

УДК 512.816+514.142

Проективная геометрия и феноменологическая симметрия

Владимир А. Кыров*

Горно-Алтайский государственный университет,
Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.09.2011, принята к печати 10.11.2011

В данной работе изучается физическая структура максимального ранга в проективном пространстве $(PV)^s$ над алгеброй гиперкомплексных чисел V . Доказывается, что эту структуру образует группа проективных преобразований пространства $(PV)^s$.

Ключевые слова: проективное пространство, группа проективных преобразований.

В начале XIX в. возникла проективная геометрия, источником появления которой служит графика и архитектура. Большой вклад в развитие проективной геометрии внесли: Понселе, который изучал проективные свойства фигур, Шаль и Штейнер, развившие синтетическое направление, Дезарг, доказавший важные теоремы, приведшие к понятию гармонической группы элементов, и др.

На современном этапе можно выделить два подхода к определению проективной геометрии [1]. Первый — синтетический, в основу которого положены аксиомы связи, порядка и непрерывности. Второй подход аналитический, связанный с введением в проективном пространстве сложного отношения четырех точек. В проективной геометрии ключевое значение имеет изучение проективного отображения. Семейство проективных отображений, сохраняющих основное отношение $n+3$ точек в пространстве размерности n , в одномерном случае совпадающее с гармоническим отношением, образует группу проективных преобразований. Можно доказать, что единственным инвариантом проективной группы является основное отношение. Это дает возможность выхода для проективной геометрии на Эрлангенскую программу Ф. Клейна.

В данной статье предлагается новый подход к определению проективной геометрии, в основу которой положена система аксиом теории физических структур, появившейся при анализе фундаментальных законов физики. Данный подход устанавливает связь проективной геометрии не только с теорией групп преобразований, но и с теорией квазигрупп. Так, в частности, основное отношение в проективной геометрии имеет естественную квазигрупповую интерпретацию.

1. Физическая структура ранга $(n + 1, 2)$

1. Рассмотрим два топологических пространства B и N .

Определение 1. Говорят, что на топологических пространствах B и N определена *физическая структура (ФС) ранга $(n + 1, 2)$* , если существует непрерывное отображение $f : B \times N \rightarrow B$, называемое *метрическим*, и выполняются аксиомы [2]:

$$A1. \forall \langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle \in \Omega_{B^n}, \forall \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \in \Omega_{B^n}, \exists! \alpha \in N:$$

$$f(i_1, \alpha) = b_1, f(i_2, \alpha) = b_2, \dots, f(i_n, \alpha) = b_n,$$

*kfizika@gasu.ru

где $\Omega_{B^n} \subset B^n$ — открытое и плотное подпространство.

Построим отображение $F_{j_1 j_2 \dots j_n} : N \rightarrow \Omega_{B^n} : F_{j_1 j_2 \dots j_n}(\alpha) = (f(j_1 \alpha), f(j_2 \alpha), \dots, f(j_n \alpha))$, где $\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle \in \Omega_{B^n}$. По А1 данное отображение — биекция.

А1'. Отображение $F_{j_1 j_2 \dots j_n} : N \rightarrow \Omega_{B^n}$, где $\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle \in \Omega_{B^n}$, является гомеоморфизмом.

А2. $\forall \alpha \in \Omega_N$ отображение $f_\alpha : B \rightarrow B$, на элементах задаваемое формулой $f_\alpha(i) = f(i\alpha)$, является гомеоморфизмом, причем $\Omega_N \subset N$ — открытое и плотное подпространство.

А3. (Аксиома феноменологической симметрии) $\forall \langle i_0, i_1, i_2, \dots, i_n \rangle \in B \times \Omega_{B^n}$ и $\forall \langle \alpha_0, \alpha \rangle \in N \times \Omega_N$ существует функциональная связь:

$$f(i_0 \alpha_0) = g(f(i_0 \alpha), f(i_1 \alpha), f(i_2 \alpha), \dots, f(i_n \alpha), (i_1 \alpha_0), f(i_2 \alpha_0), \dots, f(i_n \alpha_0))),$$

где $g : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \times B \rightarrow B$ — непрерывное отображение.

