Комплексная физическая структура ранга (2,2)

А.А.Литвинцев

Одним из возможных вариантов обобщения понятия физической структуры, является их комплексификация, когда двум точкам из разных множеств сопоставляется не действительное, а комплексное число. С другой стороны, комплексные физические структуры положены в основу нового направления - бинарной геометрофизики, - целью которой является построение единой теории пространства-времени и физических взаимодействий [1, 2].

В данной работе рассматривается комплексная физическая структура ранга (2,2) и для нее формулируется и функциональным методом [3] доказывается теорема существования и единственности. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть имеются два одномерных комплексных многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, элементы которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, и голоморфная функция $f : \mathfrak{S}_f \longrightarrow \mathbb{C}$, сопоставляющая каждой паре $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{S}_f$ некоторое комплексное число $f(i\alpha) \in \mathbb{C}$, где $\mathfrak{S}_f$ открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.

Для некоторых точек $\gamma \in \mathfrak{N}$ и $k \in \mathfrak{M}$ введем функции $f^1 = f[\gamma]$ и $f^2 = f[\,k\,]$, сопоставляя точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ точки $f(i\gamma) \in \mathbb{C}$ и $f(k\alpha) \in \mathbb{C}$, если пары $\langle i\gamma \rangle$ и $\langle k\alpha \rangle$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Функции f^1 и f^2 определены на некоторых подмножествах в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Будем предполагать, что выполняется следующая

Аксиома I. *В $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ существуют плотные множества точек γ и k, для каждой из которых ранги отображений f^1 и f^2 равны единице для плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств точек i и α соответственно.*

Введем еще отображение $F : \mathfrak{S}_F \longrightarrow \mathbb{C}^4$, сопоставляя кортежу $\langle ij, \alpha\beta \rangle \in \mathfrak{S}_F$ точку $F(\langle ij, \alpha\beta \rangle) = (f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) \in \mathbb{C}^4$, где $\mathfrak{S}_F = \{\langle ij\alpha\beta \rangle : \langle i\alpha \rangle, \langle i\beta \rangle, \langle j\alpha \rangle, \langle j\beta \rangle \in \mathfrak{S}_f\}$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ множество. Отображение F будет голоморфным, поскольку голоморфна каждая его компонента.

Определение 1. *Будем говорить, что голоморфная функция f задает на двух одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ комплексную физическую структуру ранга (2,2), если, кроме аксиомы I, дополнительно имеет место следующая*

Аксиома II. *Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle ij, \alpha\beta \rangle$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle ij, \alpha\beta \rangle)$ найдется такая голоморфная функция $\Phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}^4$, содержащей точку $F(\langle ij, \alpha\beta \rangle)$, что в ней $grad\, \Phi \neq 0$ и выполняется условие*

$$\Phi\,(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0 \tag{1}$$

для любого кортежа из $U(\langle ij, \alpha\beta \rangle)$.

В некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$ каждой пары $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{S}_f$ существуют системы локальных комплексных координат z и ξ, в которых для исходной функции

f мы можем записать следующее локальное координатное представление:

$$f(i\alpha) = f(z(i), \xi(\alpha)) \ , \tag{2}$$

свойства которого определяются аксиомой I. Поскольку ранги отображений f^1 и f^2 равны единице, координаты z и ξ входят в представление (2) существенным образом. Последнее означает, что никакая локальная биголоморфная замена координат не приведет к уменьшению их числа, то есть представление (2) невозможно записать, например, в виде $f(i\alpha) = f(\xi(\alpha))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ есть комплексные многообразия. Будем говорить, что голоморфные функции $f : \mathfrak{S}_f \longrightarrow \mathbb{C}$ и $g : \mathfrak{S}_g \longrightarrow \mathbb{C}$ с открытыми и плотными в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ областями определения $\mathfrak{S}_f$ и $\mathfrak{S}_g$ эквивалентны, если существуют такие локальные биголоморфные отображения $\lambda : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$, $\sigma : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$ и $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, что для открытого и плотного в $\mathfrak{S}_f$ множества пар $\langle i\alpha \rangle$ пара $\langle \lambda(i), \sigma(\alpha) \rangle$ принадлежит $\mathfrak{S}_g$ и имеет место соотношение*

$$f(i\alpha) = \psi\left(g\left(\lambda(i), \sigma(\alpha)\right)\right) .$$

ТЕОРЕМА. *Если функция f задает на многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ комплексную физическую структуру ранга (2,2), то для некоторого открытого и плотного в $\mathfrak{S}_F \subset \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ множества кортежей $\langle ij, \alpha\beta \rangle$ с точностью до эквивалентности локальное координатное представление (2) и функциональная связь (1) могут быть записаны в следующей канонической форме :*

$$f(i\alpha) = z(i) + \xi(\alpha) \ , \tag{3}$$

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0 \ . \tag{4}$$

Перейдем к последовательному доказательству сформулированной выше теоремы.

