Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2021. Том 62, № 6

УДК 512.74+512.643.8

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КУЛАКОВА НА ГРУППАХ

М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Аннотация. Определяется алгебраическая система Кулакова как трехсортная алгебраическая система, удовлетворяющая аксиомам физической структуры. Доказывается усиленный вариант теоремы Ионина об эквивалентности физической структуры ранга $(2,2)$ структуре абстрактной группы. Рассмотрены негрупповые алгебраические системы Кулакова. Получена характеризация алгебраических систем Кулакова над произвольными группами.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.611

Ключевые слова: алгебраическая система Кулакова, физические структуры, трехсортная алгебра, группы, полугруппы, группоид, лупа.

Введение

Термин *физическая структура*[1)] был введен Ю. И. Кулаковым [1, 2] в середине 60-х годов прошлого века для описания математической теории, ориентированной на классификацию физических законов.

Перед тем как перейти к определениям, приведем пример, характеризующий постановку задачи в теории физических структур [1, с. 598–610]. Рассмотрим второй закон Ньютона, который можно записать в виде $f = ma$, где m — масса тела, a — его ускорение и f — сила, действующая на тело. Сложность возникает, когда мы попытаемся понять и определить понятия массы и силы, входящих в этот закон. Масса — мера инертности, но это определение неявно использует сам этот закон. Что такое сила? «Это причина, которая производит движение тела или которая стремится произвести движение» (Лагранж). Но все еще более усугубляется, если воспроизвести полностью традиционную формулировку второго закона Ньютона: «В инерциальной системе отсчета произведение ускорения материальной точки на ее массу равно по величине и направлению действующей на нее силе». При этом вводится нетривиальное понятие *инерциальной системы отсчета* и устанавливается связь между тремя физическими величинами: *ускорением, массой* и *силой*, две последние из которых предварительно не определены. Можно ли дать формулировку второго закона Ньютона так, чтобы не потребовалось предварительно определять понятие массы и силы?

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314–2019–0011).

[1)] Наряду с термином *физическая структура* используют также термин *феноменологически симметричная геометрия двух множеств* или сокращенно *геометрия двух множеств*.

Для этого Ю. И. Кулаков [1] рассмотрел два множества: множество тел $\mathfrak{M}$ и множество источников сил $\mathfrak{N}$. При этом если элементы множеств взаимодействуют между собой, то можно наблюдать такое взаимодействие в виде изменения скорости тел. Такое изменение — ускорение $a_{i\alpha}$ тела $i \in \mathfrak{M}$ под воздействием источника силы $\alpha \in \mathfrak{M}$ можно измерять.

В данном случае ускорение $a_{i\alpha}$ — это некоторое «расстояние» между телом i и источником силы α. Для произвольных двух тел $i, j \in \mathfrak{M}$ и двух произвольных источников силы $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ измерим четыре ускорения $a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta} \in \mathbb{R}$. Если говорить о физических измерениях, то с достаточной степенью точности имеет место соотношение

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Используя (произвольные) эталонные точки $j_0 \in \mathfrak{M}$, $\beta_0 \in \mathfrak{N}$, придем к выражению

$$a_{j_0\alpha} = \frac{a_{j_0\beta_0}}{a_{i\beta_0}} a_{i\alpha},$$

которое после переобозначений $a_{j_0\alpha} = F_\alpha$, $\frac{a_{j_0\beta_0}}{a_{i\beta_0}} = m_i$ можно записать в хорошо известном виде второго закона Ньютона:

$$F_\alpha = m_i a_{i\alpha}.$$

Таким образом, физическая структура, связанная с вторым законом Ньютона, характеризуется множествами $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathbb{R}$ и функцией $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей тождеству (1). При этом сила F_α характеризуется ускорением $a_{j_0\alpha}$ некоторого эталонного тела j_0, а инертная масса m_i — ускорением $a_{i\beta_0}$ тела i при воздействии на него эталонного источника силы β_0.

Исходя из данного примера можно поставить задачу поиска нетривиальных функций

$$f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}, \tag{2}$$

когда значения $f_{i\alpha} = f(i, \alpha)$ функции f на произвольных $i, j \in \mathfrak{M}$ и $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ оказываются тождественно связанными между собой:

$$g(f_{i\alpha}, f_{i\beta}, f_{j\alpha}, f_{j\beta}) = 0.$$

Данную постановку задачи можно обобщить на случай m элементов $i_1, \dots, i_m \in \mathfrak{M}$ и n элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{N}$.

В классе непрерывных функций (2) над гладкими многообразиями $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ с некоторыми дополнительными ограничениями на вид связи, налагаемой функцией g, задача была решена в работе Г. Г. Михайличенко [3]. Было показано, что решения возможны только в случае $|m - n| \leq 1$ при $\min(m, n) \geq 2$, а также $(m, n) = (4, 2)$ и $(2, 4)$. Эти решения можно интерпретировать [4] как обобщение матричного умножения, когда умножение матриц строится при помощи умножения строки на столбец перемножаемых матриц, не только при помощи билинейной функции

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{3}$$

но и при помощи функции

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)(y_i - y_n) + x_n + y_n. \tag{4}$$

Множество квадратных матриц с операцией умножения, построенной по функции (4), образует группу. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathbb{R}^n$, то для f возможны два решения в виде (3) и (4). При $|m - n| = 1$ можно построить умножение прямоугольных матриц с функцией, получающейся из (4) при $y_n = 0$, которое будет замкнуто относительно этого умножения.