2. Введем обозначения $w_1 = f(j_1 \alpha), w_2 = f(j_2 \alpha), \dots, w_n = f(j_n \alpha), z = f(i\gamma)$, где $\gamma \in \Omega_N$. Таким образом, исходная метрическая функция записывается так:

$$f(i\alpha) = f(F_\gamma^{-1}(z), F_{j_1 j_2 \dots j_n}^{-1}(w_1, w_2, \dots, w_n)) = \bar{f}(z, w_1, w_2, \dots, w_n), \quad (1)$$

где $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$. Построенное отображение \bar{f} — непрерывно и удовлетворяет аксиомам А1 — А3, т.е. задает метрическое отображение ФС ранга $(n+1, 2)$.

Обозначим $f(j_m \gamma) = e_m, m = 1, 2, \dots, n, E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Тогда можно доказать [2]:

$$\bar{f}(e_m, w_1, w_2, \dots, w_n) = w_m, \bar{f}(z, e_1, e_2, \dots, e_n) = z.$$

3. На Ω_{B^n} введем бинарную операцию:

$$(z_1, z_2, \dots, z_n)(w_1, w_2, \dots, w_n) = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n), \quad (2)$$

причем $\bar{f}_m = \bar{f}(z_m, w_1, w_2, \dots, w_n)$. В работе [2] доказывается, что бинарная операция (2) является квазигруппой [3]. Эту операцию можно расширить до отображения $D : B^n \times \Omega_{B^n} \rightarrow B^n$, которое индуцирует отображение $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$. Явный вид для D совпадает с (2), при условии $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in B^n$. Можно доказать тождество [2]:

$$(XY)Z = X(YZ), X \in B^n, Y, Z \in \Omega_{B^n}. \quad (*)$$

Если $X \in \Omega_{B^n}$, то тождество (*) служит аксиомой ассоциативности, поэтому квазигруппа Ω_{B^n} с бинарной операцией (2) будет непрерывной группой с единицей E . В общем случае (*) задает основное свойство группы преобразований [4], остальные свойства вытекают из А1 и А2, поэтому множество отображений D образует непрерывную группу преобразований с параметрической группой Ω_{B^n} , индуцирующее также непрерывную и транзитивную группу преобразований пространства B с действием $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$.

4. **Теорема 1.** Тождество из аксиомы А3 эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} & \tilde{f}(\tilde{f}(z, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(w_1, a_1, \dots, a_n), \dots, \tilde{f}(w_n, a_1, \dots, a_n)) = \\ & = \tilde{f}(\tilde{f}(z, b_1, \dots, b_n), \tilde{f}(w_1, b_1, \dots, b_n), \dots, \tilde{f}(w_n, b_1, \dots, b_n)), \end{aligned} \quad (3)$$

причем $\tilde{f}(z, w_1, \dots, w_n) = \bar{f}(z, (w_1, \dots, w_n)^{-1}), \forall \langle w_1, \dots, w_n \rangle, \langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \Omega_{B^n}, \forall z \in B, (w_1, \dots, w_n)^{-1}$ — элемент, обратный к (w_1, \dots, w_n) в группе Ω_{B^n} .

Тождество (3) несложно представить в виде

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(w_1, a_1, \dots, a_n), \dots, \tilde{f}(w_n, a_1, \dots, a_n)) = \tilde{f}(z, w_1, \dots, w_n). \quad (3')$$

Доказательство. Из определения отображений \bar{f} и \tilde{f} следует выполнимость аксиомы А2, т.е. однозначная разрешимость этих функций относительно первого аргумента. Поэтому разрешая тождество (3) относительно первого аргумента левой части, получаем аксиому А3.

