Приложение

Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий

В.А. Кыров

§1. Введение

Г.Г. Михайличенко в работе [1] получил полную классификацию метрических функций всех двумерных феноменологически симметричных геометрий. В силу теоремы об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий каждая из таких геометрий допускает трехпараметрическию группу движений. Зная эту метрическую функцию мы восстанавливаем группу движений, а от последней возвращаемся к метрике. В.Х. Лев в своей диссертации [2] получил классификацию метрических функций трехмерных феноменологически симметричных геометрий, которые допускают шестимерную группу движений. Целью этого приложения является нахождение базисных инфинитезимальных операторов шестимерных алгебр Ли этих групп движений.

Согласно [1] феноменологически симметричное двумерное многообразие $\mathfrak{F}$ представляет собой множество таких точек $i = (x_i, y_i)$ двумерного многообразия $\mathfrak{M}$, что любой паре $< ij >$ из открытого и плотного в $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ множества $\mathfrak{S}_f$ сопоставляется действительное число

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{1}$$

причем для произвольного кортежа четырех точек $< ijkl >$ таких, что пары $< ij >, \ldots, < kl > \in \mathfrak{S}_f$, шесть взаимных расстояний $f(ij)$, $\ldots$, $f(kl)$ функционально связаны. В §1 Основной части настоящей монографии постулируется локальная невырожденность метрической функции

(1). Г.Г. Михайличенко – автором Основной чости – в §6 были найдены с точностью до эквивалентности все плоские метрические функции ((4) – (14) из §6). В §2 доказывается, что феноменологическая симметрия ранга 4 эквивалентна групповой симметрии степени 3, то есть каждая невырожденная метрическая функция (4) – (14) из §6 допускает трехпараметрическую группу движений, относительно которой она является двухточечным инвариантом. Ранее [3] он же нашел трехмерные группы преобразований, которые оставляют инвариантными эти метрические функции. Базисные операторы алгебр Ли соответствующих групп выпишем из теоремы 2 §6, учитывая каноническую форму записи метрической функции. Они будут идти в том же порядке, что и метрические функции (4) – (14) из §6:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + x\partial_y; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= tgy\ sinx\partial_x + cosx\partial_y, \\ X_3 &= tgy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= -thy\ sinx\partial_x + cosx\partial_y, \\ X_3 &= -thy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + x\partial_y; \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= -cthy\ sinx\partial_x + cosx\partial_y, \\ X_3 &= -cthy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$X_1 = y\partial_x, \quad X_2 = x\partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y; \tag{7}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{8}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (y - \beta x)\partial_x + (x - \beta y)\partial_y; \tag{9}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + (y - 2x)\partial_y; \tag{10}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -(y + \gamma x)\partial_x + (x - \gamma y)\partial_y, \tag{11}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y, \quad X_3 = (x^2 - \varepsilon y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \tag{12}$$

где $\gamma > 0$, $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, $\varepsilon = 0, \pm 1$.

Из [1] следует, что феноменологически симметричное пространство $\mathcal{F}$ есть множество таких точек $i = (x_i, y_i, z_i)$ трехмерного многообразия $\mathfrak{M}$, что любой паре $< ij >$ из открытого и плотного множества $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ сопоставляется число

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j). \tag{13}$$

Метрическая функция (13), согласно §1 должна быть невырожденной, причем все десять расстояний между произвольными пятью точками функционально связаны. В.Х. Лев [2] с точностью до эквивалентности нашел все трехмерные невырожденные метрические функции (13). Приведем эту классификацию

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \tag{14}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2, \tag{15}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] e^{2(\gamma arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j)}, \tag{16}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] e^{2(\beta Ar(c)th \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j)}, \tag{17}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} e^{z_i + z_j}, \tag{18}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j}, \tag{19}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j, \tag{20}$$

$$f(ij) = sinz_i\ sinz_j(siny_i\ siny_j\ cos(x_i - x_j) + cosy_i\ cosy_j) + cosz_i\ cosz_j, \tag{21}$$

$$f(ij) = chz_i\ chz_j(siny_i\ siny_j\ cos(x_i - x_j) + cosy_i\ cosy_j) - shz_i\ shz_j, \tag{22}$$

$$f(ij) = chz_i\ chz_j(chy_i\ chy_j\ cos(x_i - x_j) - shy_i\ shy_j) - shz_i\ shz_j, \tag{23}$$

$$f(ij) = shz_i\ shz_j(siny_i\ siny_j\ cos(x_i - x_j) + cosy_i\ cosy_j) - chz_i\ chz_j, \tag{24}$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $\beta \neq 1$.

Согласно теореме об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий (§2 настоящей монографии) метрические функции (14) – (24) допускают шестимерные группы движений, причем их алгебры Ли имеют следующий базис:

$$X_\mu = \lambda_\mu(x, y, z)\partial x + \sigma_\mu(x, y, z)\partial y + \tau_\mu(x, y, z)\partial z, \tag{25}$$

где $\mu = 1, 2, \ldots, 6$. Очевидно, что произвольный оператор этой алгебры задается выражением

$$X = \lambda(x, y, z)\partial x + \sigma(x, y, z)\partial y + \tau(x, y, z)\partial z, \tag{26}$$

где

$$\lambda = a^\nu \lambda_\nu, \quad \sigma = a^\nu \sigma_\nu, \quad \tau = a^\nu \tau_\nu,$$

причем $a^\nu = const$ и по "немому индексу" ν ведется суммирование от 1 до 6. Шести независимым параметрам a^ν можно сопоставить элемент $(a^1, \ldots, a^6)$ вещественного линейного пространства V^6 так, что базису из V^6 будет соответствовать базис алгебры Ли операторов (26).

Поскольку метрическая функция (13) является двухточечным инвариантом группы движений с базисом (25) соответствующей алгебры Ли, по инфинитезимальному критерию инвариантности

$$X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0$$

или в развернутой форме:

$$\begin{gathered}\lambda(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}+\sigma(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}+\tau(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}+\\ +\lambda(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}+\sigma(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}+\tau(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=0.\end{gathered}\tag{27}$$

В нашем случае метрическая функция $f(ij)$ известна, поэтому (27) представляет собой функциональное уравнение на коэффициенты произвольного оператора алгебры Ли группы движений. Справедлива следующая основная

Теорема. *Базисные операторы (25) шестимерных алгебр Ли групп движений пространств с метрическими функциями (4) – (14) в надлежаще выбранной системе локальных координат задаются соответственно следующими выражениями:*

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad X_4=-y\partial_x+x\partial_y,\\ &X_5=-z\partial_x+x\partial_z,\quad X_6=-z\partial_y+y\partial_z;\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad X_4=-y\partial_x+x\partial_y,\\ &X_5=z\partial_x+x\partial_z,\quad X_6=z\partial_y+y\partial_z;\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=-(y+\gamma x)\partial_x+(x-\gamma y)\partial_y,\\ &X_4=(\gamma y-x)\partial_x-(y+\gamma x)\partial_y+\frac{1+\gamma^2}{2}\partial_z,\\ &X_5=(-x^2+y^2+2\gamma xy)\partial_x-(\gamma(x^2-y^2)+2xy)\partial y+(1+\gamma^2)x\partial_z,\\ &X_6=(\gamma(y^2-x^2)-2xy)\partial x+(x^2-y^2-2\gamma xy)\partial_y+(1+\gamma^2)y\partial_z;\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=(\beta x-y)\partial_x+(\beta y-x)\partial_y,\\ &X_4=(\beta y-x)\partial_x+(\beta x-y)\partial_y+\frac{1-\beta^2}{2}\partial_z,\\ &X_5=-(x^2+y^2-2\beta xy)\partial_x+(\beta(x^2+y^2)-2xy)\partial y+(1-\beta^2)x\partial_z,\\ &X_6=(\beta(x^2+y^2)-2xy)\partial x-(x^2+y^2-2\beta xy)\partial_y+(1-\beta^2)y\partial_z;\end{aligned}\tag{31}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y,$$
$$X_4 = x\partial_x - y\partial_y + \partial_z, \quad X_5 = x^2\partial_x + x\partial z, \quad X_6 = -y^2\partial_y + y\partial_z; \tag{32}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + (y-2x)\partial_y,$$
$$X_4 = -2x\partial_y + \partial_z, \quad X_5 = -x^2\partial_y + x\partial_z, \tag{33}$$
$$X_6 = -x^2\partial x + 2(x^2 - xy)\partial_y + y\partial_z;$$

