Симплектические многообразия

В.А. Кыров

Содержание

§1. Симплектическая геометрия

В данном параграфе определяется симплектическая геометрия, находится группа ее движений, а затем решается обратная задача о восстановлении метрической функции по группе движений. В конце параграфа приводятся некоторые свойства этой геометрии.

Под *симплектической геометрией* понимается геометрия четномерного пространства R^{2n} с метрической функцией f, которая в специальных координатах $(x^1, x^2, ..., x^{2n})$ принимает следующий вид:

$$f(ij) = x_i^1 x_j^{n+1} - x_i^{n+1} x_j^1 + ... + x_i^n x_j^{2n} - x_i^{2n} x_j^n, \tag{1}$$

где, например, $(x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{2n})$ – координаты точки i пространства R^{2n} [1, 2]. Симплектическое пространство будем обозначать через Sp^{2n}. Для плоскости Sp^2 метрическая функция запишется в виде:

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i, \tag{1'}$$

где $x = x^1$, $y = x^2$. Эта функция была найдена Г.Г. Михайличенко при классификации двумерных геометрий (см. [3], а также §3 гл.I настоящего пособия). Для краткой записи метрической функции (1) воспользуемся матричными обозначениями:

$$x = (x^\alpha) = \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ x^{2n} \end{pmatrix}, \quad G = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta = 1, ..., 2n$; G – блочная матрица порядка $2n$, а E и 0 – единичная и нулевая матрицы порядка n. Метрическая функция (1) запишется тогда в таком виде:

$$f(ij) = g_{\alpha\beta} x_i^\alpha x_j^\beta = x_i^T G x_j. \tag{1''}$$

Заметим, что для симплектической геометрии справедлива теорема об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий [3], согласно которой по метрической функции (1) можно найти n(2n+1)-параметрическую группу ее движений, а по ней восстановить саму метрическую функцию. Для нахождения группы движений необходимо решить функциональное уравнение

$$f(\lambda_i^1, ..., \lambda_i^{2n}, \lambda_j^1, ..., \lambda_j^{2n}) = f(x_i^1, ..., x_i^{2n}, x_j^1, ..., x_j^{2n}), \tag{2}$$

в котором неизвестными являются гладкие функции $\lambda^1, ..., \lambda^{2n}$, задающие преобразования пространства R^{2n}:

$$\begin{aligned} x'^1 &= \lambda^1(x^1, ..., x^{2n}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x'^{2n} &= \lambda^{2n}(x^1, ..., x^{2n}), \end{aligned} \tag{3}$$

при условии, что якобиан $(\partial\lambda^1, ..., \partial\lambda^{2n})/(\partial x^1, ..., \partial x^{2n})$ отличен от нуля, поскольку движения обратимы.

Лемма 1. *Функции $\lambda^1, ..., \lambda^{2n}$ системы* (3)*, удовлетворяющие функциональному уравнению* (2) *для симплектического пространства Sp^{2n}, являются однородными, то есть имеют вид:*

$$\begin{aligned} x'^1 &= a_1^1 x^1 + ... + a_{2n}^1 x^{2n}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x'^{2n} &= a_1^{2n} x^1 + ... + a_{2n}^{2n} x^{2n}. \end{aligned} \tag{3'}$$

или

$$x' = Ax,$$

где A — матрица системы (3′).

Запишем уравнение (2) для метрической функции (1):

$$\lambda_i^1 \lambda_j^{n+1} - \lambda_i^{n+1} \lambda_j^1 + ... + \lambda_i^n \lambda_j^{2n} - \lambda_i^{2n} \lambda_j^n = x_i^1 x_j^{n+1} - x_i^{n+1} x_j^1 + ... + x_i^n x_j^{2n} - x_i^{2n} x_j^n.$$

Дифференцируя его по координатам $(x_j^1, ..., x_j^{2n})$ и разрешая полученную систему относительно функций $\lambda_i^1, ..., \lambda_i^{2n}$, после фиксирования точки j получаем выражения (3′). Лемма 1 доказана.

Перейдем теперь к определению группы движений пространства Sp^{2n}. Для этого воспользуемся выше доказанной леммой 1 и формулой (1″). Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$x_i'^T G x_j' = x_i^T G x_j$$

и после подстановки в него выражения (3′), имеем:

$$x_i^T A^T G A x_j = x_i^T G x_j. \tag{4}$$

Равенство (4) выполняется тождественно по координатам точек i и j. Дифференцируя по ним, получаем:

$$A^T G A = G. \tag{5}$$

Последнее равенство говорит о том, что матрица A является симплектической [4], то есть принадлежит симплектической группе $Sp(2n)$. Итак, нами доказана

Теорема 2. *Преобразования* (3′) *симплектического пространства* Sp^{2n} *тогда и только тогда являются его движениями, когда матрица преобразования* A *является симплектической* ($A \in Sp(2n)$)*, то есть удовлетворяет условию* (5).

Для выяснения структуры матрицы A представим ее в блочном виде:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}, \tag{6}$$

причем блоками являются матрицы порядка n. Подставляя матрицу (6) в условие (5), приходим к равенствам: $B^T D - D^T B = 0$, $C^T F - F^T C = 0$, $B^T F - D^T C = E$, $F^T B - C^T D = E$.

Группа движений симплектической плоскости с метрической функцией (1′) записывается, очевидно, в следующем виде:

$$x' = bx + cy, \;\; y' = dx + fy,$$

причем $bf - cd = 1$.