Докажем теперь обратное. Для этого в тождестве (*) положим $Y = A$, $Z = (YA)^{-1}$. После приведения подобных имеем $(XA)(YA)^{-1} = XY^{-1}$. Каждая компонента этого тождества совпадает с (3'). \square

Отметим, что тождество (3') является обобщением тождества Уорда для квазигруппы с бинарной операцией \bullet [5]:

$$(x \bullet a) \bullet (y \bullet a) = x \bullet y.$$

Это обобщение получено из аксиомы феноменологической симметрии, которая есть результат анализа физических законов.

Заметим, что отображение $f : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$ также задает ФС ранга $(n+1, 2)$, т.е. непрерывную группу преобразований пространства B .

2. Физическая структура ранга (4,2) на проективной прямой над алгеброй гиперкомплексных чисел

1. Рассмотрим вещественную алгебру гиперкомплексных чисел V . Элементами алгебры V являются гиперкомплексные числа вида

$$z = x_0 + x_1 i_1 + \dots + x_s i_s,$$

где x_0, \dots, x_s — действительные числа, i_1, \dots, i_s — мнимые единицы, умножение которых определяется по формулам

$$i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta 0} + p_{\alpha\beta 1} i_1 + \dots + p_{\alpha\beta s} i_s,$$

где $p_{\alpha\beta 0}, \dots, p_{\alpha\beta s}$ — действительные числа, $\alpha, \beta = 1, \dots, s$.

Если $s = 1$, то алгебра гиперкомплексных чисел совпадает с полем действительных чисел R . При $s = 2$ существуют три неизоморфные алгебры гиперкомплексных чисел — это алгебра комплексных чисел ($i^2 = -1$), алгебра двойных чисел ($i^2 = 1$) и, наконец, алгебра дуальных чисел ($i^2 = 0$). При $s = 3$ имеем 11 неизоморфных ассоциативных алгебр гиперкомплексных чисел ранга 3 [6]. Из них две некоммутативные и 9 коммутативных.

Можно показать, что множество делителей нуля алгебры гиперкомплексных чисел V нигде не плотно в V .

2. Далее полагаем $n = 3$, т.е. изучаем ФС ранга $(4, 2)$. Обозначим через $B = \Omega_{VP} \subset VP$ открытое и плотное подмножество точек $x \in VP$ таких, что $\langle x, x', x'' \rangle \in \Omega_{(VP)^3} \subset (\Omega_{VP})^3$. Проективная прямая VP определяется стандартным образом, т.е. как пучок прямых в V^2 . Метрическое отображение $\bar{f} : \Omega_{VP} \times \Omega_{(VP)^3} \rightarrow \Omega_{VP}$ задает действие непрерывной группы преобразований в Ω_{VP} .

Теорема 2. Три пары точек (z_1, w_1) , (z_2, w_2) , (z_3, w_3) подмножества Ω_{VP} проективной прямой VP над алгеброй гиперкомплексных чисел V , причем $A = (z_1, z_2, z_3)$, $C = (w_1, w_2, w_3) \in \Omega_{(VP)^3}$, $w_1 = \bar{f}(z_1, a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = \bar{f}(z_2, a_1, a_2, a_3)$, $w_3 = \bar{f}(z_3, a_1, a_2, a_3)$, однозначно определяют преобразование, переводящее эти точки друг в друга.

Действительно, так как $A, C, Z \in \Omega_{(VP)^3}$, причем $C = AZ$, то элемент Z находится однозначно.

Эта теорема формулируется и для отображения \tilde{f} :

Теорема 2'. Три пары точек (z_1, w_1) , (z_2, w_2) , (z_3, w_3) подмножества Ω_{VP} , причем $A = (z_1, z_2, z_3)$, $C = (w_1, w_2, w_3) \in \Omega_{(VP)^3}$, $w_1 = \tilde{f}(z_1, a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = \tilde{f}(z_2, a_1, a_2, a_3)$, $w_3 = \tilde{f}(z_3, a_1, a_2, a_3)$, однозначно определяют преобразование.