$$X_1 = y\partial_x, \quad X_2 = x\partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y,$$
$$X_4 = \partial_z, \quad X_5 = \partial_x + y\partial_z, \quad X_6 = \partial_y - x\partial_z; \tag{34}$$

$$X_1 = -\partial_x, \quad X_2 = -ctgy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y,$$
$$X_3 = ctgy\ sinx\partial_x - cosx\partial_y,$$
$$X_4 = ctgz\ sin^{-1}y\ cosx\partial_x + ctgz\ cosy\ sinx\partial_y + siny\ sinx\partial_z, \tag{35}$$
$$X_5 = -ctgz\ sin^{-1}y\ sinx\partial_x + ctgz\ cosy\ cosx\partial_y + siny\ cosx\partial_z,$$
$$X_6 = -ctgz\ siny\partial_y + cosy\partial_z;$$

$$X_1 = -\partial_x, \quad X_2 = -ctgy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y,$$
$$X_3 = ctgy\ sinx\partial_x - cosx\partial_y,$$
$$X_4 = thz\ sin^{-1}y\ cosx\partial_x + thz\ cosy\ sinx\partial_y + siny\ sinx\partial_z, \tag{36}$$
$$X_5 = -thz\ sin^{-1}y\ sinx\partial_x + thz\ cosy\ cosx\partial_y + siny\ cosx\partial_z,$$
$$X_6 = -thz\ siny\partial_y + cosy\partial_z;$$

$$X_1 = -\partial_x, \quad X_2 = thy\ cosx\partial_x + sinx\partial_y,$$
$$X_3 = -thy\ sinx\partial_x + cosx\partial_y,$$
$$X_4 = thz\ ch^{-1}y\ cosx\partial_x - thz\ shy\ sinx\partial_y + chy\ sinx\partial_z, \tag{37}$$
$$X_5 = -thz\ ch^{-1}y\ sinx\partial_x - thz\ shy\ cosx\partial_y + chy\ cosx\partial_z,$$
$$X_6 = thz\ chy\partial_y - shy\partial_z;$$

$$
\begin{aligned}
&X_1 = -\partial_x, \quad X_2 = -ctgy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y,\\
&X_3 = ctgy\ sinx\partial_x - cosx\partial_y,\\
&X_4 = cthz\ sin^{-1}y\ cosx\partial_x + cthz\ cosy\ sinx\partial_y + siny\ sinx\partial_z,\\
&X_5 = -cthz\ sin^{-1}y\ sinx\partial_x + cthz\ cosy\ cosx\partial_y + siny\ cosx\partial_z,\\
&X_6 = -cthz\ siny\partial_y + cosy\partial_z,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ *и* $\beta \neq 1$.

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие. Алгебры Ли групп движений с базисными операторами (28) – (38) удовлетворяют соответственно следующим коммутационным соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = 0, [X_1, X_4] = X_2,\\
&[X_1, X_5] = X_3, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = 0,\\
&[X_2, X_4] = -X_1, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_3,\\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_1, [X_3, X_6] = -X_2,\\
&[X_4, X_5] = -X_6, [X_4, X_6] = X_5, [X_5, X_6] = -X_4;
\end{aligned}
\tag{28'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = 0, [X_1, X_4] = X_2,\\
&[X_1, X_5] = X_3, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = 0,\\
&[X_2, X_4] = -X_1, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_3,\\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = X_1, [X_3, X_6] = X_2,\\
&[X_4, X_5] = -X_6, [X_4, X_6] = X_5, [X_5, X_6] = X_4;
\end{aligned}
\tag{29'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = -\gamma X_1 + X_2, [X_1, X_4] = -X_1 - \gamma X_2,\\
&[X_1, X_5] = 2X_4, [X_1, X_6] = 2X_3, [X_2, X_3] = -X_1 - \gamma X_2,\\
&[X_2, X_4] = \gamma X_1 - X_2, [X_2, X_5] = -2X_3, [X_2, X_6] = 2X_4,\\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_6 - \gamma X_5, [X_3, X_6] = X_5 - \gamma X_6,\\
&[X_4, X_5] = \gamma X_6 - X_5, [X_4, X_6] = -\gamma X_5 - X_6, [X_5, X_6] = 0;
\end{aligned}
\tag{30'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = \beta X_1 - X_2, [X_1, X_4] = -X_1 + \beta X_2, \\
&[X_1, X_5] = 2X_4, [X_1, X_6] = 2X_3, [X_2, X_3] = -X_1 + \beta X_2, \\
&[X_2, X_4] = \beta X_1 - X_2, [X_2, X_5] = 2X_3, [X_2, X_6] = 2X_4, \\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_6 + \beta X_5, [X_3, X_6] = -X_5 + \beta X_6, \\
&[X_4, X_5] = \beta X_6 - X_5, [X_4, X_6] = \beta X_5 - X_6, [X_5, X_6] = 0;
\end{aligned} \tag{31'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = X_1, [X_1, X_4] = X_1, \\
&[X_1, X_5] = X_4 + X_3, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = X_2, \\
&[X_2, X_4] = -X_2, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_4 - X_3, \\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = X_5, [X_3, X_6] = X_6, \\
&[X_4, X_5] = X_5, [X_4, X_6] = -X_6, [X_5, X_6] = 0;
\end{aligned} \tag{32'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = X_1 - 2X_2, [X_1, X_4] = -2X_2, \\
&[X_1, X_5] = X_4, [X_1, X_6] = -2X_3, [X_2, X_3] = X_2, \\
&[X_2, X_4] = 0, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_4, \\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = X_5, [X_3, X_6] = X_6 - 2X_5, \\
&[X_4, X_5] = 0, [X_4, X_6] = -2X_5, [X_5, X_6] = 0;
\end{aligned} \tag{33'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = 2X_1, [X_1, X_4] = 0, \\
&[X_1, X_5] = 0, [X_1, X_6] = -X_5, [X_2, X_3] = -2X_2, \\
&[X_2, X_4] = 0, [X_2, X_5] = -X_6, [X_2, X_6] = 0, \\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_5, [X_3, X_6] = X_6, \\
&[X_4, X_5] = 0, [X_4, X_6] = 0, [X_5, X_6] = -X_4;
\end{aligned} \tag{34'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = -X_5, \\
&[X_1, X_5] = X_4, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = -X_1, \\
&[X_2, X_4] = -X_6, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_4, \\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_6, [X_3, X_6] = X_5, \\
&[X_4, X_5] = -X_1, [X_4, X_6] = -X_2, [X_5, X_6] = -X_3;
\end{aligned} \tag{35'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = -X_5, \\
&[X_1, X_5] = X_4, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = -X_1, \\
&[X_2, X_4] = -X_6, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_4, \\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_6, [X_3, X_6] = X_5, \\
&[X_4, X_5] = X_1, [X_4, X_6] = X_2, [X_5, X_6] = X_3;
\end{aligned} \tag{36'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = -X_5, \\
&[X_1, X_5] = X_4, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = X_1, \\
&[X_2, X_4] = -X_6, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = -X_4, \\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_6, [X_3, X_6] = -X_5, \\
&[X_4, X_5] = X_1, [X_4, X_6] = X_2, [X_5, X_6] = X_3,
\end{aligned} \tag{37'}
$$

причем коммутационные соотношения для алгебры Ли (38) и (36) совпадают.

