = e_i, \text{ для } i > 1. \quad (31)$$

В группе G^1 имеет место равенство

$$[x_1][y_1] = [x_1, e_2, \ldots, e_n][y_1, e_2, \ldots, e_n] = [x_1 y_1, e_2, \ldots, e_n] = [x_1 y_1],$$

исходя из которого, для некоторого x_1, определим обратный x_1^{-1}:

$$[x_1^{-1}] = [x_1]^{-1} = [x_1, e_2, \ldots, e_n]^{-1}.$$

Таким образом, мы перенесли структуру группы G^1 на само множество G, получив группу G, умножение в которой будем писать без точки. Тогда можно сказать, что из (31) следует выполнение тождества 5) из определения 7, т.е. элементы e_i для $i > 1$ являются левыми нулями для элементов группы G.

Далее через G_i^2 определим стабилизатор элементов

$$e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n$$

в группе G^n. Нетрудно понять, что каждый элемент из группы G_i^2 имеет вид $[x_1, e_2, \dots x_i, \dots, e_n]$ для некоторых $x_1, x_i \in G$. Введём обозначение для элементов G_i^2:

$$[x_1, x_i]_i \equiv [x_1, e_2, \dots x_i, \dots, e_n].$$

В стабилизаторе G_i^2 элемент $[e_1, e_i]_i$ нейтральный, а $[e_i, e_1]_i \in G_i^2$ — инволютивный:

$$[e_i, e_1]_i [e_i, e_1]_i = [e_1, e_i]_i.$$

Тогда, для произвольного $[x_1, x_i]_i \in G_i^2$ справедливы равенства:

$$[e_i, e_1]_i [x_1, x_i]_i = [x_i, x_1]_i; \quad [x_1, x_i]_i [e_i, e_1]_i = [\phi_i(x_1), \phi_i(x_i)]_i, \tag{32}$$

где по определению

$$\phi_i(a) = a \cdot [e_i, e_1]_i, \ a \in G.$$

Отметим, что $\phi_i(e_1) = e_i$.

Для произвольного $[e_1, x_i]_i$ справедливо:

$$[e_1, x_i]_i = [x_i^{-1}, e_1]_i [x_i, e_2]_i = \\ [\phi_i(x_i^{-1}), e_i]_i [e_i, e_1]_i [x_i, e_i]_i = [\phi_i(x_i^{-1})][e_i, e_1]_i [x_i].$$

С другой стороны, с учётом (32):

$$[e_1, x_i]_i = [e_i, e_1]_i [\phi_i(x_i^{-1}), e_i]_i [e_i, e_1]_i = [e_i, e_1]_i [\phi_i(x_i^{-1})][e_i, e_1]_i.$$

Следовательно,

$$\phi_i [\phi_i(x_i)] \phi_i = [\phi_i(x_i^{-1})] \phi_i [x_i]. \tag{33}$$

Подействовав обеими частями равенства на элемент $a \in G$, придём к выражению (28) из определения 7.

Так как данное тождество получено на локальной группе G^n, то и условие 2) из определения 7 выполнено.

2^0. Рассмотрим $x_i \in G$ для которого $\phi_i(x_i^{-1}), E\phi_i(x_i^{-1}) \in U$, и можно рассмотреть (33) при действии на $E\phi_i(x_i^{-1})$. Тогда, с учётом (31), с одной стороны:

$$E\phi_i(x_i^{-1}) \cdot [\phi_i(x_i^{-1})] \phi_i [x_i] = e_1 \cdot \phi_i [x_i] = e_i \cdot [x_i] = e_i,$$

с другой стороны:

$$E\phi_i(x_i^{-1}) \cdot \phi_i [\phi_i(x_i)] \phi_i = \phi_i \left(\phi_i E\phi_i(x_i^{-1}) \phi_i(x_i)\right).$$

Следовательно,

$$\phi_i E\phi_i(x_i^{-1}) \phi_i(x_i) = e_1,$$

откуда уже следует тождество 4) из определения 7.