Если рассматривать не два множества $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, а одно $\mathfrak{M}$, то задача поиска функций $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ эквивалентна [5] задаче нахождения геометрий максимальной подвижности [6]. Над множеством $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^n$ для $n = 2$ задача решена Г. Г. Михайличенко [7], а для $n = 3$ — В. Х. Левом [8] и дополнена В. А. Кыровым [9].

Функция (2) первоначально рассматривалась над гладкими многообразиями. В дальнейшем Е. Е. Витяев [10] рассмотрел физические структуры ранга $(2,2)$ над абелевыми, а В. К. Ионин [11] — над произвольными группами. А. А. Симонов показал, что физические структуры ранга (m,n) эквивалентны *ограниченно точно транзитивным группам*, которые можно представить в виде *псевдоматричного умножения* [12, 13].

В настоящей работе физическая структура рассматривается как трехсортная алгебраическая система Кулакова, для этого в разд. 1 первоначально определяются используемые алгебраические объекты, а далее вводится алгебраическая система Кулакова.

В разд. 2 доказывается усиленный вариант теоремы Ионина об эквивалентности физической структуры ранга $(2,2)$ структуре абстрактной группы. В п. 2.3. приводится негрупповой пример алгебраических систем Кулакова ранга $(2,2)$, анализируется, какие аксиомы не выполняются. В разд. 3 получена характеризация алгебраических систем Кулакова произвольного ранга (m,n) над группами.

1. Определения

Определение 1 [14, гл. 1, § 3]. Если алгебраическая система определена не на одном множестве A, а на нескольких $A_1, \dots, A_n$, т. е. носитель алгебры состоит более чем из одного множества, то такая алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A_1, \dots, A_n; \Omega \rangle$ называется *многосортной* (*n-сортной*[2)]), где Ω — сигнатура алгебры $\mathfrak{A}$ (множество основных операций алгебры $\mathfrak{A}$).

Определение 2 [15, § 2.2]. Если в алгебре $\mathfrak{A}$ определены частичные операции $f_i^{(\tau)} \in \Omega$, действующие не на всем множестве, то такие алгебры называются *частичными*. Здесь τ — арность операции $f_i^{(\tau)}$.

Определение 3 [15, § 3.1]. *Группоидом* называется алгебра $\langle G; \cdot \rangle$ с одной бинарной операцией.

Определение 4 [15, § 3.1]. Два группоида $\langle G; \cdot \rangle$ и $\langle G; \odot \rangle$ называются *изотопными*, если найдется такая тройка (λ, γ, χ) подстановок множества G, для которых справедливо $\lambda(x \cdot y) = \gamma(x) \odot \chi(y)$.

Определение 5 [15, § 3.2]. *Квазигруппой* (или *примитивной квазигруппой*) называется алгебра $\langle G; \cdot, \diagdown, \diagup \rangle$ с тремя бинарными операциями, для которых выполнены следующие тождества:

1) $(x \diagup y) \cdot y = x$, $y \cdot (y \diagdown x) = x$,
2) $(x \cdot y) \diagup y = x$, $y \diagdown (y \cdot x) = x$.

[2)] Иногда называют *многоосновной, многобазисной* или *гетерогенной.*

Если в квазигруппе имеется нейтральный элемент, то такая квазигруппа является *лупой.* Любая квазигруппа изотопна некоторой лупе, изотопные группы изоморфны (см., например, [16, § 6]).

Определение 6. В алгебре $\langle A;\Omega\rangle$ k-я переменная в n-арной операции $f\in\Omega$ *существенна*, если найдутся наборы $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,\ y_n)\in A^n$ такие, что $x_i=y_i$ при $i\neq k$ и $x_k\neq y_k$, для которых справедливо $f(x_1,\dots,x_n)\neq f(y_1,\dots,y_n)$.

В этом случае будем говорить, что операция $f(x_1,\dots,x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_k.

Для определения *алгебраической системы Кулакова* за основу возьмем определение Ю. И. Кулакова [1, 2, 17], но при этом откажемся от конкретизации рассматриваемых множеств и, следуя [12, 18], определим трехсортную алгебраическую систему без дополнительного условия разрешимости.

Определение 7. Частичная трехсортная алгебра $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{N},B;f,g,\varepsilon\rangle$ с нульарной операцией ε и частичными операциями $f:\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to B$, $g:B^{mn}\to B$, в которых все переменные существенные, задает *алгебраическую систему Кулакова ранга* (m,n), если существуют подмножества $\widehat{\mathfrak{M}^m}\subseteq\mathfrak{M}^m$, $\widehat{\mathfrak{N}^n}\subseteq\mathfrak{N}^n$ такие, что выполнена следующая аксиома.