Сформулируем теперь основную теорему.

Теорема 3. ФС ранга $(4,2)$ с метрической функцией $\tilde{f} : \Omega_{VP} \times \Omega_{(VP)^3} \rightarrow \Omega_{VP}$ на подмножестве Ω_{VP} проективной прямой VP над ассоциативной алгеброй гиперкомплексных чисел V существует и с точностью до системы проективных координат единственна. В явном виде для метрической функции имеем

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4)$$

где $z = \frac{z_1}{z_2}$ — неоднородная проективная координата, матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ обратима.

Заметим, что в проективной геометрии проективной прямой VP метрическое отображение (4) интерпретируется как проективное преобразование. Если $V = R$, то (4) — проективное преобразование обычной, т.е. вещественной, проективной прямой [1].

Доказательство теоремы 3. Проективные однородные координаты в VP обозначим (λ_1, λ_2) . Левая часть тождества (3) в проективных координатах имеет вид $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$, а правая часть — (λ'_1, λ'_2) . Поэтому это тождество имеет такой вид:

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda'_1, \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda'_2.$$

В проективной геометрии преобразование \tilde{f} называется проективным. Две различные проективные системы однородных координат связаны линейными функциями, поэтому

$$\lambda'_1 = c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2, \quad \lambda'_2 = c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2, \quad (**)$$

причем матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ обратима. Тогда проективное преобразование \tilde{f} задается уравнениями (**), или (4). Этим самым существование доказано. Единственность следует из построения проективных координат.

(4) можно записать еще в таком виде:

$$z' = \frac{w_2 - z}{w_2 - w_1} \div \frac{w_3 - z}{w_3 - w_1}. \quad (5)$$

Эта формула в проективной геометрии интерпретируется как сложное отношение четырех точек [1]. По (5) легко записать явный вид тождества (3):

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{f}(w_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \tilde{f}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\tilde{f}(w_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \tilde{f}(w_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \div \frac{\tilde{f}(w_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \tilde{f}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\tilde{f}(w_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \tilde{f}(w_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \\ & = \frac{\tilde{f}(w_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - \tilde{f}(z, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\tilde{f}(w_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - \tilde{f}(w_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)} \div \frac{\tilde{f}(w_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - \tilde{f}(z, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\tilde{f}(w_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - \tilde{f}(w_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}. \end{aligned} \quad (3'')$$

3. Можно показать, что отображение

$$z' = \tilde{f}(z, w_1, w_2, e_3), \quad e_3 = \tilde{f}(e_3, w_1, w_2, e_3), \quad e_3 \in \Omega_{VP}, \quad (6)$$

на $\Omega_{VP}/\{e_3\}$ задает ФС ранга $(3,2)$ (несложная проверка аксиом A1, A2, A3), т.е. непрерывную группу преобразований. Явный вид такого метрического отображения следующий:

$$z' = \frac{az + ce_3^2 + de_3 - ae_3}{cz + d}, \quad w_1 = \frac{ae_1 + b}{ce_1 + d}, \quad w_2 = \frac{ae_2 + b}{ce_2 + d}. \quad (7)$$

Пусть $e_3 = \infty$. Тогда (7) принимает вид

$$z' = \frac{(w_1 - w_2)z + w_2e_1 - w_1e_2}{e_1 - e_2}. \quad (7')$$

Заметим, что группа (6) является стационарной подгруппой с неподвижной точкой e_3 транзитивной группы преобразований (4). В работе [7] утверждается, что любые две стационарные подгруппы транзитивной группы преобразований изоморфны.

Две физические структуры ранга $(n+1, 2)$ с метрическими функциями $f, f' : B \times N \rightarrow B$ называются *эквивалентными*, если группы Ω_B и Ω'_B изоморфны.