Из структуры коммутационных соотношений алгебр Ли групп движений с базисными операторами (28) – (38) и структурных признаков подалгебр [3] следует, что операторы X_1, X_2, X_4 алгебр Ли (28) – (29) и X_1, X_2, X_3 алгебр Ли (30) – (38) образуют трехмерные подалгебры Ли, которые будем обозначать символом A_3.

Пусть L – произвольная алгебра Ли. Коммутантом алгебры Ли L называется ее идеал $L^{(1)} = [L, L]$, который состоит из элементов вида: $[u, v]$, где $u, v \in L$. Второй коммутант определяется так: $L^{(2)} = [L^1, L^1]$ и, наконец, по индукции $L^{(k+1)} = [L^k, L^k]$. Естественным образом приходим к ряду коммутантов алгебры Ли L:

$$
L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \ldots \supset L^{(n)} \supset \ldots \tag{38}
$$

Алгебра Ли L называется разрешимой, если ее ряд коммутантов (38) заканчивается нулевым идеалом.

Легко проверяется, что подалгебра A_3 алгебр Ли с операторами (28) – (33) разрешима, а с операторами (34) – (38) неразрешима.

§2. Доказательство основной теоремы для алгебр Ли с разрешимой подалгеброй

Приступим к доказательству основной теоремы для групп движений с операторами (28) – (33).

Для метрической функции (14) функциональное уравнение (27) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\lambda(i)(x_i - x_j) + \sigma(i)(y_i - y_j) + \tau(i)(z_i - z_j) - \\ &- \lambda(j)(x_i - x_j) - \sigma(j)(y_i - y_j) - \tau(j)(z_i - z_j) = 0.\end{aligned} \tag{39}$$

Продифференцируем уравнение (39) по координатам точки i, а результаты дифференцирований по координатам точки j

$$\lambda_x(i) + \lambda_x(j) = 0, \quad \sigma_x(i) + \lambda_y(j) = 0, \quad \tau_x(i) + \lambda_z(j) = 0, \tag{40.1}$$

$$\lambda_y(i) + \sigma_x(j) = 0, \quad \sigma_y(i) + \sigma_y(j) = 0, \quad \tau_y(i) + \sigma_z(j) = 0, \tag{40.2}$$

$$\lambda_z(i) + \tau_x(j) = 0, \quad \sigma_z(i) + \tau_y(j) = 0, \quad \tau_z(i) + \tau_z(j) = 0. \tag{40.3}$$

Разделяя переменные, относящиеся к координатам различных точек, в системах (40.1) – (40.3) и интегрируя полученные уравнения, приходим к выражениям:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(x,y,z) &= -a_1 y - a_2 z + a_4,\\ \sigma(x,y,z) &= a_1 x - a_3 z + a_5,\\ \tau(x,y,z) &= a_2 x + a_3 y + a_6.\end{aligned}\right\}$$

Как говорилось во введении кортеж $(a_4, a_5, a_6, a_1, a_2, a_3)$ принадлежит вещественному линейному пространству V^6 и поэтому базису (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1) соответствует базис (28).

Подставим в уравнение (27) выражение (15)

$$\begin{aligned}&\lambda(i)(x_i - x_j) + \sigma(i)(y_i - y_j) - \tau(i)(z_i - z_j) - \\ &- \lambda(j)(x_i - x_j) - \sigma(j)(y_i - y_j) + \tau(j)(z_i - z_j) = 0.\end{aligned} \tag{41}$$

Продифференцируем уравнение (41) по координатам x_i, y_i, z_i, после чего результаты этих дифференцирований по координатам x_j, y_j, z_j:

$$\lambda_x(i) + \lambda_x(j) = 0, \quad \sigma_x(i) + \lambda_y(j) = 0, \quad \tau_x(i) - \lambda_z(j) = 0, \tag{42.1}$$

$$\lambda_y(i) + \sigma_x(j) = 0, \quad \sigma_y(i) + \sigma_y(j) = 0, \quad \tau_y(i) - \sigma_z(j) = 0, \tag{42.2}$$

$$-\lambda_z(i) + \tau_x(j) = 0, \quad -\sigma_z(i) + \tau_y(j) = 0, \quad \tau_z(i) + \tau_z(j) = 0. \tag{42.3}$$

Рассуждая, далее, в отношении системы (42.1) – (42.3) точно также как и в отношении к системе (40.1) – (40.3), приходим к базисным операторам (29).

Приступим теперь к нахождению базисных операторов шестимерной алгебры Ли группы движений, допускаемой метрической функцией (16). Поскольку

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = [(x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = -[(x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = [(y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = -[(y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]\alpha,$$

где $\alpha = 2exp[2\gamma arctg\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j]$, $\gamma \geqslant 0$, то исходное функциональное уравнение (27) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &[(x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j)]\lambda(i) - [(x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j)]\lambda(j) + \\ &+[(y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j)]\sigma(i) - [(y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j)]\sigma(j) + \\ &+[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]\tau(i) + [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]\tau(j) = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Продифференцируем уравнение (43) сначала по координатам x_i, y_i, z_i точки i, а результаты дифференцирования по координатам x_j, y_j, z_j точки j

$$\begin{aligned} &-\lambda_x(i) - \lambda_x(j) - \gamma\sigma_x(i) - \gamma\sigma_x(j) - 2\tau(i) - 2\tau(j) - \\ &-2(x_i - x_j)\tau_x(i) + 2(x_i - x_j)\tau_x(j) = 0, \end{aligned} \tag{44.1}$$

$$\gamma\lambda_x(i) - \lambda_y(j) - \sigma_x(i) - \gamma\sigma_y(j) - 2(y_i - y_j)\tau_x(i) + 2(x_i - x_j)\tau_y(j) = 0, \tag{44.2}$$

$$-\lambda_z(j) - \gamma\sigma_z(j) + 2(x_i - x_j)\tau_z(j) = 0, \tag{44.3}$$

$$-\lambda_y(i) + \gamma\lambda_x(j) - \gamma\sigma_y(i) - \sigma_x(j) - 2(x_i - x_j)\tau_y(i) + 2(y_i - y_j)\tau_x(j) = 0, \tag{44.4}$$

$$\begin{aligned}&\gamma\lambda_y(i) + \gamma\lambda_y(j) - \sigma_y(i) - \sigma_y(j) - 2\tau(i) - 2\tau(j) - \\ &- 2(y_i - y_j)\tau_y(i) + 2(y_i - y_j)\tau_y(j) = 0,\end{aligned} \tag{44.5}$$

$$\gamma\lambda_z(j) - \sigma_z(j) + 2(y_i - y_j)\tau_z(j) = 0, \tag{44.6}$$

$$-\lambda_z(i) - \gamma\sigma_z(i) - 2(x_i - x_j)\tau_z(i) = 0, \tag{44.7}$$

$$\gamma\lambda_z(i) - \sigma_z(i) - 2(y_i - y_j)\tau_z(i) = 0. \tag{44.8}$$

Дифференцируя уравнения (44.1) и (44.2) по координате x_i, а затем по x_j, (44.2) и (44.5) – по y_i, а затем по y_j, (44.3) – по x_i, (44.7) – по x_j, получаем следующие тождества:

$$\begin{aligned}\tau_z(i) = \tau_z(j) = 0, \lambda_z(i) + \gamma\sigma_z(i) = \lambda_z(j) + \gamma\sigma_z(j) = 0,\\ \gamma\lambda_z(i) - \sigma_z(i) = \gamma\lambda_z(j) - \sigma_z(j) = 0, \tau_{xx}(i) + \tau_{xx}(j) = 0,\\ \tau_{yy}(i) + \tau_{yy}(j) = 0, \tau_{xy}(i) + \tau_{xy}(j) = 0.\end{aligned}$$