К1. Для любых $(i_1,\dots,i_m)\in\widehat{\mathfrak{M}^m}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\widehat{\mathfrak{N}^n}$ справедливо

$$g(f(i_1,\alpha_1),\dots,f(i_m,\alpha_n))=\varepsilon. \tag{5}$$

Аксиома К1 составляет суть *феноменологической симметрии* [17]:

(1) при помощи функции f «производятся измерения» между элементами $i\in\mathfrak{M},\alpha\in\mathfrak{N}$,

(2) результаты «измерений» $f(i_q,\alpha_p)\in B$, где $q=1,\dots,m$, $p=1,\dots,n$, для произвольных $(i_1,\dots,i_m)\in\widehat{\mathfrak{M}^m}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\widehat{\mathfrak{N}^n}$ функционально зависимы.

Кортежи $(i_1,\dots,i_m)\in\widehat{\mathfrak{M}^m}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\widehat{\mathfrak{N}^n}$ в общем случае должны состоять из попарно различных элементов, так как в противном случае это приведет к существованию связи между меньшим числом элементов, построенных на кортежах меньшей длины.

Аксиома К1 может дополняться следующим набором аксиом К2, К3 и К1$'$.

К2. Для произвольных перестановок $\pi_1:(1,\dots,m)\to(1,\dots,m)$ и $\pi_2:(1,\dots,n)\to(1,\dots,n)$ если $(i_1,\dots,i_m)\in\widehat{\mathfrak{M}^m}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\widehat{\mathfrak{N}^n}$, то $(i_{\pi_1(1)},\dots,i_{\pi_1(m)})\in\widehat{\mathfrak{M}^m}$, $(\alpha_{\pi_2(1)},\dots,\alpha_{\pi_2(n)})\in\widehat{\mathfrak{N}^n}$.

Аксиома К2 означает, что соотношение (5) инвариантно относительно порядка элементов в кортежах.

Для исключения тривиальных f и g помимо существенной зависимости можно потребовать дополнительные ограничения. Рассмотрим кортеж $(b_{12},\dots,b_{mn})\in B^{mn-1}$, в который входят все $b_{ij}\in B$ для $i=1,\dots,m$ и $j=1,\dots,n$, за исключением b_{11}.

К3. Для произвольных $(b_{12},\dots,b_{mn})\in\widehat{B^{mn-1}}\subseteq B^{mn-1}$ существуют $(i_1,\dots,i_m)\in\widehat{\mathfrak{M}^m}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\widehat{\mathfrak{N}^n}$ такие, что $f(i_q,\alpha_p)=b_{qp}$ для $q\in\{1,\dots,m\}$ и $p\in\{1,\dots,n\}$.

Дополнительное ограничение на g связано с возможностью разрешить уравнение $g(b_{11},\dots b_{mn})=\varepsilon$ относительно b_{11} и таким образом усилить аксиому К1, записывая g в разрешенном виде, как в [11, 12].

К1$'$. Существует такая функция $\gamma:\widehat{B^{mn-1}}\to B$, что для $(f(i_1,\alpha_2),\dots,f(i_m,\alpha_n))\in\widehat{B^{mn-1}}\subseteq B^{mn-1}$, построенных на произвольных кортежах $(i_1,\dots,i_m)\in\widehat{\mathfrak{M}^m}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\widehat{\mathfrak{N}^n}$, справедливо равенство

$$\gamma(f(i_1,\alpha_2),\dots,f(i_m,\alpha_n))=f(i_1,\alpha_1).$$

Следуя [14, гл. 1], определим гомоморфизмы алгебр $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{N},B;f,g,\varepsilon\rangle$.

Определение 8. Тройка отображений $\chi:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}'$, $\lambda:\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}'$, $\psi:B\to B'$ задает гомоморфизм трехсортной алгебры $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{N},B;f,g,\varepsilon\rangle$ в алгебру $\langle\mathfrak{M}',\mathfrak{N}',B';f',g',\varepsilon'\rangle$, если $\psi(\varepsilon)=\varepsilon'$, а диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\chi\times\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathfrak{M}'\times\mathfrak{N}' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} B^{mn} & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle\psi^{mn}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ B'^{mn} & \xrightarrow{g'} & B' \end{array}$$

коммутативны.

Если в тройке (ψ,χ,λ) все отображения биективны, то они задают изоморфизм трехсортных алгебр.

2. Частные решения

2.1. Теорема Ионина. В [11] рассмотрена алгебраическая система Кулакова $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{N},B;f,\gamma\rangle$ ранга $(2,2)$ в случае, когда все три множества $\mathfrak{M},\mathfrak{N},B$ совпадают, $\widehat{\mathfrak{M}^2}=\widehat{\mathfrak{N}^2}=B^2$ и выполнены следующие условия.