3^0. Для доказательства утверждения 3) из определения 7 по произвольному $X = [x_1, \dots, x_n] \in G^n$ построим элемент $X_{ij} \in G^n$, который отличается от X перестановкой элементов x_i и x_j. Из (30) следует, что

$$E_{ij} X = X_{ij}, \text{ где } E_{ij} = [e_1, \dots, e_n]_{ij}.$$

С другой стороны, $E_{1i}^2 = E = [e_1, \ldots, e_n]$, для $i \in \{2, \ldots, n\}$ и

$$E_{1i}E_{1j}E_{1i} = E_{1j}E_{1i}E_{1j} \text{ при } i \neq j.$$

К введённым ранее $\phi_i(x) = x \cdot E_{1i}$, $x \in G$, определим $\varepsilon_{ij} : G \to G$ в виде

$$\varepsilon_{ij}(x) = x \cdot E_{ij} = x \cdot E_{1j}E_{1i}E_{1j} = \varphi_j\varphi_i\varphi_j(x),$$

тогда для произвольных $x \in U, y \in \phi_i(U) \cap U$ справедливо

$$x \cdot [y, e_2, \ldots, e_n]E_{ij} = x \cdot E_{ij}E_{ij}[y, e_2, \ldots, e_n]E_{ij} = \\ x \cdot E_{ij}[\varepsilon_{ij}(y), e_2, \ldots, e_n],$$

следовательно, придём к равенству

$$\varepsilon_{ij}(xy) = \varepsilon_{ij}(x)\varepsilon_{ij}(y).$$

Значит ε_{ij} принадлежит группе автоморфизмов локальной группы G, что приводит к выполнению условия 3) определения 7.
Теорема доказана. $\square$

Таким образом, построено отображение

$$F_1 : (G, T_n) \to \langle G, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle,$$

сопоставляющее локальной группе преобразований (G, T_n) соответствующее локальное n–псевдополе.

3.6 Категорная эквивалентность

Определение 8 *Для любого класса алгебр $K\mathfrak{A}$ через $\overline{K\mathfrak{A}}$ обозначим категорию, объектами которой являются алгебры $\mathfrak{A} \in K\mathfrak{A}$, а морфизмами — гомоморфизмы алгебр.*

Дадим теперь определение эквивалентности категорий [13, §4.4]:

Определение 9 *Функтор $\overline{F_2} : \overline{K\mathfrak{A}_1} \to \overline{K\mathfrak{A}_2}$ является эквивалентностью категорий, а категории $\overline{K\mathfrak{A}_1}$ и $\overline{K\mathfrak{A}_2}$ — эквивалентны, если существует (противоположно направленный) функтор $\overline{F_1} : \overline{K\mathfrak{A}_2} \to \overline{K\mathfrak{A}_1}$ и естественные изоморфизмы*

$$\overline{F_1}\;\overline{F_2} \cong I : \overline{K\mathfrak{A}_1} \to \overline{K\mathfrak{A}_1} \quad \text{и} \quad \overline{F_2}\;\overline{F_1} \cong I : \overline{K\mathfrak{A}_2} \to \overline{K\mathfrak{A}_2}.$$

Далее будем рассматривать группу преобразований (G, G^n) как двухсортную алгебру $\langle G, G^n; \bullet, g, E \rangle$, где $g : G^n \times G^n \to G^n$ — групповая операция, E — унарная операция взятие обратного в G^n. Действие группы G^n на топологическом пространстве G записывается в виде умножения:

$$(\bullet) : G \times G^n \to G.$$

Напомним, что гомоморфизм двух групп преобразований

$$(G, G^n) = \langle G, G^n; \bullet, g, E\rangle \text{ и } (G', G'^n) = \langle G', G'^n; \bullet', g', E'\rangle$$

задаётся парой отображений

$$\mu : G \to G' \text{ и } \lambda : G^n \to G'^n$$

так, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} G^n \arrow[r, "E"] \arrow[d, "\lambda"'] & G^n \arrow[d, "\lambda"] \\ G'^n \arrow[r, "E'"] & G'^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G^n \times G^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\lambda\times\lambda"'] & G^n \arrow[d, "\lambda"] \\ G'^n \times G'^n \arrow[r, "g'"] & G'^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times G^n \arrow[r, "(\bullet)"] \arrow[d, "\mu\times\lambda"'] & G \arrow[d, "\mu"] \\ G' \times G'^n \arrow[r, "(\bullet')"] & G' \end{tikzcd}$$

коммутативны.