Разделяя в этой системе переменные, относящиеся к координатам различных точек, и интегрируя полученные уравнения, приходим к функциям:

$$\lambda(x, y, z) = \lambda(x, y), \quad \sigma(x, y, z) = \sigma(x, y), \quad \tau(x, y, z) = a_1 x + a_2 y + a_3.$$

Из уравнений (44.1), (44.5), (44.2), (44.4), разделяя переменные, получаем

$$\begin{aligned}\lambda_x + \gamma\sigma_x + 2\tau = 0, \quad \gamma\lambda_y - \sigma_y - 2\tau = 0,\\ \gamma\lambda_x - \sigma_x - 2a_1 y + 2a_2 x = a_4, \quad \lambda_y + \gamma\sigma_y - 2a_1 y + 2a_2 x = a_4,\end{aligned}$$

или, разрешая относительно производных λ_x, λ_y, σ_x, σ_y:

$$
\begin{aligned}
(1+\gamma^2)\lambda_x &= 2a_1(\gamma y - x) - 2a_2(y+\gamma x) - 2a_3 + \gamma a_4,\\
(1+\gamma^2)\sigma_x &= -2a_1(y+\gamma x) + 2a_2(x-\gamma y) - a_4 - 2\gamma a_3,\\
(1+\gamma^2)\lambda_y &= 2a_1(y+\gamma x) - 2a_2(x-\gamma y) + a_4 + 2\gamma a_3,\\
(1+\gamma^2)\sigma_y &= 2a_1(\gamma y - x) - 2a_2(y+\gamma x) - 2a_3 + \gamma a_4
\end{aligned}
$$

и после интегрирования:

$$
\begin{aligned}
\lambda(x,y,z) =& \frac{a_1}{1+\gamma^2}(-x^2+y^2+2\gamma xy) - \frac{a_2}{1+\gamma^2}(\gamma(x^2-y^2)+2xy) -\\
&- \frac{2a_3}{1+\gamma^2}(x-\gamma y) + \frac{a_4}{1+\gamma^2}(y+\gamma x) + a_5,\\
\sigma(x,y,z) =& -\frac{a_1}{1+\gamma^2}(\gamma(x^2-y^2)+2xy) + \frac{a_2}{1+\gamma^2}(x^2-y^2-2\gamma xy) -\\
&- \frac{2a_3}{1+\gamma^2}(y+\gamma x) - \frac{a_4}{1+\gamma^2}(x-\gamma y) + a_6,\\
\tau(x,y,z) =& a_1x + a_2y + a_3.
\end{aligned}
$$

В результате получаем базисные операторы (30).

Для метрической функции (17):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = [(x_i - x_j) - \beta(y_i - y_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = -[(x_i - x_j) - \beta(y_i - y_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = [\beta(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = -[\beta(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2]\alpha,$$

где $\alpha = 2exp[2\beta Ar(c)th\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j} + 2z_i + 2z_j]$, $\beta \geqslant 0$, $\beta \neq 1$, и потому функциональное уравнение (27) примет такой вид:

$$
\begin{aligned}
&[(x_i - x_j) - \beta(y_i - y_j)]\lambda(i) - [(x_i - x_j) - \beta(y_i - y_j)]\lambda(j) +\\
&+[\beta(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\sigma(i) - [\beta(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\sigma(j) +\\
&+[(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2]\tau(i) + [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2]\tau(j) = 0.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Продифференцируем уравнение (45) по координатам x_i, y_i, z_i, а результаты – по x_j, y_j, z_j

$$\begin{aligned}&-\lambda_x(i)-\lambda_x(j)-\beta\sigma_x(i)-\beta\sigma_x(j)-2\tau(i)-2\tau(j)-\\&-2(x_i-x_j)\tau_x(i)+2(x_i-x_j)\tau_x(j)=0,\end{aligned}$$

$$\beta\lambda_x(i)-\lambda_y(j)+\sigma_x(i)-\beta\sigma_y(j)+2(y_i-y_j)\tau_x(i)+2(x_i-x_j)\tau_y(j)=0,$$

$$-\lambda_z(j)-\beta\sigma_z(j)+2(x_i-x_j)\tau_z(j)=0,$$

$$\beta\lambda_z(j)+\sigma_z(j)-2(y_i-y_j)\tau_z(j)=0,$$

$$-\lambda_y(i)+\beta\lambda_x(j)-\beta\sigma_y(i)+\sigma_x(j)-2(x_i-x_j)\tau_y(i)-2(y_i-y_j)\tau_x(j)=0,$$

$$\begin{aligned}&\beta\lambda_y(i)+\beta\lambda_y(j)+\sigma_y(i)+\sigma_y(j)+2\tau(i)+2\tau(j)+\\&+2(y_i-y_j)\tau_y(i)-2(y_i-y_j)\tau_y(j)=0,\end{aligned}$$

$$-\lambda_z(i)-\beta\sigma_z(i)-2(x_i-x_j)\tau_z(i)=0,$$

$$\beta\lambda_z(i)+\sigma_z(i)+2(y_i-y_j)\tau_z(i)=0.$$

Далее, рассуждая точно также, как при решении функционального уравнения (43), приходим к функциям:

$$\begin{aligned}\lambda(x,y,z)=&-\frac{a_1}{1-\beta^2}(x^2+y^2-2\beta xy)+\frac{a_2}{1-\beta^2}(\beta(x^2+y^2)-2xy)-\\&-\frac{2a_3}{1-\beta^2}(x-\beta y)+\frac{a_4}{1-\beta^2}(\beta x-y)+a_5,\\\sigma(x,y,z)=&\frac{a_1}{1-\beta^2}(\beta(x^2+y^2)-2xy)-\frac{a_2}{1-\beta^2}(x^2+y^2-2\beta xy)+\\&+\frac{2a_3}{1-\beta^2}(\beta x-y)-\frac{a_4}{1-\beta^2}(x-\beta y)+a_6,\\\tau(x,y,z)=&a_1x+a_2y+a_3,\end{aligned}$$

от которых к базису алгебры Ли (31).

Приступим теперь к нахождению базисных операторов алгебры Ли группы движений, двухточечным инвариантом которой является метрическая функция (18). Поскольку

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = -\frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}\alpha, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = \frac{1}{x_i - x_j}\alpha, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = -\frac{1}{x_i - x_j}\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\alpha, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\alpha,$$

где $\alpha = exp(z_i + z_j)$, то функциональное уравнение (27) принимает вид:

$$\begin{aligned} &-(y_i - y_j)\lambda(i) + (y_i - y_j)\lambda(j) + (x_i - x_j)\sigma(i) - (x_i - x_j)\sigma(j) + \\ &+(x_i - x_j)(y_i - y_j)\tau(i) + (x_i - x_j)(y_i - y_j)\tau(j) = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Продифференцируем уравнение (46) по x_i, y_i, z_i, а результаты по x_j, y_j, z_j

$$-\sigma_x(i) - \sigma_x(j) - (y_i - y_j)\tau_x(i) + (y_i - y_j)\tau_x(j) = 0,$$

$$\lambda_x(i) - \sigma_y(j) - \tau(i) - (x_i - x_j)\tau_x(i) - \tau(j) + (y_i - y_j)\tau_y(j) = 0,$$

$$-\sigma_z(j) + (y_i - y_j)\tau_z(j) = 0, \quad \lambda_z(j) + (x_i - x_j)\tau_z(j) = 0,$$

$$\lambda_x(j) - \sigma_y(i) - \tau(i) - (y_i - y_j)\tau_y(i) - \tau(j) + (x_i - x_j)\tau_x(j) = 0,$$

$$\lambda_y(i) + \lambda_y(j) - (x_i - x_j)\tau_y(i) + (x_i - x_j)\tau_y(j) = 0,$$

$$-\sigma_z(i) - (y_i - y_j)\tau_z(i) = 0, \quad \lambda_z(i) - (x_i - x_j)\tau_z(i) = 0.$$

Рассуждая аналогично, приходим к функциям:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= a_2x^2 + (a_3 + a_4)x + a_5, \\ \sigma(x,y,z) &= -a_1y^2 + (a_3 - a_4)y + a_6, \\ \tau(x,y,z) &= a_1x + a_1y + a_3, \end{aligned}\right\}$$

а от них к операторам (32).