(1) Уравнение $g(x,y,z,t)=\varepsilon$ можно разрешить относительно первой переменной $x=\gamma(y,z,t)$ так, что для произвольных $q,p,u,v\in B$ получается тождество $f(q,u)=\gamma(f(q,v),f(p,u),f(p,v))$.

(2) Для произвольных $x,y,z\in B$ найдется такая четверка $(q,p,u,v)\in B^2\times B^2$, что $x=f(q,v)$, $y=f(p,u)$, $z=f(p,v)$.

(3) Для произвольного $x\in B$ отображения

$$L_x:B\to B,\ L_x(y)=f(x,y),\ y\in B,\quad R_x:B\to B,\ R_x(y)=f(y,x),\ y\in B,$$

являются биекциями.

В. К. Ионин доказал [11], что алгебраическая система Кулакова $\langle B,B,B;f,\gamma\rangle$ с точностью до изоморфизма строится над соответствующей группой $\langle B;\cdot,{}^{-1},e\rangle$, причем

$$f(x,y)=x\cdot y,\quad \gamma(x,y,z)=x\cdot z^{-1}\cdot y. \tag{6}$$

2.2. Усиление теоремы Ионина. Покажем, что условие (3) можно заменить более слабым требованием, а именно существованием нейтрального элемента $e\in B$ такого, что $f(x,e)=f(e,x)=x$.

Действительно, условие (3) эквивалентно определению операции f как квазигруппы. При помощи изотопии всегда можно перейти от квазигруппы к лупе [16, § 6]. Иными словами, воспользовавшись условием (3), при помощи эквивалентного преобразования (определение 8) можно перейти к алгебраической системе Кулакова с нейтральным элементом в операции f. Откажемся теперь от условия, позволяющего построить квазигруппу, но оставим существование нейтрального элемента.

Теорема 1. *Пусть* $\langle B, B, B; f, g, e\rangle$ — *алгебраическая система Кулакова ранга* $(2, 2)$, *причем выполнены следующие условия.*

(1) *Существует такая функция* $\gamma : B^3 \to B$, *что для произвольных* (q, p), $(u, v) \in B^2$ *справедливо равенство*

$$f(q, u) = \gamma(f(q, v), f(p, u), f(p, v)). \tag{7}$$

(2) *Для произвольных* $x, y, z \in B$ *найдется такая четверка* $(q, p, u,\ v) \in B^2 \times B^2$, *что* $x = f(q, v)$, $y = f(p, u)$, $z = f(p, v)$.

(3) *Для выделенного в алгебре элемента* $e \in B$ *и произвольного* $x \in B$ *справедливо равенство* $f(x, e) = f(e, x) = x$.

Тогда на B *можно определить структуру группы* $\left\langle B; \cdot, ^{-1}, e\right\rangle$, *для которой выполнены равенства* (6).

Доказательство. При доказательстве будем рассматривать упорядоченные наборы $(q, p, u, v) \in B^2 \times B^2$, по которым построим соответствующие им равенства (7).

Определим умножение $x \cdot y$ равенством $x \cdot y = xy = f(x, y)$ и убедимся, что функцию f можно выразить при помощи функции γ. Для этого рассмотрим набор $(q, e, u, e) \in B^2 \times B^2$ и запишем соответствующее им равенство (7):

$$f(q, u) = \gamma(f(q, e), f(e, u), f(e, e)) = \gamma(q, u, e). \tag{8}$$

Далее построим операции правого и левого делений. Для произвольных $x, y \in B$ в соответствии с условием (2) найдется набор $(q, p, u, v) \in B^2 \times B^2$ такой, что

$$x = f(q, v), \quad e = f(p, u), \quad y = f(p, v). \tag{9}$$

Определим операцию правого деления $(/) : B \times B \to B$ равенством (7) на данном наборе:

$$\gamma(x, e, y) = \gamma(f(q, v), f(p, u), f(p, v)) = f(q, u) = x/y. \tag{10}$$

Если теперь для выбранных $(q, p, u, v) \in B^2 \times B^2$ рассмотреть их перестановку $(q, p, v, u) \in B^2 \times B^2$, то получим выражение

$$\gamma(f(q, u), f(p, v), f(p, u)) = f(q, v),$$

которое в обозначениях (9) с учетом (8) запишется в виде

$$(x/y) \cdot y = x. \tag{11}$$

Аналогичным образом, используя набор $(q, p, u, v) \in B^2 \times B^2$, для которого справедливы равенства

$$x = f(p, u), \quad e = f(q, v), \quad y = f(p, v), \tag{12}$$

построим операцию левого деления $(\backslash) : B \times B \to B$:

$$\gamma(e, x, y) = \gamma(f(q, v), f(p, u), f(p, v)) = f(q, u) = y\backslash x. \tag{13}$$

Рассмотрим перестановку $(p, q, u, v) \in B^2 \times B^2$ и получим выражение

$$\gamma(f(p, v), f(q, u), f(q, v)) = f(p, u),$$

которое в обозначениях (12) с учетом (8) запишем в виде

$$y \cdot (y\backslash x) = x. \tag{14}$$

Убедимся, что введенные операции действительно задают правое и левое деления для данного умножения. При помощи четверки (x, e, e, y) запишем (7)

$$x = f(x, e) = \gamma(f(x, y), f(e, e), f(e, y)) = \gamma(x \cdot y, e, y) = (x \cdot y)/y.$$

Приходим к тому, что (10) с учетом (11) определяет правое деление. Запишем (7) для четверки (e, x, y, e):

$$y = f(e, y) = \gamma(f(e, e), f(x, y), f(x, e)) = \gamma(e, x \cdot y, x) = x \backslash (x \cdot y),$$

следовательно, (13) с учетом (14) определяет левое деление. Множество с операциями умножения, левым, правым делениями и нейтральным элементом является лупой.