Предположим теперь, что в функциональном уравнении (2) неизвестной является метрическая функция f, а группа движений (3′) со связью параметров (5) известна. Тогда, решая это уравнение, можно найти метрическую функцию как двухточечный инвариант. Задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$X_\omega(i) f(ij) + X_\omega(j) f(ij) = 0, \tag{7}$$

где X_ω – базисные инфинитезимальные операторы алгебры Ли группы движений, причем $\omega = 1, \ldots, n(2n+1)$.

Группа $Sp(2n)$ является $n(2n+1)$-параметрической группой Ли, причем ее алгебра Ли состоит из матриц a порядка $2n$, удовлетворяющих, согласно [4], условию:

$$a^T G + G a = 0. \tag{8}$$

Из этого условия легко определяется структура матрицы a:

$$a = \begin{pmatrix} b & c \\ d & f \end{pmatrix},$$

причем $c^T = c, \quad d^T = d, \quad b^T = -f, \quad f^T = -b$ или по компонентам:

$$a = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 & c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^n & \dots & b_n^n & c_n^1 & \dots & c_n^n \\ d_1^1 & \dots & d_n^1 & -b_1^1 & \dots & -b_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n^1 & \dots & d_n^n & -b_n^1 & \dots & -b_n^n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Введем матрицу M_β^α порядка n, у которой на пересечении строки α и столбца β стоит 1, а на остальных местах стоят нули. Обозначим

$$N_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} M_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -M_\alpha^\beta \end{pmatrix}, \quad U_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\alpha\beta}^0 (M_\beta^\alpha + M_\alpha^\beta) + \delta_{\alpha\beta}(M_\beta^\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta_{\alpha\beta}^0 (M_\beta^\alpha + M_\alpha^\beta) + \delta_{\alpha\beta}(M_\beta^\alpha) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\delta_{\alpha\beta} = \{ {}^{1,\alpha=\beta}_{0,\alpha\neq\beta}$ — символы Кронекера, $\delta_{\alpha\beta}^0 = \{ {}^{0,\alpha=\beta}_{1,\alpha\neq\beta}$. Тогда для произвольной матрицы из алгебры Ли $sp(2n)$

$$a = \sum b_\beta^\alpha N_\beta^\alpha + \sum c_\beta^\alpha U_\beta^\alpha + \sum d_\beta^\alpha V_\beta^\alpha. \tag{9'}$$

Справедлива следующая

Лемма 3. *Базисные операторы алгебры Ли $n(2n+1)$-мерной группы движений симплектического пространства Sp^{2n} задаются следующими выражениями:*

$$\begin{gathered} X^{p,q} = x^p \partial_{x^q} - x^{n+p} \partial_{x^{n+q}}, \\ X^p = x^{n+p} \partial_{x^p}, \quad X^{\alpha,\beta} = x^{n+\alpha+1} \partial_{x^\beta} + x^{n+\beta} \partial_{x^{\alpha+1}}, \\ X^q = x^q \partial_{x^{n+q}}, \quad X^{\mu,\nu} = x^{\mu+1} \partial_{x^{n+\nu}} + x^\nu \partial_{x^{n+\mu+1}}, \end{gathered} \tag{10}$$

причем $\alpha \geq \beta = 1, ..., n-1$, $\mu \geq \nu = 1, ..., n-1$, $p, q = 1, ..., n$.

Для доказательства необходимо продифференцировать уравнения группы движений (3′) по независимым параметрам в тождественной точке. В результате получаем компоненты операторов алгебры Ли группы движений: ax, где a — матрица вида (9′). Придавая постоянным b_β^α, c_β^α и d_β^α значения 0 и 1, приходим к базисным операторам (10). Лемма 3 доказана.

Запишем систему уравнений (7) для операторов (10):

$$x_i^p \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^q} - x_i^{n+p} \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{n+q}} + x_j^p \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^q} - x_j^{n+p} \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{n+q}} = 0,$$

$$x_i^{n+p}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^p}+x_j^{n+p}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^p}=0,$$

$$x_i^{q}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{n+q}}+x_j^{q}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{n+q}}=0, \tag{11}$$

$$x_i^{n+\alpha+1}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{\beta}}+x_i^{n+\beta}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{\alpha+1}}+x_j^{n+\alpha+1}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{\beta}}+x_j^{n+\beta}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{\alpha+1}}=0,$$

$$x_i^{\mu+1}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{n+\nu}}+x_i^{\nu}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{n+\mu+1}}+x_j^{\mu+1}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{n+\nu}}+x_j^{\nu}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{n+\mu+1}}=0.$$

Интегралом системы уравнений (11) является метрическая функция

$$f(ij)=\psi(x_i^1x_j^{n+1}-x_i^{n+1}x_j^1+...+x_i^nx_j^{2n}-x_i^{2n}x_j^n), \tag{12}$$

где ψ — произвольная функция одной переменной. Итак, доказана

Теорема 4. *Двухточечным инвариантом группы движений* $(3')$ *симплектического пространства* Sp^{2n} *с точностью до масштабного преобразования* $\psi : R \to R$ *является метрическая функция* (1).