И, наконец, для метрической функции (19):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = [2(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = -[2(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = (x_i - x_j)\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = -(x_i - x_j)\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = (x_i - x_j)^2\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = (x_i - x_j)^2\alpha,$$

где $\alpha = exp[\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j]$, поэтому функциональное уравнение (27) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} &[2(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\lambda(i) - [2(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\lambda(j) + \\ &+ (x_i - x_j)\sigma(i) - (x_i - x_j)\sigma(j) + \\ &+ (x_i - x_j)^2\tau(i) + (x_i - x_j)^2\tau(j) = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Продифференцируем уравнение (47) по x_i, y_i, z_i, а полученные результаты по x_j, y_j, z_j

$$\begin{aligned} &-2\lambda_x(i) - 2\lambda_x(j) - \sigma_x(i) - \sigma_x 9j) - 2\tau(i) - 2\tau(j) - \\ &-2(x_i - x_j)\tau_x(i) + 2(x_i - x_j)\tau_x(j) = 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_x(i) - 2\lambda_y(j) - \sigma_y(j) + 2(x_i - x_j)\tau_y(j) = 0,$$

$$-2\lambda_z(i) - \sigma_z(i) - 2(x_i - x_j)\tau_z(i) = 0,$$

$$-2\lambda_z(j) - \sigma_z(j) + 2(x_i - x_j)\tau_z(j) = 0,$$

$$-\lambda_y(i) - \lambda_y(j) = 0, \quad \lambda_z(i) = \lambda_z(j) = 0,$$

$$-2\lambda_y(i) - \lambda_x(j) - \sigma_y(i) - 2(x_i - x_j)\tau_y(i) = 0.$$

Рассуждая также, как и при решении функционального уравнения (43), приходим к функциям:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= -a_1x^2 + a_2x + a_3, \\ \sigma(x,y,z) &= (2a_1 - a_5)x^2 - 2a_1xy - 2(a_2 + a_6)x + a_2y + a_4, \\ \tau(x,y,z) &= a_1x + a_5y + a_6, \end{aligned}\right\}$$

а затем к базисным операторам (33).

Этим доказательство первой части основной теоремы для алгебр Ли с разрешимой подалгеброй A_3 завершается.

§3. Доказательство основной теоремы для алгебр Ли с неразрешимой подалгеброй

В этом параграфе проведем доказательство для алгебр Ли групп движений, двухточечными инвариантами которых являются метрические функции (20) – (24), а подалгебра Ли A_3 неразрешима.

С учетом выражения (20) для метрической функции $f(ij)$ исходное функциональное уравнение (27) принимает такой вид:

$$y_j\lambda(i) - x_j\sigma(i) - y_i\lambda(j) + x_i\sigma(j) + \tau(i) - \tau(j) = 0. \tag{48}$$

Продифференцируем тождество (48) по координатам x_i, y_i, z_i, а результаты по координатам x_j, y_j, z_j:

$$-\sigma_x(i) + \sigma_x(j) = 0, \quad \lambda_x(i) + \sigma_y(j) = 0, \quad \lambda_z(i) = \lambda_z(j) = 0,$$

$$\sigma_z(i) = \sigma_z(j) = 0, \quad \sigma_y(i) + \lambda_x(j) = 0, \quad \lambda_y(i) - \lambda_y(j) = 0.$$

Разделяя переменные, интегрируя, возвращаясь затем в тождество (48) и снова разделяя переменные, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= a_1x + a_2y + a_4, \\ \sigma(x,y,z) &= a_3x - a_1y + a_5, \\ \tau(x,y,z) &= -a_5x + a_4y + a_6. \end{aligned}$$

Строки $(a_2, a_3, a_1.a_6, a_4, a_5)$ принадлежат шестимерному линейному пространству V^6, причем его базису (1,0,0,0,0,0,), (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0),

(0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1) будет соответствовать система базисных операторов (34).

При доказательстве теоремы для оставшихся метрических функций $f(ij)$ будет применяться одна и та же методика. Поэтому подробные рассуждения будут вестись только в отношении группы движений с метрической функцией (21).

Докажем сейчас теорему для группы движений с метрической функцией (21). Для удобства последующих вычислений эту метрическую функцию запишем в следующей форме:

$$f(ij) = \bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{y}_i\bar{y}_j + \bar{z}_i\bar{z}_j + \bar{w}_i\bar{w}_j, \tag{49}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} = sinx\ siny\ sinz, \quad \bar{y} = cosx\ siny\ sinz, \\ \bar{z} = cosy\ sinz, \quad \bar{w} = cosz, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

причем $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{w}^2 = 1$. В дальнейшем удобно ввести переобозначение координат: $\bar{x} \to x$, $\bar{y} \to y$, $\bar{z} \to z$, $\bar{w} \to w$. Тогда

$$f(ij) = x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j + w_iw_j. \tag{49'}$$

Поскольку

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = x_j - \frac{x_i}{w_i}w_j, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = x_i - \frac{x_j}{w_j}w_i, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = y_j - \frac{y_i}{w_i}w_j,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = y_i - \frac{y_j}{w_j}w_i, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = z_j - \frac{z_i}{w_i}w_j, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = z_i - \frac{z_j}{w_j}w_i,$$

функциональное уравнение (27) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\lambda(i)\frac{x_jw_i - x_iw_j}{w_i} + \sigma(i)\frac{y_jw_i - y_iw_j}{w_i} + \tau(i)\frac{z_jw_i - z_iw_j}{w_i} - \\ &- \lambda(j)\frac{x_jw_i - x_iw_j}{w_j} - \sigma(j)\frac{y_jw_i - y_iw_j}{w_j} - \tau(j)\frac{z_jw_i - z_iw_j}{w_j} = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Продифференцируем это уравнение по координатам x_i, y_i, z_i, а ре-

