

## АБСТРАКТНЫЕ ГРУППЫ КАК ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

В.К. Ионин

Понятие физической структуры впервые введено Ю.И.Кулаковым в [1]. Во всех последующих работах Кулакова и других авторов эти структуры рассматривались не на абстрактных множествах, а на множествах, оснащенных какими-нибудь другими структурами, например, структурами аналитических многообразий. В настоящей статье мы будем исходить из абстрактных множеств. Мы приведем определение некоторого класса физических структур и покажем, что оно эквивалентно определению абстрактной группы. Заметим, что наше определение, хотя и содержит случаи, которые ранее не рассматривались, не является обобщением структур Кулакова, оно не является обобщением даже структур ранга (2,2). Перейдем к точным формулировкам.

1. Рассмотрим тройку  $(B, \Phi, \Gamma)$ , где  $B$  - произвольное непустое множество,  $\Phi$  - множество некоторых функций из  $B \times B$  в  $B$ , а  $\Gamma$  - функция, отображающая  $B^3 = B \times B \times B$  в  $B$ . Будем говорить, что на множестве  $B$  задана физическая структура  $(\Phi, \Gamma)$ , если  $\Phi$  - максимальное множество, для которого выполняются две аксиомы:

АКСИОМА 1. Если  $(x, y, z, w) \in B^4$  и  $\varphi \in \Phi$ , то

$$\varphi(x, y) = \Gamma(\varphi(x, z), \varphi(w, y), \varphi(w, z)).$$

АКСИОМА 2. Для любой тройки  $(b, c, d) \in B^3$  найдутся такие четверка  $(x, y, z, w) \in B^4$  и функция  $\varphi \in \Phi$ , что

$$b = \varphi(x, z), \quad c = \varphi(w, y), \quad d = \varphi(w, z).$$

2. Предположим, что  $B$  - группа, произведение элементов  $x, y$  будем записывать в виде  $xy$ . Имеет место

**ТЕОРЕМА 1.** Пара  $(\Phi, \Gamma)$  есть физическая структура на группе  $B$ , если множество  $\Phi$  некоторых функций из  $B^2$  в  $B$  и функция  $\Gamma$  из  $B^3$  в  $B$  определяются условиями:

а) для того чтобы функция  $\varphi: B^2 \rightarrow B$  входила в  $\Phi$ , необходимо и достаточно существование двух таких функций  $p: B \rightarrow B$  и  $q: B \rightarrow B$ , что  $\varphi(x, y) = p(x)q(y)$ ;

б) для любой тройки  $(y, z, w) \in B^3$  выполняется равенство  $\Gamma(y, z, w) = yw^{-1}z$ .

Доказательство опускаем, так как оно является легким упражнением.

Нетрудно также видеть, что для пары  $(\Phi, \Gamma)$  из теоремы 1 вытекает следующее

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** Существует такая функция  $g \in \Phi$ , что для любой пары  $(a, b) \in B^2$  отображения  $x \mapsto g(x, b)$  и  $y \mapsto g(a, y)$  биективны.

Функцию  $g$  можно определить, например, формулой  $g(x, y) = xy$ .

3. Рассмотрим две группы  $B_1$  и  $B_2$ , заданные на одном множестве  $B$ . Обозначим через  $(\Phi_i, \Gamma_i)$  (где  $i = 1, 2$ ) физическую структуру, порождаемую группой  $B_i$  в соответствии с теоремой 1. Очевидна следующая

**ТЕОРЕМА 2.** Равносильны следующие два утверждения:

а)  $B_1 = B_2$ ;    б)  $(\Phi_1, \Gamma_1) = (\Phi_2, \Gamma_2)$ .

4. Вследствие теоремы 1 каждая групповая структура на непустом множестве  $B$  порождает некоторую физическую структуру. В дальнейшем такие структуры будем называть групповыми фи-

зическими структурами. Теоремы 1 и 2 позволяют установить естественное биективное отображение множества всех групповых структур на множество всех групповых физических структур. При этом все эти структуры рассматриваются на произвольном непустом множестве  $B$ . Возникает естественный вопрос: существуют ли физические структуры, отличные от групповых? Мы пока не знаем полного ответа на этот вопрос, можем только доказать следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 3.** Для того чтобы физическая структура  $(\Phi, \Gamma)$ , заданная на непустом множестве  $B$ , была групповой, достаточно, чтобы для нее выполнялось предположение.

Доказательство приводится в п. п. 5-7.

5. Пусть  $g$  - функция из предложения. Для краткости введем обозначение  $g(x, y) = xy$  для любой пары  $(x, y) \in B^2$ . Элемент  $xy$  будем называть произведением  $x$  на  $y$ . Ясно, что для любой фиксированной пары  $(a, b) \in B^2$  каждое из уравнений  $ax = b$  и  $xa = b$  имеет единственное решение. Множество  $B$  с такой бинарной операцией, т.е. пара  $(B, g)$ , называется квазигруппой.

6. Рассмотрим два биективных отображения  $p: B \rightarrow B$  и  $q: B \rightarrow B$ . Ясно, что функция  $\varphi: B^2 \rightarrow B$ , определенная формулой  $\varphi(x, y) = g(p(x), q(y))$ , входит в  $\Phi$ . Легко видеть, что для произвольного элемента  $\varepsilon \in B$  функции  $p$  и  $q$  можно подобрать так, чтобы выполнялись равенства  $\varphi(x, \varepsilon) = x$ ,  $\varphi(\varepsilon, y) = y$  для любых  $x, y \in B$ . Очевидно, что  $\varphi$ , как и  $g$ , удовлетворяет предположению. Для простоты обозначений будем считать, что не  $\varphi$ , а  $g$  удовлетворяет двум последним равенствам, т.е.  $x\varepsilon = x$ ,  $\varepsilon y = y$  для любых  $x, y \in B$ . Это обстоятельство позволяет нам считать без ограничения общности, что квазигруппа  $(B, g)$  имеет единицу  $\varepsilon$ . Такие квазигруппы называются лупами.

7. Для того, чтобы установить, что лупа  $(B, \varepsilon)$  является группой, осталось доказать равенство  $x(yz) = (xy)z$  для любых  $x, y, z \in B$ . Это верно, так как  $x(yz) = \Gamma(xy, \varepsilon(yz), \varepsilon y) = \Gamma((xy)\varepsilon, yz, y\varepsilon) = (xy)z$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур. -Новосибирск, 1968. - 226 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

18 июня 1990 года