Симплектическое пространство Sp^{2n} феноменологически симметрично, что выражается в функциональной связи всех взаимных расстояний для произвольных $2n+2$ точек кортежа $< i_1...i_{2n+2} >$:

$$\Phi(f(i_1i_2),...,f(i_{2n+1}i_{2n+2}))=0.$$

В явном виде эта функциональная связь задается следующим уравнением:

$$\begin{vmatrix} 0 & f(i_1i_2) & f(i_1i_3) & ... & f(i_1i_{2n+2}) \\ f(i_2i_1) & 0 & f(i_2i_3) & ... & f(i_2i_{2n+2}) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ f(i_{2n+2}i_1) & f(i_{2n+2}i_2) & f(i_{2n+2}i_3) & ... & 0 \end{vmatrix}=0.$$

В конце параграфа приведем некоторые геометрические свойства симплектического пространства. Под Sp^{2n} с данного момента будем понимать линейное пространство с метрической функцией (1), причем i — это теперь вектор данного линейного пространства. Это пространство будем также называть симплектическим. Метрическую функцию $f(ij)$ будем называть еще *кососкалярным произведением* векторов i и j. Очевидно следующее свойство кососкалярного произведения: $f(ij)=-f(ji)$. Геометрически кососкалярное произведение векторов i и j – это сумма ориентированных площадей параллелограмма (i,j) на n координатных плоскостях $(x^{\alpha},x^{n+\alpha})$, где $\alpha=1,...,n$. В двумерном случае кососкалярное произведение двух векторов – это ориентированная площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Два вектора i и j назовем *косоортогональными*, если их кососкалярное произведение равно нулю, то есть $f(ij)=0$. Множество всех векторов, косоортогональных данному вектору, называется *косоортогональным дополнением* к этому вектору.

k-мерная плоскость симплектического пространства называется *нулевой* (нулевые плоскости называются также *изотропными*, а при k = n — лагранжевыми), если она сама себе косоортогональна, то есть кососкалярное произведение любых двух векторов плоскости равно нулю (можно сказать, что симплектическая структура не индуцируется на эту плоскость).

Примеры. 1). Любая прямая (1-плоскость) является нулевой. 2). Координатные 2-плоскости (x^α, x^β), где α, β одновременно либо меньше n, либо больше n, являются нулевыми. 3). Координатная n- плоскость $(x^1, ..., x^n)$ является лагранжевой.

Косоортогональное дополнение к m-плоскости имеет дополнительную размерность 2n-m, причем эти два пространства пересекаются по k-плоскости, которая является максимальной нулевой, содержащейся в выше описанных.

Примеры. 4). Для 1-плоскости (x^1) косоортогональное дополнение – это 2n-1-плоскость $(x^1, ..., x^n, x^{n+2}, ..., x^{2n})$. Заметим, что эти две плоскости пересекаются по прямой (x^1). 5). Для 2-плоскости (x^1, x^{n+1}) косоортогональное дополнение — это 2n-2- плоскость $(x^2, ..., x^n, x^{n+2}, ..., x^{2n})$, причем эти две плоскости пересекаются по нулевому пространству. 6). Для n-плоскости $(x^1, ..., x^n)$ косоортогональное дополнение – это та же n-плоскость $(x^1, ..., x^n)$.

В симплектическом линейном пространстве можно выделить специальный базис. Под *симплектическим базисом* понимаются 2n векторов $(e_{x^\alpha}, e_{x^{n+\alpha}})$, кососкалярные произведения которых имеют вид:

$$f(e_{x^\alpha}, e_{x^\beta}) = 0, \quad f(e_{x^{n+\alpha}}, e_{x^{n+\beta}}) = 0, \quad f(e_{x^\alpha}, e_{x^{n+\beta}}) = 0, \quad f(e_{x^\alpha}, e_{x^{n+\alpha}}) = 1,$$

где $\alpha, \beta = 1, ..., n$, причем в третьем случае $\alpha \neq \beta$.

Заметим, что в симплектическом базисе кососкалярное произведение имеет простейший вид. Используя этот базис, можно доказать, что все симплектические пространства одной размерности изоморфны.

§2. Почти гамильтоновы многообразия

В данном параграфе строятся почти гамильтоновы четномерные многообразия, которые характеризуются тем, что касательное пространство в каждой их точке является симплектическим. Находятся метрические функции этих многообразий. Начиная с этого параграфа под i и j будут пониматься индексы суммирования.

Прежде всего определим многообразие. *Топологическое многообразие* – это хаусдорфово пространство со счетной базой, локально гомеоморфное R^n. Число n называется *размерностью* многообразия. *Картой* или *системой координат* многообразия называется гомеоморфизм x некоторого открытого подмножества многообразия M на R^n. Множество карт $\mathfrak{U}$ называется *дифференцируемым атласом*, если: 1) каждая точка многообразия M принадлежит области определения некоторой карты $x \in \mathfrak{U}$; 2) для любых двух карт $x, y \in \mathfrak{U}$ отображение $x \circ y^{-1}$ дифференцируемо. $\mathfrak{U}$ называется *дифференцируемой структурой* на M, если каждая

согласованная с $\mathfrak{U}$ карта принадлежит $\mathfrak{U}$. *Дифференцируемое многообразие* – объект, состоящий из топологического многообразия и дифференцируемой структуры. Многообразиями, например, являются евклидово пространство, сфера, тор, проективное пространство, двумерный круговой цилиндр.

Пусть M – гладкое $2n$-мерное многообразие, $T(M)$ – касательное расслоение со стандартным слоем R^{2n}, то есть множество всех касательных векторов во всех точках многообразия. Это пространство является гладким многообразием, причем класс гладкости на единицу меньше класса гладкости многообразия M. Атлас этого многообразия составляют прямые произведения $U \times R^{2n}$, причем $U \in \mathfrak{U}$. Слоем этого расслоения является $T_x(M)$ – касательное пространство, то есть множество всех касательных векторов многообразия M в точке x. Это пространство является линейным размерности $2n$, причем пространства $T_x(M)$ и R^{2n} изоморфны (координаты касательного вектора в фиксированном базисе отождествляются с координатами вектора из R^{2n}). Можно сказать, что касательное расслоение $T(M)$ состоит из касательных пространств $T_x(M)$ во всех точках многообразия M. Поскольку $\dim M = 2n$, то $\dim T(M) = 4n$.