зультаты по координатам x_j, y_j, z_j

$$\begin{aligned}
&\lambda_x(i)\Big(1+\frac{x_ix_j}{w_iw_j}\Big)+\lambda(i)\frac{x_j(1-y_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\lambda_x(j)\Big(1+\frac{x_ix_j}{w_iw_j}\Big)+\\
&+\lambda(i)\frac{x_i(1-y_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\sigma_x(i)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{x_iy_ix_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\sigma_x(j)\frac{y_jx_i}{w_iw_j}+\sigma(j)\frac{x_iy_jx_j}{w_iw_j^3}+\tau_x(i)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{x_iz_ix_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_x(j)\frac{z_jx_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{x_iz_jx_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}\tag{52.1}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_x(i)\frac{x_iy_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{y_j(1-y_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\lambda_y(j)\Big(1+\frac{x_ix_j}{w_iw_j}\Big)+\\
&+\lambda(j)\frac{x_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\sigma_x(i)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\sigma(i)\frac{x_iy_iy_j}{w_i^3w_j}+\sigma_y(j)\frac{y_jx_i}{w_iw_j}+\\
&+\sigma(j)\frac{x_i(1-x_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\tau_x(i)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{x_iz_iy_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_y(j)\frac{z_jx_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{x_iz_jy_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}\tag{52.2}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_x(i)\frac{x_iz_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{z_j(1-y_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\lambda_z(j)\Big(1+\frac{x_ix_j}{w_iw_j}\Big)+\\
&+\lambda(j)\frac{x_ix_jz_j}{w_iw_j^3}+\sigma_x(i)\frac{y_iz_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{x_iy_iz_j}{w_i^3w_j}+\sigma_z(j)\frac{y_jx_i}{w_iw_j}+\\
&+\sigma(j)\frac{x_iy_jz_j}{w_iw_j^3}+\tau_x(i)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(i)\frac{x_iz_iz_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_z(j)\frac{z_jx_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{x_i(1-x_j^2-y_j^2)}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}\tag{52.3}$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_y(i)\Big(1+\frac{x_ix_j}{w_iw_j}\Big)+\lambda(i)\frac{x_iy_ix_j}{w_i^3w_j}+\lambda_x(j)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\\
&+\lambda(j)\frac{y_i(1-y_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\sigma_y(i)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{x_j(1-x_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\\
&+\sigma_x(j)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)++\sigma(j)\frac{y_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\tau_y(i)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{y_iz_ix_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_x(j)\frac{z_jy_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{y_ix_jz_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_y(i)\frac{x_iy_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{x_iy_iy_j}{w_i^3w_j}+\lambda_y(j)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\lambda(j)\frac{y_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\\
&+\sigma_y(i)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\sigma(i)\frac{y_j(1-x_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\sigma_y(j)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\\
&+\sigma(j)\frac{y_i(1-x_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\tau_y(i)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{y_iz_iy_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_y(j)\frac{z_jy_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{y_iy_jz_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_y(i)\frac{x_iz_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{x_iy_iz_j}{w_i^3w_j}+\lambda_z(j)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\lambda(j)\frac{y_ix_jz_j}{w_iw_j^3}+\\
&+\sigma_y(i)\frac{y_iz_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{z_j(1-x_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\sigma_z(j)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\\
&+\sigma(j)\frac{y_iy_jz_j}{w_iw_j^3}+\tau_y(i)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(i)\frac{y_iz_iz_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_z(j)\frac{z_jy_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{y_i(1-x_j^2-y_j^2)}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_z(i)\Big(1+\frac{x_ix_j}{w_iw_j}\Big)+\lambda(i)\frac{x_iz_ix_j}{w_i^3w_j}+\lambda_x(j)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\\
&+\lambda(j)\frac{z_i(1-y_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\sigma_z(i)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{y_iz_ix_j}{w_i^3w_j}+\sigma_x(j)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\\
&+\sigma(j)\frac{z_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\tau_z(i)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{x_j(1-x_i^2-y_i^2)}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_x(j)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(j)\frac{z_ix_jz_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_z(i)\frac{x_iy_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{x_iz_iy_j}{w_i^3w_j}+\lambda_y(j)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\\
&+\lambda(j)\frac{z_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\sigma_z(i)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\sigma(i)\frac{y_iz_iy_j}{w_i^3w_j}+\sigma_y(j)\frac{y_iz_j}{w_iw_j}+\\
&+\sigma(j)\frac{z_i(1-x_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\tau_z(i)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{y_j(1-x_i^2-y_i^2)}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_y(j)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(j)\frac{z_iy_jz_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_z(i)\frac{x_iz_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{x_iz_iz_j}{w_i^3w_j}+\lambda_z(j)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\\
&+\lambda(j)\frac{z_ix_jz_j}{w_iw_j^3}+\sigma_z(i)\frac{y_iz_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{y_iz_iz_j}{w_i^3w_j}+\sigma_z(j)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\\
&+\sigma(j)\frac{z_iy_jz_j}{w_iw_j^3}+\tau_z(i)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(i)\frac{z_j(1-x_i^2-y_i^2)}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_z(j)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(j)\frac{z_i(1-x_j^2-y_j^2)}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.9}
$$

Умножим (52.1) на w_iw_j/x_ix_j, (52.2) – на w_iw_j/x_iy_j, (52.3) – на w_iw_j/x_iz_j, (52.4) – на w_iw_j/y_ix_j, (52.5) – на w_iw_j/y_iy_j, (52.6) – на

w_iw_j/y_iz_j, (52.7) – на w_iw_j/z_ix_j, (52.8) – на w_iw_j/z_iy_j, (52.9) – на w_iw_j/z_iz_j:

$$\Big(1+\frac{w_iw_j}{x_ix_j}\Big)\lambda_x(i)+\frac{1-y_i^2-z_i^2}{x_iw_i^2}\lambda(i)+\Big(1+\frac{w_iw_j}{x_ix_j}\Big)\lambda_x(j)+$$
$$+\frac{1-y_j^2-z_j^2}{x_jw_j^2}\lambda(j)+\frac{y_i}{x_i}\sigma_x(i)+\frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i)+\frac{y_j}{x_j}\sigma_x(j)+\frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j)+$$
$$+\frac{z_i}{x_i}\tau_x(i)+\frac{z_i}{w_i^2}\tau(i)+\frac{z_j}{x_j}\tau_x(j)+\frac{z_j}{w_j^2}\tau(j)=0, \tag{53.1}$$

$$\lambda_x(i)+\frac{1-y_i^2-z_i^2}{x_iw_i^2}\lambda(i)+\frac{w_iw_j+x_ix_j}{x_iy_j}\lambda_y(j)+\frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j)+$$
$$+\frac{w_iw_j+y_iy_j}{x_iy_j}\sigma_x(i)+\frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i)+\sigma_y(j)+\frac{1-x_j^2-z_j^2}{y_jw_j^2}\sigma(j)+ \tag{53.2}$$
$$+\frac{z_i}{x_i}\tau_x(i)+\frac{z_i}{w_i^2}\tau(i)+\frac{z_j}{y_j}\tau_y(j)+\frac{z_j}{w_j^2}\tau(j)=0,$$

$$\lambda_x(i)+\frac{1-y_i^2-z_i^2}{x_iw_i^2}\lambda(i)+\frac{w_iw_j+x_ix_j}{x_iz_j}\lambda_z(j)+\frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j)+$$
$$+\frac{y_i}{x_i}\sigma_x(i)+\frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i)+\frac{y_j}{z_j}\sigma_z(j)+\frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j)+ \tag{53.3}$$
$$+\frac{w_iw_j+z_iz_j}{w_iw_j}\tau_x(i)+\frac{z_i}{w_i^2}\tau(i)+\tau_z(j)+\frac{1-x_j^2-y_j^2}{z_jw_j^2}\tau(j)=0,$$

$$\frac{w_iw_j+x_ix_j}{w_iw_j}\lambda_y(i)+\frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i)+\lambda_x(j)+\frac{1-y_j^2-z_j^2}{x_jw_j^2}\lambda(j)+$$
$$+\sigma_y(i)+\frac{1-x_i^2-z_i^2}{y_iw_i^2}\sigma(i)+\frac{w_iw_j+y_iy_j}{y_ix_j}\sigma_x(j)+\frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j)+ \tag{53.4}$$
$$+\frac{z_i}{y_i}\tau_y(i)+\frac{z_i}{w_i^2}\tau(i)+\frac{z_j}{x_j}\tau_x(j)+\frac{z_j}{w_j^2}\tau(j)=0,$$

$$\frac{x_i}{y_i}\lambda_y(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \frac{x_j}{y_j}\lambda_y(j) + \frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j) +$$
$$+ \Big(1 + \frac{w_i w_j}{y_i y_j}\Big)\sigma_y(i) + \frac{1 - x_i^2 - z_i^2}{y_i w_i^2}\sigma(i) + \Big(1 + \frac{w_i w_j}{y_i y_j}\Big)\sigma_y(j) + \tag{53.5}$$
$$+ \frac{1 - x_j^2 - z_j^2}{y_j w_j^2}\sigma(j) + \frac{z_i}{y_i}\tau_y(i) + \frac{z_i}{w_i^2}\tau(i) + \frac{z_j}{y_j}\tau_y(j) + \frac{z_j}{w_j^2}\tau(j) = 0,$$