Теорема 4. *Две ФС ранга $(3, 2)$ с метрическими функциями (7) и (7') эквивалентны.*

4. Рассмотрим в группе (6) преобразования, оставляющие точку e_2 неподвижной. Эти преобразования задают на $\Omega_{VP}/\{e_2, e_3\}$ метрическое отображение

$$z' = \tilde{f}(z, w_1, e_2, e_3), \quad e_3 = \tilde{f}(e_3, w_1, e_2, e_3), \quad e_2 = \tilde{f}(e_2, w_1, e_2, e_3), \quad w_1 = \tilde{f}(e_1, w_1, e_2, e_3) \quad (8)$$

ФС ранга $(2, 2)$. В явном виде для (8) имеем:

$$z' = \frac{az - ce_2e_3}{cz + a - c(e_2 + e_3)}, \quad a(w_1 - e_1) = c[w_1(e_2 + e_3 - e_1) - e_2e_3] \quad (9)$$

или

$$z' = \frac{zw_1(e_2 + e_3 - e_1) - ze_2e_3 - w_1e_2e_3 + e_1e_2e_3}{zw_1 - ze_1 - w_1e_1 - e_2e_3 + e_1(e_2 + e_3)}. \quad (9')$$

Заметим, что формула (9) в $\Omega_{VP}/\{e_2, e_3\}$ задает квазигрупповую бинарную операцию. Эта квазигруппа является группой.

Теорема 5. *Группа $\Omega_{VP}/\{e_2, e_3\}$ с бинарной операцией (9') является изоморфной группе $\Omega_{VP}/\{0, \infty\}$ с бинарной операцией*

$$z' = zw. \quad (10)$$

Группа $\Omega_{VP}/\{0, \infty\}$ изоморфна группе обратимых элементов алгебры гиперкомплексных чисел.

Доказательство. Доказательство первой части этой теоремы следует из теоремы 4. Очевидно, группа $\Omega_{VP}/\{0, \infty\}$ состоит из обратимых элементов алгебры гиперкомплексных чисел V . Так как единственной открытой и плотной подгруппой в V является только мультипликативная, то группа $\Omega_{VP}/\{0, \infty\}$ совпадает с мультипликативной подгруппой. \square

5. Теорема 6. *На подмножестве Ω_{VP} проективной прямой VP задается ФС ранга $(4, 2)$ тогда и только тогда, когда алгебра гиперкомплексных чисел V ассоциативна.*

Доказательство. Действительно, ФС ранга $(2, 2)$, построенная редукцией ФС ранга $(4, 2)$ над проективной прямой VP , изотопна группе с бинарной операцией (10). Если умножение в V неассоциативно, то построенная бинарная операция также не будет ассоциативной, т.е. не задает группу. Противоречие. Обратное очевидно. \square

6. Теорема 7. *ФС ранга $(n+1, 2)$, $n \geq 4$, с метрической функцией $f : \Omega_{VP} \times N \rightarrow \Omega_{VP}$ не существует.*

Доказательство. Предположим, что ФС ранга $(n+1, 2)$, $n \geq 4$, существует. В тождестве (3') положим $a_k = e_k$, $k = 4, \dots, n$, а также зафиксируем произвольные точки w_k :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{f}(z, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(w_1, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(w_2, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(w_3, a_1, \dots, a_n), w_4, \dots, w_n) = \\ = \tilde{f}(z, w_1, w_2, \dots, w_n). \end{aligned}$$

Тогда метрическая функция (1) при фиксированных $w_k, k = 4, \dots, n$, удовлетворяет аксиомам А1, А2, А3 при $n = 3$, т.е. задает ФС ранга (4,2). Тогда для метрической функции, согласно теореме 3, получаем

$$\tilde{f} = \frac{a(w_4, \dots, w_n)z + b(w_4, \dots, w_n)}{c(w_4, \dots, w_n)z + d(w_4, \dots, w_n)}.$$