Рассмотрив также $L(M)$ – расслоение линейных реперов u со структурной группой $GL(2n, R)$, то есть множество всех линейных реперов во всех точках многообразия. Это пространство естественным образом является гладким многообразием. Атлас многообразия $L(M)$ составляют прямые произведения $U \times GL(2n, R)$, причем $U \in \mathfrak{U}$. $L_x(M)$ – множество линейных реперов в точке x многообразия M, то есть множество базисов в касательном пространстве $T_x(M)$, которые отличаются друг от друга на невырожденные матрицы порядка $2n$. Поэтому $\dim L_x(M) = 4n$, а $\dim L(M) = 6n$. Линейный репер обозначается так: $u = (X_1, ..., X_{2n})$ Каждый линейный репер u из $L(M)$ можно считать изоморфизмом R^{2n} на $T_x(M)$. Пусть $e_1, ..., e_{2n}$ фиксированный базис в R^{2n}. Тогда $ue_i = X_i$, где $i = 1, ..., 2n$, следовательно $u\xi = \xi^i X_i \in T_x(M)$, причем $\xi = \xi^i e_i$ – произвольный касательный вектор.

Рассмотрим отображение

$$\omega : L_x(M) \times L_x(M) \times T_x(M) \to V^2, \tag{1}$$

которое в явном виде задается формулой:

$$\omega(u, v, X) = a_i^j X^i e_j, \tag{2}$$

причем

$$a = X^{-1},$$

где X — матрица отличия репера u от v, а $X^1, ..., X^{2n}$ — координаты вектора $X \in T_x(M)$ в базисе v, $i, j = 1, ..., 2n$. Предполагается, что соответствие (1) является гладким в координатной окрестности $U \subset M$, причем элементы матрицы a являются гладкими функциями в U, которые будем называть *структурными функциями.*

Лемма 1. *При переходе от системы координат в U к системе координат в U' структурные функции a в точке из непустого пересечения $U \cap U'$ преоб-*

разуются по закону

$$a_i^{'j} = a_k^j \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}, \quad i, j, k = 1, ..., 2n,$$

где a и a' – структурные функции в координатных окрестностях U и U' соответственно.

Из этой леммы следует, что функции (2) инвариантны относительно произвольной замены координат.

Заметим, что в точке $x \in U$, в силу произвольности репера $u \in L_x(M)$, отображение (1) равносильно семейству изоморфизмов $\{\rho_x\}$:

$$\rho_x : T_x(M) \to R^{2n}. \tag{2'}$$

Очевидно, соответствие $x \to \rho_x$ является гладким.

Пусть G – замкнутая подгруппа Ли линейной группы $GL(2n, R)$. Редукция группы $GL(2n, R)$ к подгруппе G приводит к подрасслоению $Q(M, G)$ или просто Q расслоению линейных реперов $L(M)$. Под редукцией здесь понимается вложение расслоения Q в расслоение $L(M)$, которое индуцирует тождественное преобразование многообразия M и групповое вложение G в $GL(2n, R)$ (мономорфизм). Рассмотрим сужение отображения (1) на Q_x относительно первого аргумента

$$\omega : Q_x(M) \times L_x(M) \times T_x(M) \to V^n. \tag{3}$$

Функция (3), также как и функция (1) является гладкой. Тогда для фиксированного репера $v \in L_x(M)$

$$\omega_v(u, X) = a_i^j X^i e_j, \tag{4}$$

где u – произвольный репер из Q_x. Заметим, что функция (4) инвариантна относительно произвольной замены координат. Поскольку u – произвольный репер из Q_x, а v – некоторый фиксированный репер из $L_x(M)$, то для матрицы a справедливо разложение:

$$a = bc \tag{5}$$

или в координатах: $a_j^i = b_k^i c_j^k$, где в произвольной точке из U матрица b – произвольный элемент подгруппы G, а c – некоторая фиксированная матрица из группы $GL(2n, R)$.

Редукция группы $GL(2n, R)$ к подгруппе G превращает многообразие M в G-пространство, то есть в пространство, в каждом касательном слое которого определено действие подгруппы G.

G-пространство M в окрестности U является локально плоским, если в подходящих координатах структурные функции a равны: δ_i^j.

Для редуцированного подрасслоения Q семейство изоморфизмов (2′) отображает произвольный вектор из $T_x(M)$ в вектор из R^{2n}:

$$\rho_x(X) = b_k^i c_j^k X^j e_i. \tag{4'}$$

Рассмотрим фиксированное отображение из семейства (4′)

$$\rho_x(X) = c_j^i X^j e_i. \tag{4''}$$

Это отображение переводит вектор $X \in T_x(M)$ в вектор с координатами $c_j^1 X^j e_1 + ... + c_j^{2n} X^j e_{2n}$. Тогда, согласно (4′), G индуцирует действие этой группы в линейном пространстве R^{2n}: $G(R^{2n})$.

Предположим, что G – это симплектическая группа $Sp(2n)$, определенная в первом параграфе. Двухвекторным инвариантом группы $Sp(2n)(R^{2n})$ является функция $f(\xi, \eta)$, удовлетворяющая тождеству

$$f(b\xi, b\eta) = f(\xi, \eta), \tag{6}$$

где $b \in Sp(2n)$. Если X и Y – произвольные векторы из $T_x(M)$, то полагая $\xi = \rho_x(X) = c_j^i X^j e_i$ и $\eta = \rho_x(Y) = c_j^i Y^j e_i$, от (6) приходим

$$f(b_k^i c_j^k X^j e_i, b_k^i c_j^k Y^j e_i) = f(c_j^i X^j e_i, c_j^i Y^j e_i),$$

где $i, j, k, l = 1, ..., 2n$. Воспользовавшись (5), получаем

$$f(b_k^i a_j^k X^j e_i, b_k^i a_j^k Y^j e_i) = f(a_j^i X^j e_i, a_j^i Y^j e_i), \tag{6'}$$

Решение уравнения (6′) мы будем обозначать $f(X, Y)$ и называть *метрической функцией почти гамильтонова многообразия* [5].