Согласно аксиоме II $grad\,\Phi \neq 0$ в точке $F(\langle ij, \alpha\beta \rangle)$ для некоторого плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей $\langle ij, \alpha\beta \rangle$. А это означает, что в точке $F(\langle ij, \alpha\beta \rangle)$ отлична от нуля хотя бы одна из частных производных функции Φ, которая определена в некоторой окрестности $\mathcal{E} \ni F(\langle ij, \alpha\beta \rangle)$ и голоморфна в ней. Без ограничения общности можно предположить, что в данной точке отлична от нуля производная функции Φ по первому аргументу $f(i\alpha)$. Но тогда согласно теореме [4, Ч.II,С.57] найдутся такие окрестности H и V точек $f(i\alpha) \in \mathbb{C}$ и $(f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) \in \mathbb{C}^3$, что уравнение (1) может быть однозначно разрешено относительно $f(i\alpha)$ в окрестности $H \times V \subset \mathcal{E}$ исходной точки $F(\langle ij, \alpha\beta \rangle) \in \mathbb{C}^4$:

$$f(i\alpha) = \Gamma\left(f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)\right) , \tag{5}$$

причем функция Γ голоморфна и определена в окрестности V. Ясно, что уравнение (5) выполняется не только для кортежа $\langle ij, \alpha\beta \rangle$, но и для некоторой его окрестности $U(\langle ij, \alpha\beta \rangle)$, в силу голоморфности фунуции F. Окрестности H и V выберем такие, чтобы производная функции Φ по первому аргументу $f(i\alpha)$ всюду в окрестности $H \times V$ была отлична от нуля и $F(U(\langle ij, \alpha\beta \rangle)) \subset H \times V$.

ЛЕММА 1. *Проекция множества $F(U(\langle ij, \alpha\beta \rangle))$ на окрестность $V \subset \mathbb{C}^3$ содержит открытое в V подмножество.*

Рассмотрим матрицу Якоби системы функций $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, входящих в правую часть уравнения (5) :

$$\begin{pmatrix} \partial f(i\beta)/\partial z(i) & 0 & 0 & \partial f(i\beta)/\partial \xi(\beta) \\ 0 & \partial f(j\alpha)/\partial z(j) & \partial f(j\alpha)/\partial \xi(\alpha) & 0 \\ 0 & \partial f(j\beta)/\partial z(j) & 0 & \partial f(j\beta)/\partial \xi(\beta) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В матрице (6) имеется определитель третьего порядка, по диагонали которого расположены производные $\partial f(i\beta)/\partial z(i)$, $\partial f(j\alpha)/\partial \xi(\alpha)$, $\partial f(j\beta)/\partial \xi(\beta)$, тождественно не обращающиеся в нуль, поскольку координаты z и ξ входят в представление (2) существенным образом. Произведение перечисленных производных дает значение указанного определителя, которое тоже тождественно не обращается в нуль в окрестности $U(\langle ij, \alpha\beta\rangle)$. Следовательно, в этой окрестности найдется такой кортеж $\langle i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1\rangle$, для которого ранг матрицы Якоби системы функций $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, а также и полной матрицы, содержащей дополнительную строку:

$$\begin{pmatrix} \partial f(i\alpha)/\partial z(i) & 0 & \partial f(i\alpha)/\partial \xi(\alpha) & 0 \end{pmatrix},$$

равен трем. Но тогда, поскольку функции f системы $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$ голоморфны, для некоторой его окрестности $U_1(\langle i_1 j_1, \alpha_1\beta_1\rangle) \subset U(\langle ij, \alpha\beta\rangle)$ проекция множества $F(U_1(\langle i_1 j_1, \alpha_1\beta_1\rangle))$ на V есть открытое в V подмножество. Лемма доказана.

Не усложняя обозначений, будем считать, что именно проекция множества $U(\langle ij, \alpha\beta\rangle)$ на V является открытым в V подмножеством.

Следствие. *Функции системы $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, входящие в правую часть уравнения (5), могут рассматриваться как независимые переменные функции Γ.*

Лемма 2. *В окрестности $U(\langle ij, \alpha\beta\rangle)$ кортежа $\langle ij, \alpha\beta\rangle$ найдется такой кортеж $\langle i_1 j_1, \alpha_1\beta_1\rangle$ и такая его окрестность $U_1(\langle i_1 j_1, \alpha_1\beta_1\rangle) \subset U(\langle ij, \alpha\beta\rangle)$, что на проекции множества $F(U_1(\langle i_1 j_1, \alpha_1\beta_1\rangle))$ в V все производные функции Γ, входящей в правую часть уравнения (5), по переменным $f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)$ одновременно отличны от нуля.*

Предположим противное, то есть, что для всех кортежей из $U(\langle ij, \alpha\beta\rangle)$ и, следовательно, во всех точках открытой в V проекции множества $F(U(\langle ij, \alpha\beta\rangle))$ на V, например, производная функции Γ по переменной $f(i\beta)$ обращается в нуль. То есть на этом открытом множестве $\partial\Gamma/\partial f(i\beta) \equiv 0$ и функция Γ не зависит от переменной $f(i\beta)$:

$$f(i\alpha) = \Gamma_1\left(f(j\alpha), f(j\beta)\right) \tag{5$'$}$$

Но это невозможно, так как тогда тождественно обращается в нуль производная функции $f(i\alpha)$ по переменной $z(i)$, что, очевидно, приводит к противоречию с аксиомой I. Установленное противоречие доказывает лемму относительно переменной $f(i\beta)$.