Это общий вид метрической функции ФС ранга $(n + 1, 2)$, $n \geq 4$ на подмножестве Ω_{VP} проективной прямой VP . Видно, что данная функция вырождена по координатам второго множества, т.е. не задает ФС ранга $(n + 1, 2)$, $n \geq 4$. \square

3. Физическая структура ранга $(s + 3, 2)$ на проективном пространстве VP^s , $s \geq 2$, над алгеброй гиперкомплексных чисел

1. В данном параграфе полагаем $n = s + 2$, т.е. изучаем ФС ранга (5,2), (6,2) и т.д. Проективное пространство VP^s определяется стандартным образом, т.е. пучок прямых в V^{s+1} . Обозначим через $B = \Omega_{VP^s} \subset VP^s$ открытое и плотное подмножество точек $x \in VP^s$ таких, что $\langle x, x^1, \dots, x^s \rangle \in \Omega_{(VP^s)^{s+2}} \subset (\Omega_{VP^s})^{s+2}$. Метрическое отображение $\tilde{f} : \Omega_{VP^s} \times \Omega_{(VP^s)^{s+2}} \rightarrow \Omega_{VP^s}$ задает действие непрерывной группы преобразований в Ω_{VP^s} .

Теорема 8. n пар точек $(z_1, w_1), \dots, (z_{s+2}, w_{s+2})$ подмножества Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s над алгеброй гиперкомплексных чисел V , причем $A = (z_1, \dots, z_{s+2})$, $C = (w_1, \dots, w_{s+2}) \in \Omega_{(VP^s)^{s+2}}$, $w_1 = \tilde{f}(z_1, a_1, \dots, a_{s+2})$, \dots , $w_{s+2} = \tilde{f}(z_{s+2}, a_1, \dots, a_{s+2})$, однозначно определяют преобразование, переводящее эти точки друг в друга.

Теорема 9. ФС ранга $(s+3, 2)$, $s \geq 2$, с метрической функцией $\tilde{f} : \Omega_{VP^s} \times \Omega_{(VP^s)^{s+2}} \rightarrow \Omega_{VP^s}$ на подмножестве Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s над ассоциативной алгеброй гиперкомплексных чисел V существует и с точностью до системы проективных координат единственна:

$$z'^1 = \frac{a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \dots + a_s^1 z^s + a^1}{a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_s z^s + a}, \dots, z'^s = \frac{a_1^s z^1 + a_2^s z^2 + \dots + a_s^s z^s + a^s}{a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_s z^s + a} \quad (11)$$

где z^1, \dots, z^s — неоднородные проективные координаты точки z , матрица коэффициентов системы обратима.

Доказывается как теорема 3.

2. Рассмотрим в (11) подмножество, оставляющих на месте точки $e_{k+1}, \dots, e_n \in \Omega_{VP^s}$ преобразований. Обозначим через $\Omega_{VP^s}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ подпространство в Ω_{VP^s} подвижных точек относительно данных преобразований. Тогда имеем отображение

$$z' = \tilde{f}(z, w_1, \dots, w_k, e_{k+1}, \dots, e_n), \quad e_l = \tilde{f}(e_l, w_1, \dots, w_k, e_{k+1}, \dots, e_n), \quad l = k + 1, \dots, n, \quad (12)$$

которое в $\Omega_{VP^s}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ задает ФС ранга $(k + 1, 2)$, т.е. непрерывную группу преобразований. Если фиксируется другой набор точек e_{k+1}^*, \dots, e_n^* , то получаем новое метрическое отображение, также задающее ФС ранга $(k + 1, 2)$ на $\Omega_{VP^s}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$:

$$z' = \tilde{f}(z, w_1, \dots, w_k, e_{k+1}^*, \dots, e_n^*), \quad e_l^* = \tilde{f}(e_l^*, w_1, \dots, w_k, e_{k+1}^*, \dots, e_n^*), \quad l = k + 1, \dots, n. \quad (1')$$

Теорема 10. Две ФС ранга $(k + 1, 2)$ с метрическими функциями (12) и (12') эквивалентны.