Решая функциональное уравнение (6′), приходим к метрической функции почти гамильтонова многообразия:

$$f(X, Y) = a_i^1 X^i a_j^{n+1} Y^j - a_i^{n+1} X^i a_j^1 Y^j + ... + a_i^n X^i a_j^{2n} Y^j - a_i^{2n} X^i a_j^n Y^j, \tag{7}$$

причем $i, j = 1, ..., 2n$. Введем символы

$$g_{ij} = a_i^1 a_j^{n+1} - a_i^{n+1} a_j^1 + ... + a_i^n a_j^{2n} - a_i^{2n} a_j^n, \tag{8}$$

образующие, согласно выше доказанной лемме, тензор, называемый *кососимметричным метрическим тензором*, так как для него $g_{ij} = -g_{ji}$. Используя последние обозначение, получаем

$$f(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j, \tag{7'}$$

или с учетом антисимметрии тензора g_{ij}:

$$f(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{i<j} g_{ij} (X^i Y^j - X^j Y^i). \tag{7''}$$

Для двумерного почти гамильтонова многообразия метрическая функция имеет вид:

$$f(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{i<j=1}^{2} (a_i^1 a_j^2 - a_i^2 a_j^1)(X^i Y^j - X^j Y^i).$$

Справедливо

Предложение 2. *Локально плоское почти гамильтоново многообразие задается метрической функцией*

$$f(X,Y)=\frac{1}{2}[X^1Y^{n+1}-X^{n+1}Y^1+...+X^nY^{2n}-X^{2n}Y^n]. \qquad (7''')$$

Используя подходящие локальные координаты можно упростить матрицу c. Это вытекает из леммы 1:

$$a_i^{'j}=b_l^jc_k^l\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}, \quad i,j,k,l=1,...,2n. \qquad (9)$$

При замене координат мы оперируем 2n функциями, которые можем выбрать произвольным образом. Упростим матрицу c для двумерного почти гамильтонова многообразия. Нам необходима следующая

Лемма 3. *Матрицу c двумерного почти гамильтонова многообразия можно привести к виду:*

$$c=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{pmatrix},$$

где q – гладкая функция.

Доказательство вытекает из формулы (5) и структуры симплектической группы $Sp(2)$, которая совпадает с унимодулярной группой $Sl(2)$, состоящей из матриц порядка 2 с определителем, равным 1 [4].

Справедлива следующая

Теорема 4. *Двумерное почти гамильтоново многообразие локально плоское, то есть в некоторой координатной окрестности произвольной точки из окрестности U его метрическая функция принимает следующий вид:*

$$f(X,Y)=X^1Y^2-X^2Y^1.$$

Доказательство. Для данного многообразия, умножая матрицу c из леммы 3 на матрицу Якоби, приходим к системе дифференциальных уравнений $\partial x^1/\partial x^{'1}=\sqrt{2}$, $\partial x^1/\partial x^{'2}=0$, $q\partial x^2/\partial x^{'2}=\sqrt{2}$, которая совместна. Значит матрица c равна

$$\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ a' & \sqrt{2}\end{pmatrix},$$

то есть в координатной окрестности U матрица $c/\sqrt{2}$ является симплектической, и потому, согласно разложению (5) вместо c можно взять единичную матицу. Теорема 4 доказана.

§3. Дифференциальные формы

В данном параграфе определяются дифференциальные формы на многообразии, строятся симплектические многообразия. Формулируется классическая теорема Дарбу.

Рассмотрим n-мерное линейное пространство V. Отображение

$$\nu : V^m \to R$$

называется *полилинейным*, если выполняется условие:

$$\nu(a^1, ..., \alpha a^i + \beta b^i, ..., a^m) = \alpha\nu(a^1, ..., a^i, ..., a^m) + \beta\nu(a^1, ..., b^i, ..., a^m),$$

где $i = 1, ..., m$ [1]. Полилинейное отображение называется *кососимметричным*, если

$$\nu(a^1, ..., a^i, ..., a^j, ..., a^m) = -\nu(a^1, ..., a^j, ..., a^i, ..., a^m),$$

причем $i, j = 1, ..., m$.

Рассмотрим теперь гладкое многообразие M и семейство координатных окрестностей $\{U_\alpha\}$. Рассмотрим также касательное расслоение $T(M)$, определенное в §2. *Дифференциальной формой ранга m в точке x* на многообразии M называется кососимметричное полилинеиное отображение

$$\omega_x^m : T_x(M) \times ... \times T_x(M) \to R$$

m экземпляров касательного пространства $T_x(M)$ в R. Если такая форма задана в каждой точке $x \in M$, причем соответствие $x \mapsto \omega_x$ гладко, то говорят, что задана *дифференциальная форма ранга m на многообразии M* [1, 6].