Локальное n–псевдополе $\langle G, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\rangle$ рассмотрим в виде алгебры $\langle G; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\rangle$.

Пусть $K\mathfrak{A}_2 = K\langle G, G^n; \bullet, g, E\rangle$ и $K\mathfrak{A}_1 = K\langle G; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\rangle$ — классы алгебр локальных точно n транзитивных групп и локальных n–псевдополей.

Рассмотрим категории $\overline{K}\mathfrak{A}_2$, $\overline{K}\mathfrak{A}_1$, элементами которых являются соответствующие алгебры, а морфизмами — такие гомоморфизмы алгебр, при которых сохраняются числа n, которые являются степенью псевдополя и степенью точной транзитивности локальной группы преобразований.

Теорема 4 *Категории $\overline{K}\mathfrak{A}_2$ локальных точно n транзитивных групп и $\overline{K}\mathfrak{A}_1$ локальных n–псевдополей эквивалентны.*

1^0. В теоремах 3 и 2 были построены отображения F_1 и F_2, тем самым, для соответствующих функторов $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ были построены отображения объектов соответствующих категорий. Остаётся определить отображения морфизмов данных категорий.

Для произвольного морфизма $h \in \mathtt{mor}(\overline{K}\mathfrak{A}_1)$ по соответствующим алгебрам

$$\mathtt{dom}\ h = \langle G; \cdot, {}^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n\rangle \quad \text{и} \quad \mathtt{cod}\ h = \langle G^h; \cdot^h, {}^{-1^h}, \phi_2^h, \ldots, \phi_n^h\rangle,$$

при помощи F_2, построим их образы

$$\langle G, G^n; \bullet, g, E\rangle \quad \text{и} \quad \langle G^h, (G^h)^n; \bullet', g', E'\rangle.$$

С учётом конструкции групповой операции g, при помощи функции–кортежа, получим, что в категории $\overline{K}\langle G, G^n; \bullet, g, E\rangle$ групп преобразований, морфизм $\overline{F_2}(h)$ определяется парой морфизмов

$$h : G \to G^h \quad \text{и} \quad h \times \ldots \times h : G^n \to (G^h)^n$$

так, что $\overline{F_2}(h) = (h, h \times \ldots \times h)$. Единичный морфизм при таком отображении перейдёт в единичный

$$\overline{F_2} : id_{\mathfrak{A}_1} \mapsto id_{\mathfrak{A}_2}$$

и для произвольных $f, h \in \mathtt{mor}(\overline{K}\mathfrak{A}_1)$, для которых определена композиция $f \circ h$, также определена композиция

$$\overline{F_2}(f \circ h) = \overline{F_2}(f) \circ \overline{F_2}(h).$$

2^0. В первой части теоремы 3 выбором произвольного набора $[e_1, \ldots, e_n] = \mathbf{e} \in G^n$ мы перешли к изоморфной группе

$$(id, f_e) : \langle G, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1} \rangle \mapsto \langle G, G^n; \bullet, g, E \rangle.$$

Для произвольных гомоморфных групп преобразований таких, что

$$(\mu, \lambda) : \langle G, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1} \rangle \mapsto \langle G', T'_n; \bullet', \cdot', ^{-1'} \rangle$$

фиксируя наборы $\mathbf{e} \in G^n, \mathbf{e}' \in G'^n$, построим изоморфные группы:

$$(id, f_{\mathbf{e}}) : \langle G, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1} \rangle \to \langle G, G^n; \bullet, g, E \rangle,$$

$$(id, f_{\mathbf{e}'}) : \langle G', T'_n; \bullet', \cdot', ^{-1'} \rangle \to \langle G', G'^n; \bullet', g', E' \rangle.$$