Доказывается так же, как и теорема 4.

3. Рассмотрим проективную плоскость над алгеброй гиперкомплексных чисел. Из теоремы 9 следует существование и единственность ФС ранга (5,2):

$$z'^1 = \frac{a_1 z^1 + a_2 z^2 + a}{c_1 z^1 + c_2 z^2 + c}, \quad z'^2 = \frac{b_1 z^1 + b_2 z^2 + b}{c_1 z^1 + c_2 z^2 + c}.$$

По теореме 10 фиксируя точку, получаем ФС ранга (4,2), эквивалентную структуре:

$$z'^1 = \frac{a_1 z^1 + a}{c_1 z^1 + c}, \quad z'^2 = \frac{b_1 z^1 + b_2 z^2 + b}{c_1 z^1 + c}.$$

Если зафиксировать еще одну точку, то получим ФС ранга (3,2):

$$z'^1 = a_1 z^1 + a, \quad z'^2 = b_2 z^2 + b.$$

И, наконец, фиксирование третьей точки дает ФС ранга (2,2)

$$z'^1 = a_1 z^1, \quad z'^2 = b_2 z^2.$$

4. Рассмотрим частный случай вещественной проективной плоскости RP^2 . Тогда предыдущие формулы примут соответственно следующий вид — для (5,2):

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a}{c_1 x + c_2 y + c}, \quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{c_1 x + c_2 y + c},$$

для (4,2):

$$x' = \frac{a_1 x + a}{c_1 x + c}, \quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{c_1 x + c},$$

для (3,2):

$$x' = ax + b, \quad y' = cy + d,$$

и, наконец, для (2,2):

$$x' = ax, \quad y' = cy.$$

5. Рассмотрим еще действительное проективное пространство. Из теоремы 9 следует существование и единственность триметрической ФС ранга (6,2):

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d}, \quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d}, \quad z' = \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z + c}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d}.$$

Фиксируя точку, получаем ФС ранга (5,2), эквивалентную структуре с метрическим отображением:

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a}{d_1 x + d_2 y + d}, \quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{d_1 x + d_2 y + d}, \quad z' = \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z + c}{d_1 x + d_2 y + d}.$$

Фиксируя вторую точку, получаем

$$x' = \frac{a_1 x + a}{d_1 x + d}, \quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{d_1 x + d}, \quad z' = \frac{c_1 x + c_3 z + c}{d_1 x + d}.$$

Фиксируем теперь третью точку:

$$x' = a_1 x + a, \quad y' = b_2 y + b, \quad z' = c_3 z + c.$$

И, наконец, фиксируя четвертую точку, приходим к структуре ранга (2,2):

$$x' = a_1x, \quad y' = b_2y, \quad z' = c_3z.$$

6. Теорема 11. *На подмножестве Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s существует ФС ранга $(s+3, 2)$ тогда и только тогда, когда алгебра гиперкомплексных чисел V ассоциативна.*

Доказательство. Рассмотрим ФС ранга $(s+3, 2)$ на подмножестве Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s с метрическим отображением (13). Фиксируя $s+1$ точек, приходим к ФС ранга (2,2), эквивалентной структуре с отображением

$$z'^1 = a_1z^1, \quad \dots, \quad z'^s = a_s z^s.$$

Данное метрическое отображение является групповой операцией s -кратного прямого произведения мультипликативной группы алгебры гиперкомплексных чисел V . Значит, алгебра гиперкомплексных чисел V ассоциативна. Обратное очевидно. \square

7. Теорема 12. *ФС ранга $(n+1, 2)$, $n \geq s+3$ с метрической функцией $f : \Omega_{VP^s} \times N \rightarrow \Omega_{VP^s}$ не существует.*