В координатной окрестности U многообразия M (локальные координаты) дифференциальная форма ранга m задается выражением:

$$\omega = \sum_{i_1 < ... < i_m} a_{i_1 ... i_m} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_m}, \tag{1}$$

причем $a_{i_1 ... i_k ... i_l ... i_m} = -a_{i_1 ... i_l ... i_k ... i_m}$; $\wedge$ — антисимметричная операция внешнего произведения дифференциальных форм. Для дифференциальных форм рангов 1 и 2, приходим к выражениям:

$$\omega = a_1 dx^1 + ... + a_n dx^n. \tag{1'}$$

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j; \tag{1''}$$

На множестве дифференциальных форм вводится операция внешнего дифференцирования d по правилу:

$$d\omega = \sum_{i_1 < ... < i_m} da_{i_1 ... i_m} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_m}. \tag{2}$$

Для форм ранга 1 и 2 справедливы равенства:

$$d\omega = \sum_{p,i} \frac{\partial a_i}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^i. \tag{2'}$$

$$d\omega = \sum_{p,i<j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^i \wedge dx^j; \qquad (2'')$$

Видно, что операция внешнего дифференцирования повышает ранг дифференциальной формы на единицу [1, 6]. Справедливо также тождество:

$$dd\omega = 0. \qquad (3)$$

Дифференциальная форма ω называется *замкнутой*, если

$$d\omega = 0. \qquad (4)$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Дифференциальная форма ранга 1 замкнута тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^p} - \frac{\partial a_p}{\partial x^i} = 0; \qquad (5)$$

дифференциальная форма ранга 2 замкнута тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^p} + \frac{\partial a_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{pi}}{\partial x^j} = 0, \qquad (6)$$

где $i, j, p = 1, ..., n$.

Утверждение леммы следует из того, что формулы $(2')$ и $(2'')$ можно привести к виду:

$$d\omega = \sum_{p<i} (\frac{\partial a_i}{\partial x^p} - \frac{\partial a_p}{\partial x^i}) dx^p \wedge dx^i;$$

$$d\omega = \sum_{p<i<j} (\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^p} + \frac{\partial a_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{pi}}{\partial x^j}) dx^p \wedge dx^i \wedge dx^j.$$

Рассмотрим дифференциальную форму ω ранга m и систему из m линейно независимых касательных векторов: $X_1 = (X_1^1, ..., X_1^n), ..., X_m = (X_m^1, ..., X_m^n)$. Тогда результатом действия дифференциальной формы на эти векторы является функция:

$$\omega(X_1, ..., X_m) = \sum_{i_1<...<i_m} a_{i_1...i_m} \mathrm{Asym}(X_1^{i_1} ... X_m^{i_m}), \qquad (7)$$

где $\mathrm{Asym}(X_1^{i_1} ... X_m^{i_m})$ – сумма всевозможных произведений компонент касательных векторов с соответствующими индексами, причем перед слагаемым ставится положительный знак в случае четной перестановки индексов и отрицательный знак в противном случае. Для дифференциальной формы ранга 1 имеем

$$\omega(X) = a_1 X^1 + ... a_n X^n, \qquad (7')$$

аналогично для формы ранга 2:

$$\omega(X_1, X_2) = \sum_{i<j} a_{ij} (X_1^i X_2^j - X_1^j X_2^i). \qquad (7'')$$

С учетом выше сделанных построений метрическую функцию ((7″) из §2) для почти гамильтонова пространства можно записать в виде:

$$f(X,Y) = \Omega(X,Y), \tag{8}$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{i<j} g_{ij}\, dx^i \wedge dx^j. \tag{9}$$

Почти гамильтоново многообразие M называется *симплектическим*, если дифференциальная форма Ω замкнута.

Из формулы (6) леммы 1 следуют условия замкнутости для формы (9) с компонентами (8) из §2:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = 0. \tag{6'}$$

Левую часть (6′) обозначим T_{ijk}. Отметим следующие свойства:

1) если совпадают любые два индекса из трех, то $T_{ijk} = 0$;

2) при четной перестановке индексов T_{ijk} сохраняется, а при нечетной – меняет знак на противоположный.

Из этого следует, что число независимых символов T_{ijk} равно $2n(2n-1)(n-1)/3$.

Можно в явном виде записать условия (6′) для почти гамильтонова многообразия, помня при этом, что

$$g_{ij} = c_i^1 c_j^{n+1} - c_i^{n+1} c_j^1 + ... + c_i^n c_j^{2n} - c_i^{2n} c_j^n.$$

Для четырехмерного многообразия, например, условие (6′) запишется:

$$\frac{\partial c_i^1}{\partial x^p} c_j^3 - \frac{\partial c_i^3}{\partial x^p} c_j^1 + \frac{\partial c_i^2}{\partial x^p} c_j^4 - \frac{\partial c_i^4}{\partial x^p} c_j^2 + \frac{\partial c_j^1}{\partial x^i} c_p^3 - \frac{\partial c_j^3}{\partial x^i} c_p^1 + \frac{\partial c_j^2}{\partial x^i} c_p^4 - \frac{\partial c_j^4}{\partial x^i} c_p^2 +$$

$$\frac{\partial c_p^1}{\partial x^j} c_i^3 - \frac{\partial c_p^3}{\partial x^j} c_i^1 + \frac{\partial c_p^2}{\partial x^j} c_i^4 - \frac{\partial c_p^4}{\partial x^j} c_i^2 + c_i^1 \frac{\partial c_j^3}{\partial x^p} - c_i^3 \frac{\partial c_j^1}{\partial x^p} + c_i^2 \frac{\partial c_j^4}{\partial x^p} - c_i^4 \frac{\partial c_j^2}{\partial x^p} +$$

$$c_j^1 \frac{\partial c_p^3}{\partial x^i} - c_j^3 \frac{\partial c_p^1}{\partial x^i} + c_j^2 \frac{\partial c_p^4}{\partial x^i} - c_j^4 \frac{\partial c_p^2}{\partial x^i} + c_p^1 \frac{\partial c_i^3}{\partial x^j} - c_p^3 \frac{\partial c_i^1}{\partial x^j} + c_p^2 \frac{\partial c_i^4}{\partial x^j} - c_p^4 \frac{\partial c_i^2}{\partial x^j} = 0,$$

где $i < j < p = 1, 2, 3, 4$.