Тогда отображение $(\mu', \lambda') = (id, f_{\mathbf{e}'})(\mu, \lambda)(id, f_{\mathbf{e}})^{-1}$ является гомоморфизмом групп $\langle G, G^n; \bullet, g, E \rangle \to \langle G', G'^n; \bullet', g', E' \rangle$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\langle G, G^n; \bullet, g, E \rangle \arrow[r, "(id, f_{\mathbf{e}})^{-1}"] \arrow[d, "(id, f_{\mathbf{e}'})(\mu,\lambda)(id, f_{\mathbf{e}})^{-1}"'] & \langle G, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1} \rangle \arrow[d, "(\mu,\lambda)"] \\
\langle G', G'^n; \bullet', g', E' \rangle & \langle G', T'_n; \bullet', \cdot', ^{-1'} \rangle \arrow[l, "(id, f_{\mathbf{e}'})"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

В теореме 3 по группе $\langle G, G^n; \bullet, g, E \rangle$ было построено n–псевдополе $\langle G; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle$. Если за f_1 обозначить это отображение, то F_1 представим в виде композиции $F_1 = f_1 \circ (id, f_{\mathbf{e}})$ так, что справедлива диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\langle G, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1} \rangle \arrow[r, "(id, f_{\mathbf{e}})"] \arrow[dr, "F_1"'] & \langle G, G^n; \bullet, g, E \rangle \arrow[d, "f_1"] \\
& \langle G; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle
\end{tikzcd}$$

Обратным к f_1 является отображение F_2 из теоремы 2. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\langle G, G^n; \bullet, g, E \rangle \arrow[d, "(\mu', \lambda')"'] & \langle G; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle \arrow[l, "f_1^{-1}"'] \arrow[d, "f_1 \circ (\mu', \lambda') \circ f_1^{-1}"] \\
\langle G', G'^n; \bullet', g', E' \rangle \arrow[r, "f_1"] & \langle G'; \cdot', ^{-1'}, \phi'_2, \ldots, \phi'_n \rangle
\end{tikzcd},$$

где морфизм $f_1 \circ (\mu', \lambda') \circ f_1^{-1}$ задаёт морфизм соответствующих алгебр. Таким образом построено отображение $\overline{F_1} : (\mu', \lambda') \to f_1 \circ (\mu', \lambda') \circ f_1^{-1}$. Единичный морфизм в категории $\overline{K}\mathfrak{A}_2$ при таком отображении перейдёт в единичный морфизм в категории $\overline{K}\mathfrak{A}_1$. Если

$$(f_1, f_2), (h_1, h_2) \in \mathtt{mor}\left(\overline{K}\mathfrak{A}_2\right),$$

для которых определена композиция $(f_1, f_2) \circ (h_1, h_2)$, то определено и

$$\overline{F_1}((f_1, f_2) \circ (h_1, h_2)) = \overline{F_1}(f_1, f_2) \circ \overline{F_1}(h_1, h_2).$$

Рассматривая суперпозицию отображений F_1, F_2 из теорем 3 и 2:

$$F_1 \circ F_2 \left(\langle G; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\rangle\right) = F_1 \left(\langle G, G^n; g, E\rangle\right) = \langle G; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n\rangle$$

и

$$F_2 \circ F_1(\langle G, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1}\rangle) = F_2 \left(\langle G; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n\rangle\right) = \langle G, G^n; g, E\rangle \ ,$$

приходим к естественному изоморфизму $\overline{F_1} \circ \overline{F_2} \cong I$ и $\overline{F_2} \circ \overline{F_1} \cong I$.
Теорема доказана. □

4 Заключение

В работе показано, что локальные точно n–транзитивные группы можно строить над более простыми объектами — локальными n–псевдополями, с которыми установлена категорно–эквивалентная связь.

В завершение возникает несколько вопросов для дальнейшей работы:

1. Пусть G — группа Ли. Классифицировать функции $\varphi : G \to G$ (возможно, определённые только на открытом подмножестве) такие, что
   (a) $\varphi(\varphi(x)\varphi(y)) = \varphi(x\varphi(E(y)))y$,
   (b) $\varphi(\varphi(x)) = x$,
   (c) $\varphi E \varphi(x) = E\varphi E(x)$.

2. На настоящий момент авторам известна классификация[2] локальных точно n–транзитивных групп преобразований множества $\mathbb{R}^2$ [16, 17]. Возникает задача: как минимум найти возможные 2–псевдополя над трёхмерными группами, а как максимум — построить классификацию локальных n–псевдополей для последующего построения соответствующих локальных n–транзитивных групп преобразования множества $\mathbb{R}^3$.