Чтобы показать, что операция умножения ассоциативна, запишем равенство (7) сначала для набора (xy, y, z, e):

$$(xy)z = f((xy), z) = \gamma(f((xy), e), f(y, z), f(y, e)) = \gamma(xy, yz, y).$$

Аналогично для набора (x, e, yz, y):

$$x(yz) = f(x, (yz)) = \gamma(f(x, y), f(e, (yz)), f(e, y)) = \gamma(xy, yz, y).$$

Итак, $(xy)z = x(yz)$. Ассоциативная лупа является группой, поэтому можно ввести операцию взятия обратного элемента. С учетом условия (2) для произвольных $x, y, z \in B$ выберем $q = xv^{-1}$, $u = p^{-1}y$, $pv = z$, тогда

$$\gamma(x, y, z) = f(qu) = qu = xv^{-1}p^{-1}y = xz^{-1}y.$$

Теорема доказана.

2.3. Пример Серовайского. В. К. Ионин в [11] сформулировал вопрос существования негрупповых алгебраических систем Кулакова ранга (2,2). Действительно, если отказаться от условия разрешимости, т. е. существования функции $\gamma : B^3 \to B$ и биективности отображений, построенных при помощи функции f, то можно построить и негрупповые решения. На основе примера С. Я. Серовайского [19] рассмотрим алгебру $\langle B, B, B; f, g, \varepsilon \rangle$, задаваемую на линейно упорядоченном множестве $\langle B; \leq \rangle$ с функцией

$$f(x, y) = \max(x, y), \tag{15}$$

и g, определяющую феноменологическую симметрию:

$$g(a, b, c, d) = \begin{cases} f(f(a, d), f(b, c)), & \text{если } \ f(a, d) \neq f(b, c) \\ & \text{и } \ f(f(a, d), f(b, c)) \neq \varepsilon, \\ \varepsilon_2, & \text{если } \ f(a, d) \neq f(b, c) \\ & \text{и } \ f(f(a, d), f(b, c)) = \varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{если } \ f(a, d) = f(b, c), \end{cases} \tag{16}$$

где $\varepsilon \neq \varepsilon_2 \in B$.

Легко убедиться, что для произвольных $x, y, u, v \in B$ для определенной в (16) функции $g(a, b, c, d)$ выполняется тождество

$$g(f(x, u), f(x, v), f(y, u), f(y, v)) = \varepsilon,$$

следовательно, выполнена аксиома К1. Из коммутативности операции f следует выполнение аксиомы К2.

Для выполнения аксиомы К3 необходимо определить подмножество $\widehat{B^3}$, так как не для произвольной тройки $(\alpha, \beta, \delta) \in B^3$ можно найти соответствующие $x, y, u, v \in B$, чтобы выполнялись равенства $\alpha = f(x, v)$, $\beta = f(y, u)$, $\delta = f(y, v)$. Например, ни при каких $x, y, u, v \in B$ не выполняется неравенство $f(y, v) > f(x, v) > f(y, u)$. Тогда тройка $(\alpha, \beta, \delta) \in B^3$ с условием $\alpha > \beta > \delta$ не должна входить в подмножество $\widehat{B^3}$, следовательно, из соответствующих подмножеств $\widehat{B^2}$ должны быть исключены пары (x, y) и (u, v), для которых $y > x$ и $v > u$. Но такие исключения приведут к нарушению аксиомы К2. Следовательно, аксиома К3 в данной алгебре не выполняется.

Выполнение аксиомы К1$'$, а значит, равенства

$$f(x, u) = \gamma(f(x, v), f(y, u), f(y, v)),$$

возможно, только если $x = \max(x, y, u, v)$ или $u = \max(x, y, u, v)$, что, в свою очередь, вновь приводит к нарушению аксиомы К2.

Пример С. Я. Серовайского, когда справедливы аксиомы К1 и К2, а К3 и К1$'$ не выполняются, легко обобщить на более широкий класс алгебраических объектов, например, на все коммутативные полугруппы $\langle B; \cdot \rangle$. Для этого определим функцию

$$f(x, y) = x \cdot y. \tag{17}$$

Фиксируя произвольный элемент $\varepsilon \in B$ и определяя функцию g в виде (16), получим алгебраическую систему Кулакова $\langle B, B, B; f, g, \varepsilon \rangle$ над полугруппами.