$$\frac{x_i}{y_i}\lambda_y(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \frac{x_j}{z_j}\lambda_z(j) + \frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j) +$$
$$+ \sigma_y(i) + \frac{1 - x_i^2 - z_i^2}{y_i w_i^2}\sigma(i) + \frac{w_i w_j + y_i y_j}{y_i z_j}\sigma_z(j) + \frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j) + \tag{53.6}$$
$$+ \frac{w_i w_j + z_i z_j}{y_i z_j}\tau_y(i) + \frac{z_i}{w_i^2}\tau(i) + \tau_z(j) + \frac{1 - x_j^2 - y_j^2}{z_j w_j^2}\tau(j) = 0,$$

$$\frac{w_i w_j + x_i x_j}{z_i x_j}\lambda_z(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \lambda_x(j) + \frac{1 - y_j^2 - z_j^2}{x_j w_j^2}\lambda(j) +$$
$$+ \frac{y_i}{z_i}\sigma_z(i) + \frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i) + \frac{y_j}{x_j}\sigma_x(j) + \frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j) + \tag{53.7}$$
$$+ \tau_z(i) + \frac{1 - x_i^2 - y_i^2}{z_i w_i^2}\tau(i) + \frac{w_i w_j + z_i z_j}{z_i x_j}\tau_x(j) + \frac{z_j}{w_j^2}\tau(j) = 0,$$

$$\frac{x_i}{z_i}\lambda_z(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \frac{x_j}{y_j}\lambda_y(j) + \frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j) +$$
$$+ \frac{w_i w_j + y_i y_j}{z_i y_j}\sigma_z(i) + \frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i) + \sigma_y(j) + \frac{1 - x_j^2 - z_j^2}{y_j w_j^2}\sigma(j) + \tag{53.8}$$
$$+ \tau_z(i) + \frac{1 - x_i^2 - y_i^2}{y_i w_i^2}\tau(i) + \frac{w_i w_j + z_i z_j}{z_i y_j}\tau_y(j) + \frac{z_j}{w_j^2}\tau(j) = 0,$$

$$\frac{x_i}{z_i}\lambda_z(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \frac{x_j}{z_j}\lambda_z(j) + \frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j) +$$
$$+ \frac{y_i}{z_i}\sigma_z(i) + \frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i) + \frac{y_j}{z_j}\sigma_z(j) + \frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j) + \Big(1 + \frac{w_i w_j}{z_i z_j}\Big)\tau_z(i) + \tag{53.9}$$
$$+ \frac{1 - x_i^2 - y_i^2}{z_i w_i^2}\tau(i) + \Big(1 + \frac{w_i w_j}{z_i z_j}\Big)\tau_z(j) + \frac{1 - x_j^2 - y_j^2}{z_j w_j^2}\tau(j) = 0,$$

Продифференцируем (53.1) сначала по y_i и y_j, а затем по z_i и z_j, (53.5) – сначала по x_i и x_j, а затем по z_i и z_j, (53.9) – сначала по x_i и x_j, а затем по y_i и y_j:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_x(i) - \frac{w_i^2}{y_i}\lambda_{xy}(i) + \lambda_x(j) - \frac{w_j^2}{y_j}\lambda_{xy}(j) = 0, \\ &\lambda_x(i) - \frac{w_i^2}{z_i}\lambda_{xz}(i) + \lambda_x(j) - \frac{w_j^2}{z_j}\lambda_{xz}(j) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{54.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_y(i) - \frac{w_i^2}{x_i}\sigma_{yx}(i) + \sigma_y(j) - \frac{w_j^2}{x_j}\sigma_{yx}(j) = 0, \\ &\sigma_y(i) - \frac{w_i^2}{z_i}\sigma_{yz}(i) + \sigma_y(j) - \frac{w_j^2}{z_j}\sigma_{yz}(j) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{54.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tau_z(i) - \frac{w_i^2}{x_i}\tau_{zx}(i) + \tau_z(j) - \frac{w_j^2}{x_j}\tau_{zx}(j) = 0, \\ &\tau_z(i) - \frac{w_i^2}{y_i}\tau_{zy}(i) + \tau_z(j) - \frac{w_j^2}{y_j}\tau_{zy}(j) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54.3}$$

Разделяя в системах (54.1) – (54.3) переменные, относящиеся к координатам различных точек, получаем:

$$\lambda_x - \frac{w^2}{y}\lambda_{xy} = 0, \quad \lambda_x - \frac{w^2}{z}\lambda_{xz} = 0, \quad \sigma_y - \frac{w^2}{x}\sigma_{yx} = 0,$$
$$\sigma_y - \frac{w^2}{z}\sigma_{yz} = 0, \quad \tau_z - \frac{w^2}{x}\tau_{zx} = 0, \quad \tau_z - \frac{w^2}{y}\tau_{zy} = 0.$$

Интегрируя эту систему дифференциальных уравнений, находим:

$$\lambda_x = \frac{c_1(x)}{w}, \quad \sigma_y = \frac{c_2(y)}{w}, \quad \tau_z = \frac{c_3(z)}{w}. \tag{55}$$

Продифференцируем (53.2) по y_i и x_j, (53.3) – по z_i и x_j, (53.4) – по

x_i и y_j, (53.6) – по z_i и y_j, (53.7) – по x_i и z_j, (53.8) – по y_i и z_j:

$$\lambda_y(j) - \frac{w_j^2}{x_j}\lambda_{yx}(j) + \sigma_x(i) - \frac{w_i^2}{y_i}\sigma_{xy}(i) = 0,$$
$$\lambda_z(j) - \frac{w_j^2}{x_j}\lambda_{zx}(j) + \tau_x(i) - \frac{w_i^2}{z_i}\tau_{xz}(i) = 0,$$
$$\lambda_y(i) - \frac{w_i^2}{x_i}\lambda_{xy}(i) + \sigma_x(j) - \frac{w_j^2}{y_j}\sigma_{xy}(j) = 0,$$
$$\sigma_z(j) - \frac{w_j^2}{y_j}\sigma_{zy}(j) + \tau_y(i) - \frac{w_i^2}{z_i}\tau_{yz}(i) = 0,$$
$$\lambda_z(i) - \frac{w_i^2}{x_i}\lambda_{zx}(i) + \tau_x(j) - \frac{w_j^2}{z_j}\tau_{xz}(j) = 0,$$
$$\sigma_z(i) - \frac{w_i^2}{y_i}\sigma_{zy}(i) + \tau_y(j) - \frac{w_j^2}{z_j}\tau_{yz}(j) = 0.$$

Разделяя переменные, приходим к уравнениям:

$$\lambda_y - \frac{w^2}{x}\lambda_{yx} = a_1, \quad \sigma_x - \frac{w^2}{y}\sigma_{xy} = -a_1, \quad \lambda_z - \frac{w^2}{x}\lambda_{zx} = a_2,$$
$$\tau_x - \frac{w^2}{z}\tau_{xz} = -a_2, \quad \sigma_z - \frac{w^2}{y}\sigma_{zy} = a_3, \quad \tau_y - \frac{w^2}{z}\tau_{yz} = -a_3.$$

Учитывая (55), от последней системы приходим к следующей:

$$\lambda_y = a_1 + \frac{y}{x}\frac{c_1(x)}{w}, \quad \lambda_z = a_2 + \frac{z}{x}\frac{c_1(x)}{w},$$
$$\sigma_x = -a_1 + \frac{x}{y}\frac{c_2(y)}{w}, \quad \sigma_z = a_3 + \frac{z}{y}\frac{c_2(y)}{w},$$
$$\tau_x = -a_2 + \frac{x}{z}\frac{c_3(z)}{w}, \quad \tau_y = -a_3 + \frac{y}{z}\frac{c_3(z)}{w},$$

интегрируя которую, получаем

$$\lambda(x,y,z) = a_1 y + a_2 z - \frac{c_1(x)}{x}w + c_4(x),$$
$$\sigma(x,y,z) = -a_1 x + a_3 z - \frac{c_2(y)}{y}w + c_5(y),$$
$$\tau(x,y,z) = -a_2 x - a_3 y - \frac{c_3(z)}{z}w + c_6(z).$$