Доказательство. Предположим, что ФС ранга $(n+1, 2)$, $n \geq s+3$, существует. В (3') положим $a_k = e_k$, $k = s+3, \dots, n$, а также зафиксируем произвольные точки w_k :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{f}(z, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(w_1, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(w_2, a_1, \dots, a_n), \dots, \tilde{f}(w_{s+2}, a_1, \dots, a_n), w_{s+3}, \dots, w_n) = \\ = \tilde{f}(z, w_1, w_2, \dots, w_n). \end{aligned}$$

Тогда метрическая функция (1) при фиксированных w_k , $k = s+3, \dots, n$, удовлетворяет аксиомам А1, А2, А3 для $n = s+2$, т.е. задает ФС ранга $(s+3, 2)$. Поэтому для метрического отображения, согласно теореме 9, получаем

$$\begin{aligned} z'^1 &= \frac{a_1^1(w_{s+3}, \dots, w_n)z^1 + a_2^1(w_{s+3}, \dots, w_n)z^2 + \dots + a_s^1(w_{s+3}, \dots, w_n)z^s + a^1(w_{s+3}, \dots, w_n)}{a_1(w_{s+3}, \dots, w_n)z^1 + a_2(w_{s+3}, \dots, w_n)z^2 + \dots + a_s(w_{s+3}, \dots, w_n)z^s + a(w_{s+3}, \dots, w_n)}, \\ z'^s &= \frac{a_1^s(w_{s+3}, \dots, w_n)z^1 + a_2^s(w_{s+3}, \dots, w_n)z^2 + \dots + a_s^s(w_{s+3}, \dots, w_n)z^s + a^s(w_{s+3}, \dots, w_n)}{a_1(w_{s+3}, \dots, w_n)z^1 + a_2(w_{s+3}, \dots, w_n)z^2 + \dots + a_s(w_{s+3}, \dots, w_n)z^s + a(w_{s+3}, \dots, w_n)}. \end{aligned}$$

Это общий вид метрического отображения ФС ранга $(n+1, 2)$, $n \geq s+3$, на подмножестве Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s . Видно, что данное отображение вырождено по координатам второго множества, т.е. не задает ФС ранга $(n+1, 2)$, $n \geq s+3$. \square

Список литературы

- [1] Н.В.Ефимов, Высшая геометрия, М., ФМ, 1961.
- [2] А.А.Симонов, Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур, Приложение к книге Кулакова Ю.И. "Теория физических структур", М., Компания Юниверс Контракт, 2004.
- [3] В.Д.Белюсов, Основы теории квазигрупп и луп, М., Наука, 1967.
- [4] Л.С.Понтрягин, Непрерывные группы, М., Наука, 1973.
- [5] S.K.Chatterjea, On Ward quasigroups, *Pure Math. Manuscript*, (1987), №6, 31–34.

- [6] Г.Г.Михайличенко, Р.М.Мурадов, Физические структуры как геометрии двух множеств, Горно-Алтайск, Изд-во Горно-Алт. гос. ун-та, 2008.
- [7] Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, Основы теории групп Ли, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., ВИНТИ, **20**(1988), 5–101.
- [8] Г.Г.Михайличенко, Феноменологическая и групповая симметрия в геометрии двух множеств (теории физических структур), Докл. АН СССР, **24**(1985), №1, 39–41.
- [9] В.В.Горбачевич, А.Л.Онищик, Группы Ли преобразований, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., ВИНТИ, **20**(1988), 108–248.

Projective Geometry and Phenomenological Symmetry

Vladimir A. Kyrov

In this paper it is investigated the physical structure of the maximal range in a projective space $(PV)^s$ over the algebra of hypercomplex numbers V . It is proved that this structure is formed by the group of projective transforms of the space $(PV)^s$.

Keywords: projective space, group of projective transforms.