Можно построить алгебраическую систему Кулакова и над группоидом $\langle G; \cdot \rangle$, если для него имеется гомоморфизм $\psi : G \to B$ в нетривиальную коммутативную полугруппу $\langle B; \cdot \rangle$. Нетривиальность полугруппы необходима для того, чтобы зависимость функции g от переменных была существенной. В этом случае функцию f построим в виде умножения (17) над группоидом, а функцию g в виде

$$g(a, b, c, d) = \begin{cases} f(f(a, d), f(b, c)), & \text{если } \ \psi(f(a, d)) \neq \psi(f(b, c)) \\ & \text{и } \ f(f(a, d), f(b, c)) \neq \varepsilon, \\ \varepsilon_2, & \text{если } \ \psi(f(a, d)) \neq \psi(f(b, c)) \\ & \text{и } \ f(f(a, d), f(b, c)) = \varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{если } \ \psi(f(a, d)) = \psi(f(b, c)). \end{cases}$$

3. Алгебраические системы Кулакова на абстрактных группах

Фиксируем натуральные числа $n, m \geq 2$ и рассмотрим свободную группу F_{nm} со свободными порождающими a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Пусть

$$\Phi = \Phi(a_{11}, \dots, a_{nm})$$

— некоторое фиксированное слово из группы F_{nm}.

Определение 9. Будем говорить, что слово Φ задает *феноменологическую симметрию* ранга (n, m) в классе всех групп, если для любой группы G и для любого набора элементов $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_m$ из группы G ядро гомоморфизма

$$\varphi : F_{nm} \to G, \quad a_{ij} \mapsto x_i y_j, \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m$$

содержит слово Φ, т. е. слово Φ содержится в пересечении всех ядер таких гомоморфизмов.

Теорема 2. *Слово* $\Phi \in F_{nm}$ *задает феноменологическую симметрию ранга* (n, m) *в классе всех групп тогда и только тогда, когда* Φ *лежит в нормальном замыкании подгруппы*

$$W = \left\langle a_{ij}^{-1} a_{im} a_{nm}^{-1} a_{nj},\ i = 1, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, m-1 \right\rangle$$

группы F_{nm}.

Доказательство. Во-первых, заметим, что достаточно рассматривать гомоморфизмы

$$\varphi : F_{nm} \to F_{n+m}, \quad a_{ij} \mapsto x_i y_j, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m, \tag{18}$$

где $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_m$ — свободные порождающие свободной группы F_{n+m}.

Далее, ядро гомоморфизма (18) содержит слова $a_{ij}^{-1} a_{il} a_{kl}^{-1} a_{kj}$ для любых индексов $1 \le i = 1 \le k \le n$, $1 \le j = 1 \le j \le m$, так как

$$\varphi\bigl(a_{ij}^{-1} a_{il} a_{kl}^{-1} a_{kj}\bigr) = (x_i y_j)^{-1} (x_i y_l) (x_k y_l)^{-1} (x_i y_j) = 1.$$

Система соотношений

$$a_{ij}^{-1} a_{il} a_{kl}^{-1} a_{kj} = 1, \quad 1 \ge i = 1 \le k \le n,\ 1 \ge j = 1 \le j \le m, \tag{19}$$

эквивалентна своей конечной подсистеме

$$a_{ij}^{-1} a_{im} a_{nm}^{-1} a_{nj} = 1, \quad i = 1, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, m-1. \tag{20}$$

Действительно, в силу (20)

$$a_{ij} = a_{im} a_{nm}^{-1} a_{nj}, \quad i = 1, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, m-1,$$

поэтому

$$a_{ij}^{-1} a_{il} a_{kl}^{-1} a_{kj} = \bigl(a_{im} a_{nm}^{-1} a_{nj}\bigr)^{-1} \bigl(a_{im} a_{nm}^{-1} a_{nl}\bigr) \bigl(a_{km} a_{nm}^{-1} a_{nl}\bigr)^{-1} \bigl(a_{km} a_{nm}^{-1} a_{nj}\bigr) = 1$$

и выполняется (19). Рассмотрим подгруппу

$$W = \left\langle a_{ij}^{-1} a_{im} a_{nm}^{-1} a_{nj},\ i = 1, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, m-1 \right\rangle$$

группы F_{nm} и ее нормальное замыкание $\overline{W}$. По построению любое слово Φ из подгруппы $\overline{W}$ определяет феноменологическую симметрию ранга (n, m).