Приведем теперь пример симплектического многообразия. Пусть M – гладкое многообразие размерности n, $T^*(M)$ – кокасательное расслоение со стандартным слоем R^{*n} (R^{*n} – дуальное пространство к R^n), то есть множество всех кокасательных векторов (поле ковекторов называется еще дифференциальной формой ранга 1) во всех точках многообразия. Это пространство является гладким многообразием. Атлас этого многообразия составляют прямые произведения $U \times R^{*n}$, причем $U \in \mathfrak{U}$. Слоем этого расслоения является $T_x^*(M)$ – кокасательное пространство, то есть множество всех кокасательных векторов многообразия M в

точке x. Это пространство является линейным размерности n, причем пространства $T_x^*(M)$ и R^{*n} изоморфны (координаты кокасательного вектора в фиксированном базисе отождествляются с координатами ковектора из R^{*n}). Поскольку $\dim M = n$, то $\dim T(M) = 2n$.

В кокасательном расслоении $T^*(M)$ вводится естественная симплектическая структура. Пусть $q = (q_1, ..., q_n)$ – локальные координаты произвольной точки q многообразия M, а $p = (p_1, ..., p_n)$ – компоненты произвольной формы p ранга 1 в этой точке. Рассмотрим естественную проекцию $\pi : T^*(M) \to M$ и дифференциал этой проекции: $\pi_* : T(T^*(M)) \to T(M)$. Пусть $\xi \in T_p(T^*(M))$ – касательный вектор к слою кокасательного расслоения в точке $p \in T_q^*(M)$. Тогда дифференциал проекции π_* вектор ξ переводит в касательный вектор $\pi_*\xi \in T_q(M)$. Определим форму ω ранга 1 на $T^*(M)$ формулой $\omega(\xi) = p(\pi_*\xi)$, следовательно $\omega = p_1 \wedge dq_1 + ... + p_n \wedge dq_n$. Значит, согласно определению симплектического многообразия, форма $d\omega$ определяет симплектическую структуру.

В геометрии симплектических многообразий важное значение имеет теорема Дарбу [1].

Теорема 2 *(Дарбу). В симплектическом многообразии M для каждой точки можно подобрать такую координатную окрестность U, что относительно определенной в ней системы координат метрическая функция (7) из §2 принимает простейший вид:*

$$f(X, Y) = X^1 Y^{n+1} - X^{n+1} Y^1 + ... + X^n Y^{2n} - X^{2n} Y^n, \tag{10}$$

то есть симплектическое многообразие всегда локально плоское.

Координаты, описанные в теореме Дарбу называются *координатами Дарбу* и обычно обозначаются: $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$. В этих координатах дифференциальная форма (9) записывается в виде:

$$\Omega = dp_1 \wedge dq_1 + ... + dp_n \wedge dq_n. \tag{11}$$

Из (10) или (11) следует, что матрица с является единичной.

Следует заметить, что теорема 4 из §2 является теоремой Дарбу для двумерного симплектического многообразия.

§4. Гамильтонова механика и симплектическая геометрия

В данном параграфе вводится аксиоматика механики Лагранжа и аксиоматика механики Гамильтона. Определяются гамильтоновы векторные поля и скобки Пуассона.

Рассмотрим стационарную механическую систему (в данном параграфе работаем только со стационарными механическими системами, поскольку при их изучении достаточно ограничиться фазовым пространством с естественной симплектической структурой, а для изучения нестационарных механических систем необходимо рассмотрение нечетномерного расширенного фазового пространства без симплектической структуры), примером которой может служить: математический маятник, сферический маятник, свободная частица и т. д. Построим

сначала механику Лагранжа, а затем механику Гамильтона механической системы. Лагранжева механика задается системой трех аксиом:

1. Каждой стационарной механической системе с n степенями свободы соответствует конфигурационное многообразие M, локальные координаты которого – это обобщенные координаты механической системы: $q_1, ..., q_n$, а точки – это положения механической системы.

2. В касательном расслоении конфигурационного многообразия механической системы определяется функция Лагранжа:

$$L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) = T(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) - U(q_1, ..., q_n), \tag{1}$$

где $(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$ – вектор скорости вдоль траектории движения механической системы, причем T – кинетическая энергия (заметим, что кинетическая энергия механической системы – это риманова метрика в конфигурационном многообразии, то есть положительно определенная квадратичная форма в касательном пространстве в произвольной точке), а U – потенциальная энергия (некоторая функция в конфигурационном многообразии) механической системы.

3. Рассмотрим функционал действия:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Экстремаль этого функционала – траектория движения механической системы. Данное утверждение называется *принципом Гамильтона.* Этот принцип называется еще *принципом наименьшего действия.*

Несложно доказать, что траектории движения механической системы – это интегралы уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{2}$$

где $i = 1, ..., n$. Производные

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

называются *обобщенными импульсами* механической системы. Следует заметить, что обобщенный импульс механической системы – это ковектор конфигурационного многообразия M [1, 7].

Энергией E механической системы называется величина

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \tag{3}$$

Сформулируем теперь аксиоматику гамильтоновой механики.

1. Состояние стационарной механической системы – это точка кокасательного расслоения $T^*(M)$. Данное пространство называется *фазовым*, причем его размерность равна 2n. Точка фазового пространства имеет локальные координаты: $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$.