Дифференцируя λ по x, σ по y, τ по z и учитывая (55), получаем $c_4' = c_5' = c_6' = 0$, $(c_1/x)' = 0$, $(c_2/y)' = 0$, $(c_3/z)' = 0$ и поэтому

$$\begin{aligned}
\lambda(x,y,z) &= a_1 y + a_2 z + a_4 w + a_7\,,\\
\sigma(x,y,z) &= -a_1 x + a_3 z + a_5 w + a_8\,,\\
\tau(x,y,z) &= -a_2 x - a_3 y + a_6 w + a_9\,.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в исходное функциональное уравнение (51), устанавливаем, что $a_7 = a_8 = a_9 = 0$ и после возвращения к прежним обозначениям координат $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{w}$, окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= a_1\bar{y} + a_2\bar{z} + a_4\bar{w},\\
\sigma(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_1\bar{x} + a_3\bar{z} + a_5\bar{w},\\
\tau(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_2\bar{x} - a_3\bar{y} + a_6\bar{w},
\end{aligned}$$

где, напомним, $\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2+\bar{w}^2 = 1$. Поэтому мы имеем такие операторы:

$$\begin{aligned}
&X_1 = -\bar{y}\partial_{\bar{x}} + \bar{x}\partial_{\bar{y}}, \quad X_2 = -\bar{z}\partial_{\bar{x}} + \bar{x}\partial_{\bar{z}},\\
&X_3 = -\bar{z}\partial_{\bar{y}} + \bar{y}\partial_{\bar{z}}, \quad X_4 = \bar{w}\partial_{\bar{x}}, \quad X_5 = \bar{w}\partial_{\bar{y}}, \quad X_6 = \bar{w}\partial_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

В этих операторах переходя к координатам x, y, z, получаем выражения (35).

Замена координат

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x} = sinx\ siny\ chz, \quad \bar{y} = cosx\ siny\ chz,\\
\bar{z} = cosy\ chz, \quad \bar{w} = shz,
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

где $\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2-\bar{w}^2 = 1$, позволяет метрическую функцию (22) записать в компактном виде

$$f(ij) = \bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{y}_i\bar{y}_j + \bar{z}_i\bar{z}_j - \bar{w}_i\bar{w}_j\,. \tag{57}$$

Исходное функциональное уравнение (27) примет тогда такой вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda(i)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i - \bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} + \sigma(i)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i - \bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} + \tau(i)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i - \bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} -\\
&\lambda(j)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i - \bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} - \sigma(j)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i - \bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} - \tau(j)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i - \bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} = 0.
\end{aligned} \tag{58}$$

Далее, повторяя рассуждения, использованные при решении функционального уравнения (51), находим функции:

$$\begin{aligned}
\lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= a_1\bar{y} + a_2\bar{z} + a_4\bar{w},\\
\sigma(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_1\bar{x} + a_3\bar{z} + a_5\bar{w},\\
\tau(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_2\bar{x} - a_3\bar{y} + a_6\bar{w},
\end{aligned}$$

где, напомним, $\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2-\bar{w}^2=1$. Тогда мы приходим к операторам

$$X_1=-\bar{y}\partial_{\bar{x}}+\bar{x}\partial_{\bar{y}},\quad X_2=-\bar{z}\partial_{\bar{x}}+\bar{x}\partial_{\bar{z}},$$
$$X_3=-\bar{z}\partial_{\bar{y}}+\bar{y}\partial_{\bar{z}},\quad X_4=\bar{w}\partial_{\bar{x}},\quad X_5=\bar{w}\partial_{\bar{y}},\quad X_6=\bar{w}\partial_{\bar{z}}.$$

В этих операторах переходя по формулам (56) к прежним координатам x, y, z, получаем для них выражения (36).

Приступим теперь к нахождению базисных операторов алгебры Ли группы движений, двухточечным инвариантом которой является метрическая функция (23). Введем новые координаты

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}=sinx\ chy\ chz,\quad \bar{y}=cosx\ chy\ chz,\\ \bar{z}=shy\ chz,\quad \bar{w}=shz,\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

где $\bar{x}^2+\bar{y}^2-\bar{z}^2-\bar{w}^2=1$. Тогда метрическая функция (23) примет такой вид:

$$f(ij)=\bar{x}_i\bar{x}_j+\bar{y}_i\bar{y}_j-\bar{z}_i\bar{z}_j-\bar{w}_i\bar{w}_j.\tag{60}$$

Для исходного функционального уравнения (27) имеем:

$$\begin{aligned}&\lambda(i)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i-\bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i}+\sigma(i)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i-\bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i}-\tau(i)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i-\bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i}-\\ &-\lambda(j)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i-\bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j}-\sigma(j)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i-\bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j}+\tau(j)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i-\bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j}=0.\end{aligned}\tag{61}$$

Рассуждая так же, как при решении уравнения (51), приходим к следующим выражениям для козффициентов λ, σ, τ:

$$\begin{aligned}\lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{z})&=-a_1\bar{y}+a_2\bar{z}+a_4\bar{w},\\ \sigma(\bar{x},\bar{y},\bar{z})&=a_1\bar{x}+a_3\bar{z}+a_5\bar{w},\\ \tau(\bar{x},\bar{y},\bar{z})&=a_2\bar{x}+a_3\bar{y}+a_6\bar{w}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$X_1=-\bar{y}\partial_{\bar{x}}+\bar{x}\partial_{\bar{y}},\quad X_2=\bar{z}\partial_{\bar{x}}+\bar{x}\partial_{\bar{z}},$$
$$X_3=\bar{z}\partial_{\bar{y}}+\bar{y}\partial_{\bar{z}},\quad X_4=\bar{w}\partial_{\bar{x}},\quad X_5=\bar{w}\partial_{\bar{y}},\quad X_6=\bar{w}\partial_{\bar{z}}.$$

Переходя по формулам (59) к прежним координатам x, y, z, будем иметь операторы (37).

С помощью замены координат

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} = sinx\ siny\ shz, \quad \bar{y} = cosx\ siny\ shz, \\ \bar{z} = cosy\ shz, \quad \bar{w} = chz, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

где $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{w}^2 = -1$, метрическая функция (24) записывается в более удобном для решения нашей задачи виде

$$f(ij) = \bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{y}_i\bar{y}_j + \bar{z}_i\bar{z}_j - \bar{w}_i\bar{w}_j. \tag{63}$$

Тогда уравнение (27) примет такой вид:

$$\begin{aligned} &\lambda(i)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i - \bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} + \sigma(i)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i - \bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} + \tau(i)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i - \bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} - \\ &- \lambda(j)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i - \bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} - \sigma(j)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i - \bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} - \tau(j)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i - \bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Решая уравнение (64) точно так же, как и уравнение (51), получаем коэффициенты:

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_1\bar{y} - a_2\bar{z} + a_4\bar{w}, \\ \sigma(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= a_1\bar{x} - a_3\bar{z} + a_5\bar{w}, \\ \tau(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= a_2\bar{x} + a_3\bar{y} + a_6\bar{w} \end{aligned}$$

и соответствующие базисные операторы:

$$\begin{aligned} &X_1 = -\bar{y}\partial\bar{x} + \bar{x}\partial\bar{y}, \quad X_2 = -\bar{z}\partial\bar{x} + \bar{x}\partial\bar{z}, \\ &X_3 = -\bar{z}\partial\bar{y} + \bar{y}\partial\bar{z}, \quad X_4 = \bar{w}\partial\bar{x}, \quad X_5 = \bar{w}\partial\bar{y}, \quad X_6 = \bar{w}\partial\bar{z}. \end{aligned}$$

Переходя к прежним координатам по формулам (62), получаем операторы (38).

Этим утверждением полностью завершается доказательство основной теоремы.

Литература

1. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии//Докл. АН СССР. 1981. Т.260,№4. С. 803-805.

2. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур// Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. Вып. 125. С.90-103.

3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.