Обратно, пусть некоторое слово Φ из группы F_{nm} определяет феноменологическую симметрию. Тогда по модулю подгруппы $\overline{W}$ слово Φ можно переписать как слово Φ_0, только от букв $a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}, a_{n,m-1}, \dots, a_{n2}, a_{n1}$. В свободной группе F_{n+m} соответствующие слова

$$x_1 y_m, x_2 y_m, \dots, x_n y_m, x_n y_{m-1}, \dots, x_n y_2, x_n y_1$$

порождают свободную подгруппу, так как, полагая $y_m = 1$, получаем свободную систему порождающих $x_1, x_2, \dots, x_n, x_n y_{m-1}, \dots, x_n y_2, x_n y_1$ подгруппы $F_{n+m-1} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1} \rangle$. Поэтому если $\varphi(\Phi_0) = 1$, то $\Phi_0 = 1$, т. е. $\Phi \in \overline{W}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Группа W является свободной группой ранга $(n-1)(m-1)$. Действительно, гомоморфизм $\varphi : F_{nm} \to F_{(n-1)(m-1)}$, при котором

$$a_{ij} \mapsto a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, m-1,$$

$$a_{nj}, a_{im} \mapsto 1, \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m,$$

отображает элементы $w_{ij} = a_{ij}^{-1} a_{im} a_{nm}^{-1} a_{nj}$ в свободные порождающие a_{ij}, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$.

Следовательно, если слово $\Phi \in W$ содержит нетривиальным образом все слова w_{ij}, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$, то его нельзя переписать от меньшего числа слов w_{ij}. Поэтому соответствующая феноменологическая симметрия ранга (n, m) не может быть сведена к феноменологической симметрии меньшего ранга (n', m'), где $n' < n$ или $m' < m$.

Пример 1. Слово

$$\Phi(a_{11}, \dots, a_{33}) \equiv \bigl(a_{11}^{-1} a_{13} a_{33}^{-1} a_{31}\bigr)\bigl(a_{12}^{-1} a_{13} a_{33}^{-1} a_{32}\bigr)\bigl(a_{21}^{-1} a_{23} a_{33}^{-1} a_{31}\bigr)\bigl(a_{22}^{-1} a_{23} a_{33}^{-1} a_{32}\bigr)$$

определяет невырожденную феноменологическую симметрию ранга $(3, 3)$.

Пример 2. Слово

$$\Phi(a_{11}, \dots, a_{33}) \equiv \bigl(a_{22}^{-1} a_{23} a_{33}^{-1} a_{32}\bigr)$$

определяет вырожденную феноменологическую симметрию ранга $(3, 3)$, которая очевидным образом сводится к феноменологической симметрии ранга $(2, 2)$.

Замечание 2. В определении феноменологической симметрии Φ участвует функция $f(x, y) = x \cdot y$. Естественно задаться вопросом: какие феноменологические симметрии получаются при использовании другой функции $f(x, y)$?

Пример 3. Если взять функцию $f(x, y) = [x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$, то получим только тривиальные феноменологические симметрии $\Phi \equiv 1$. Действительно, коммутаторы $[x_i, y_j]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, в свободной группе F_{n+m} являются свободными порождающими подгруппы ранга nm (см. [20, гл. 4, § 4.1]). Поэтому только тривиальные слова от коммутаторов $[x_i, y_j]$ могут быть равны единице.

Дадим общее определение феноменологической симметрии ранга (n, m) в классе всех групп, в котором участвует также функция $f(x, y)$.

Фиксируем натуральные числа $n, m \geq 2$ и рассмотрим свободную группу F_{nm} со свободными порождающими a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Пусть $\Phi = \Phi(a_{11}, \dots, a_{nm})$ — некоторое слово из группы F_{nm}. Пусть также фиксировано некоторое слово $f(x, y)$ из свободной группы ранга 2 со свободными порождающими x, y.

Определение 10. Будем говорить, что пара слов (Φ, f) *задает феноменологическую симметрию ранга* (n, m) в классе всех групп, если для любой группы G и для любого набора элементов $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_m$ из группы G ядро гомоморфизма

$$\varphi : F_{nm} \to G, \quad a_{ij} \mapsto f(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m,$$

содержит слово Φ. Другими словами, слово Φ содержится в пересечении всех ядер таких гомоморфизмов.

Аналогично могут быть определены феноменологические симметрии в многообразиях групп, разрешимых, нильпотентных, абелевых, периодических и т. д.

3.1. Аксиомы К2, К3, К1′ для алгебраических систем Кулакова, построенных на группах. Сделаем несколько замечаний относительно аксиом К2, К3, К1′ для алгебраических систем Кулакова, построенных по некоторому слову Φ из подгруппы $\overline{W}$.

Замечание 3. Аксиома K2 выполняется для любого слова $\Phi \in \overline{W}$ и для любой группы G. Действительно, при любой перестановке элементов $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_m)$ система соотношений (19), очевидно, сохраняется.

Замечание 4. Аксиома K3 выполняется только для ранга $(n, m) = (2, 2)$. Действительно, равенства

$$a_{12} = x_1 y_2, \quad a_{21} = x_2 y_1, \quad a_{22} = x_2 y_2$$

для произвольного набора $(a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in G$ имеют решение $x_1 = a_{12}$, $y_2 = 1$, $x_2 = a_{22}$, $y_1 = a_{22}^{-1} a_{21}$. Если $m \geq 3$, то из равенств

$$a_{12} = x_1 y_2, \quad a_{13} = x_1 y_3, \quad a_{22} = x_2 y_2, \quad a_{23} = x_2 y_3$$

получаем следствие

$$x_2 x_1^{-1} = a_{22} a_{12}^{-1}, \quad x_2 x_1^{-1} = a_{23} a_{13}^{-1},$$

которое не может быть выполнено для произвольных $(a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23})$ из произвольной группы G.