2. В фазовом пространстве определяется функция Гамильтона как энергия, выраженная через координаты и импульсы механической системы:

$$H(p,q) = H(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n) = \sum_i p_i\ \dot{q}_i\ (p,q) - L(p,q). \tag{4}$$

3. Траектория движения механической системы – экстремаль действия S, которая является решением системы 2n уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{5}$$

называемых *каноническими уравнениями.*

Фазовое пространство механической системы $N = T^*(M)$ имеет естественную симплектическую структуру (§3), в координатах Дарбу $(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$, задаваемую дифференциальной формой

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + ... + dp_n \wedge dq_n. \tag{6}$$

Пусть $x = (p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$ — произвольная точка фазового многообразия N. Рассмотрим изоморфизм $I : T_x^*(N) \to T_x(N)$, который в локальных координатах Дарбу $(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$ принимает вид:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

то есть ковектору с координатами $(a_1,...,a_n,b_1,...,b_n)$ ставит в соответствие вектор с координатами $(-b_1,...,-b_n,a_1,...,a_n)$, а дифференциальной форме dH — векторное поле IdH. Векторное поле IdH называется *гамильтоновым.* Вдоль траектории движения, очевидно, $\dot{x} = IdH(x)$. Расписывая это выражение покоординатно, приходим к уравнениям Гамильтона (5). В теории симплектических многообразий доказывается, что гамильтоново векторное поле IdH является векторным полем группы движений симплектического многообразия.

Рассмотрим произвольную достаточно гладкую функцию фазового пространства N: $F(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$. *Скобкой Пуассона* функций H и F называется следующая функция:

$$(H,F) = dF(IdH).$$

Последняя формула равносильна следующей [1]:

$$(H,F) = \omega(IdH, IdF). \tag{7}$$

Итак, скобка Пуассона является естественным следствием симплектической структуры в фазовом пространстве N. В локальных координатах скобка Пуассона представима в виде:

$$(H,F) = \omega(IdH, IdF) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right). \tag{8}$$

Доказательство этого равенства сводится к простым вычислениям, поэтому оно предоставляется читателю.

Функция F называется *первым интегралом* уравнений Гамильтона (5), если она постоянна вдоль интегральной кривой этих уравнений, то есть вдоль траектории движения.

Скобка Пуассона удовлетворяет следующим свойствам [1].

Предложение 1. *Функция F тогда и только тогда является первым интегралом канонических уравнений (5) с функцией Гамильтона H, когда $(H, F) = 0$.*

Так как функция F постоянна вдоль траектории движения, то $F(IdH) = \text{const}$, поэтому $(H, F) = 0$.

Предложение 2. *Скобки Пуассона трех функций A, B, C удовлетворяют тождеству Якоби:*

$$((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B) = 0.$$

Доказательство этого предложения следует из формулы (8) и сводится к непосредственным вычислениям, поэтому оно предоставляется читателю.

Предложение 3. *(Теорема Пуассона.) Скобка Пуассона (F_1, F_2) двух первых интегралов F_1 и F_2 механической системы есть снова первый интеграл.*

Для доказательства воспользуемся тождеством Якоби:

$$((F_1, F_2), H) + ((F_2, H), F_1) + ((H, F_1), F_2) = 0,$$

следовательно $((F_1, F_2), H) = 0$, то есть (F_1, F_2) – первый интергал.

Заметим, что функции F в фазовом пространстве с функцией Гамильтона H, в силу предложения 2, образуют алгебру Ли с коммутатором $Id(F_1, F_2)$, а первые интегралы подалгебру Ли. Очевидно, две функции являются коммутативными ($Id(F_1, F_2) = 0$) тогда и только тогда, когда скобка Пуассона этих функций (F_1, F_2) постоянна. Обратим еще внимание на то, что оператор I индуцирует естественное мономорфное вложение алгебры Ли функций в алгебру Ли гамильтоновых векторных полей с ядром из постоянных функций.

В заключении рассмотрим физический пример. Сферическим маятником называется материальная точка массой m, движущаяся по поверхности сферы радиуса l в поле силы тяжести [7]. Декартовы координаты x, y, z точки связаны с обобщенными координатами φ, θ уравнениями: $x = l \sin\theta \cos\varphi$, $y = l \sin\theta \sin\varphi$, $z = l \cos\theta$. Следует заметить, что конфигурационным многообразием механической системы является двумерная сфера. Функция Лагранжа принимает вид:

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{?}\theta^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl\cos\theta.$$

По функции Лагранжа находим обобщенные импульсы: $p_\varphi = ml^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}$, $p_\theta = ml^2\,\dot{\theta}$. Тогда для функции Гамильтона имеем

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta.$$

Компоненты гамильтонова векторного поля IdH, очевидно, равны:

$$0, \frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl\sin\theta, \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}, \frac{p_\theta}{ml^2}.$$

Из формулы (7) следует, что скобка Пуассона $(H, H) = 0$, поэтому, соглано предложению 1, энергия сферического маятника является первым интегралом уравнений Гамильтона (5), то есть интегралом движения. Несложно также проверить, что

$$(H, p_\varphi) = \omega(IdH, Idp_\varphi) = dp_\varphi(IdH) = 0,$$

то есть функция p_φ является интегралом движения. В механике эта функция интерпретируется как проекция момента импульса M_z.

Список литературы

[1] *Арнольд В.И.* Математический аппарат классической механики. М.:Наука,1974.

[2] *Арнольд В.И., Гивенталь А.Б.* Симплектическая геометрия. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика",2000.

[3] *Михайличенко Г.Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск, НГУ,2001.

[4] *Постников М.М.* Лекции по геометрии, семестр 5. Группы и алгебры Ли. М.:Наука,1982.

[5] *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.:Мир,1970.

[6] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.:Наука,1979.

[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, т.1. Механика. М.:Наука,1988.