3. В качестве более общей задачи — найти ограничения, налагаемые на алгебры Ли для локальных точно n–транзитивных групп преобразований, когда они связаны с соответствующими локальными n–псевдополями.

Список литературы

[1] C. Jordan, “Recherches sur les substitutions”, J. Math. Pures Appl. (2), 17 (1872), 351–367.

[2] H. Freudenthal, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. 57, 218 (1954).

[2] В случае множества $\mathbb{R}$ она совпадает с глобальной.

[3] J. Tits, “Sur les groupes doublement transitif continus”, Comment. Math. Helv., 26 (1952), 203–224; “Sur les groupes doublement transitif continus: correction et complements”, Comment. Math. Helv., 30 (1956), 234–240.

[4] A. Barlotti, K. Strambach, “k-transitive permutation groups and k-planes”, Math. Z., 185:4 (1984), 465–485.

[5] H. Karzel, Inzidenzgruppen I. Lecture Notes by Pieper, I. and Sorensen, K., University of Hamburg (1965), 123–135.

[6] H. Karzel, “Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechtecksaxiom”, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 32:3-4 (1968), 191–206.

[7] H. Karzel, J. Kosiorek, A. Matras, A Representation of a Point Symmetric 2-Structure by a Quasi-Domain, Results. Math. 65 (2014), 333–346.

[8] W. Kerby, H. Wefelscheid, “Über eine scharf 3-fach transitiven Gruppen zugeordnete algebraische Struktur”, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 37:3-4 (1972), 225–235.

[9] W. Leissner, Ein Stufenaufbau der Fasthereiche, Fastkorper und Korper aus ihrer multiplikativen Gruppe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 46 (1977), 55–89.

[10] W. Leissner, On sharply n–ply transitive groups. The Eighteenth International Symposium on Functional Equations, August 26–September 6, 1980, Waterloo and Scarborough, Ontario, Canada.

[11] А.А. Симонов, Обобщение точно транзитивных групп. Изв. РАН. Сер. матем., 78:6 (2014), 153–178.

[12] Л.С. Понтрягин, Непрерывные группы, 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1973, 519 с.

[13] С. Маклейн, Категории для работающего математика, М., Физматлит, 2004, 352 с.

[14] А.А. Симонов, О соответствии между почти–областями и группами. Алгебра и Логика. 45:2 (2006), 239–251.

[15] В.Г. Бардаков, А.А. Симонов, Кольца и группы матриц с нестандартным произведением. Сиб. Матем. журнал, 54:3 (2013), 504–519.

[16] Г.Г. Михайличенко, Двуметрические физические структуры и комплексные числа. ДАН СССР, 321:4 (1991), 677–680.

[17] Г.Г. Михайличенко, Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2). Сиб. матем. журн., 34:3 (1993), 132–143.

Сведения об авторах

Михаил Владимирович Нещадим
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет
Пирогова 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail: neshch@math.nsc.ru

Андрей Артемович Симонов
Новосибирский государственный университет
Пирогова 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail: a.simonov@g.nsu.ru

Ключевые слова

Локальная топологическая группа, локальная точно n–транзитивная группа, локальное n–псевдополе.

Реферат статьи

Данная работа посвящена обобщениям действий топологических групп на многообразиях. Вместо топологической группы рассматривается локальная топологическая группа (иногда называемая виртуальной группой Ли или группускулой) обобщающая понятие ростка или окрестности единицы в топологической группе. Вводится понятие действия локальной группы на топологическом пространстве.

В работе строится теория локальных точно n–транзитивных групп и локальных n–псевдополей. Локальные точно n–транзитивные группы сводятся к более простым алгебраическим объектам — локальным n–псевдополям, по аналогии как и группы Ли сводятся к алгебрам Ли. Это может быть полезно так как, в отличие от локально компактных и связных точно n–транзитивных групп, которые отсутствуют для $n > 3$ локальные точно n–транзитивные группы есть при произвольном n, например — группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Рассматриваемые группы являясь ограниченно точно n–транзитивными, являются ещё и группами Ли, что даёт дополнительные методы исследований.