Замечание 5. Аксиома K1′ — разрешимость тождества

$$\Phi(a_{11}, \dots, a_{nm}) = 1$$

относительно некоторого a_{ij} — может быть как выполнена, так и не выполнена в зависимости от слова $\Phi \in \overline{W}$. Например, тождества

$$a_{11}^{-1} a_{12} a_{22}^{-1} a_{21} = 1, \quad a_{11}^{-1} a_{12} a_{22}^{-1} a_{21} a_{33}^{-1} a_{34} a_{44}^{-1} a_{43} = 1$$

могут быть разрешены относительно любой входящей в них буквы. Тождество

$$\left(a_{11}^{-1} a_{13} a_{33}^{-1} a_{31}\right)\left(a_{12}^{-1} a_{13} a_{33}^{-1} a_{32}\right)\left(a_{21}^{-1} a_{23} a_{33}^{-1} a_{31}\right)\left(a_{22}^{-1} a_{23} a_{33}^{-1} a_{32}\right) = 1$$

можно разрешить относительно a_{11}, но нельзя разрешить относительно a_{33}. Тождество

$$\left(a_{11}^{-1} a_{12} a_{22}^{-1} a_{21}\right)^2 = 1$$

нельзя разрешить относительно никакой из букв $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

Заключение

В разд. 2 показано, что если выполнены не только аксиомы K1′, K2 и K3, но и дополнительное условие — существование нейтрального элемента, то алгебраические системы Кулакова ранга $(2, 2)$ взаимно однозначно связаны с группами.

Если в примере С. Я. Серовайского, разобранном в п. 2.3, рассмотреть множество B с минимальным элементом $e \in B$, то в операции (15) он будет нейтральным и мы почти попадаем в условие теоремы 1. Не выполняется только аксиома K3, а первая аксиома справедлива в виде K1. То же самое происходит и для алгебраической системы Кулакова, построенной над произвольной коммутативной полугруппой. Отсюда можно заключить, что усиление требований, а именно выполнение аксиом K3 и K1′, приводит к групповым решениям.

Выполнение аксиомы K3 также становится сильным требованием и не выполняется в групповых решениях для алгебраических систем Кулакова произвольного ранга, за исключением ранга $(2, 2)$.

В [12, 13] с использованием аксиом K1′, K2 и модификации K3 показано, что алгебраические системы Кулакова ранга (m, n) связаны с ограниченно точно транзитивными группами. Остается открытым вопрос классификации ограниченно точно транзитивных групп, если они локально компактны, связны и действуют на топологическом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулаков Ю. И.* Теория физических структур. Новосибирск: Альфа Виста, 2004.
2. *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 5. С. 1142–1145.
3. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 5. С. 1056–1058.
4. *Бардаков В. Г., Симонов А. А.* Кольца и группы матриц с нестандартным произведением // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 504–519.
5. *Кыров В. А., Богданова Р. А.* Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 412–421.
6. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 366–388.
7. *Михайличенко Г. Г.* Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 4. С. 803–805.
8. *Лев В. Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычисл. системы. 1988. Т. 125. С. 90–104.
9. *Кыров В. А.* Аналитическое вложение некоторых двумерных геометрий максимальной подвижности // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 916–937.
10. *Витяев Е. Е.* Числовое, алгебраическое и конструктивное представления одной физической структуры // Вычисл. системы. 1985. Т. 107. С. 40–51.
11. *Ионин В. К.* Абстрактные группы как физические структуры // Вычисл. системы. 1990. Т. 135. С. 40–43.
12. *Симонов А. А.* Псевдоматричные группы и физические структуры // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 211–226.
13. *Симонов А. А.* Обобщение точно транзитивных групп // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 6. С. 153–178.
14. *Плоткин Б. И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. М.: Наука, 1991.
15. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
16. *Курош А. Г.* Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года. М.: Наука, 1974.
17. *Кулаков Ю. И.* Об одном принципе, лежащем в основании классической физики // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 1. С. 72–75.
18. *Simonov A. A., Kulakov Y. I., Vityaev E. E.* On an algebraic definition of laws // J. Math. Psychol. 2014. V. 58. P. 13–20.
19. *Serovaiskii S. Ya.* Mathematical basis of physical structures theory // Intern. J. Math. Phys. 2013. V. 4, N 1. P. 10–28.
20. *Магнус В., Каррас А., Солитер Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 11 марта 2021 г.
После доработки 22 июня 2021 г.
Принята к публикации 11 августа 2021 г.

Нещадим Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
Пирогова, 1, Новосибирск 630090
neshch@math.nsc.ru

Симонов Андрей Артёмович
Новосибирский государственный университет,
Пирогова, 1, Новосибирск 630090
a.simonov@g.nsu.ru