Не усложняя обозначений, будем считать, что производная функции Γ по переменной $f(i\beta)$ отлична от нуля во всех точках открытой в V проекции множества $F(U(\langle ij, \alpha\beta\rangle))$ на V.

Совершенно аналогично, доказывается, что отлична от нуля производная функции Γ также и по переменной $f(j\alpha)$.

Подобно предыдущему, будем считать, что производная функции Γ во всех точках открытой в V проекции множества $F(U(\langle ij,\alpha\beta\rangle))$ на V отлична от нуля по переменной $f(i\beta)$ и по переменной $f(j\alpha)$ одновременно.

Докажем также, что производная функции Γ и по переменной $f(j\beta)$ не обращается в нуль тождественно. Предположим противное, то есть что $\partial\Gamma/\partial f(j\beta)\equiv 0$, и поэтому

$$f(i\alpha)=\Gamma_2\left(f(i\beta),f(j\alpha)\right) \tag{7}$$

Так как $\partial\Gamma_2/\partial f(i\beta)\neq 0$, то по теореме [4, Ч.II,С.57] уравнение (7) может быть локально однозначно разрешено относительно переменной $f(i\beta)$:

$$f(i\beta)=\Gamma_3\left(f(i\alpha),f(j\alpha)\right),$$

и мы снова приходим к противоречию с аксиомой I, так как, очевидно, тождественно обращается в нуль производная функции $f(i\beta)$ по переменной $\xi(\beta)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *В окрестности $U(\langle ij,\alpha\beta\rangle)$ кортежа $\langle ij,\alpha\beta\rangle$ найдется такой кортеж $\langle i_1j_1,\alpha_1\beta_1\rangle$ и такая его окрестность $U_1(\langle i_1j_1,\alpha_1\beta_1\rangle)\subset U(\langle ij,\alpha\beta\rangle)$, что производные функции Φ из уравнения (1) по всем переменным $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$ одновременно отличны от нуля.*

Производные функции Γ выражаются известным образом через производные функции Φ. Например,

$$\partial\Gamma/\partial f(i\beta)=-\frac{\partial\Phi/\partial f(i\beta)}{\partial\Phi/\partial f(i\alpha)}\,.$$

Поскольку $\partial\Phi/\partial f(i\alpha)\neq 0$, производные функции Φ и Γ одновременно либо отличны от нуля, либо равны нулю. Между множеством $F(U_1(\langle i_1j_1,\alpha_1\beta_1\rangle))$, о котором говорится в лемме 2, и его проекцией в V существует, очевидно, взаимно однозначное соответствие.

Поэтому во всех точках множества $F(U_1(\langle i_1j_1,\alpha_1\beta_1\rangle))$ одновременно не обращаются в нуль производные функции Φ по переменным $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$. Учитывая также, что $\partial\Phi/\partial f(i\alpha)\neq 0$ всюду в $F(U_1(\langle i_1j_1,\alpha_1\beta_1\rangle))$, приходим к доказательству леммы 3.

Опять, не вводя новых обозначений, будем считать, что все производные функции Φ отличны от нуля на множестве $F(U(\langle ij,\alpha\beta\rangle))$ для плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей $\langle ij,\alpha\beta\rangle$. В результате имеет место следующая заключительная

Лемма 4. *Существует открытое и плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество таких кортежей $\langle ij,\alpha\beta\rangle$, что в соответствующей точке $F(\langle ij,\alpha\beta\rangle)$ все первые частные производные функции Φ из уравнения (1) одновременно отличны от нуля.*

Запишем уравнение (1) для кортежей $\langle gi,\alpha\beta\rangle$ и $\langle gj,\alpha\beta\rangle$ из множества, о котором говорится в лемме 4, и разрешим их относительно переменной $f(g\alpha)$:

$$f(g\alpha)=\Gamma\left(f(g\beta),f(i\alpha),f(i\beta)\right),$$

$$f(g\alpha)=\Gamma\left(f(g\beta),f(j\alpha),f(j\beta)\right),$$

откуда, приравнивая правые части, получим соотношение

$$\Gamma\left(f(g\beta),f(i\alpha),f(i\beta)\right)=\Gamma\left(f(g\beta),f(j\alpha),f(j\beta)\right). \tag{8}$$

Соотношение (8) по независимой переменной $f(g\beta)$ является тождеством. Фиксируя эту переменную и вводя обозначение

$$\Omega\left(f(i\alpha), f(i\beta)\right) = \Gamma\left(f(g\beta), f(i\alpha), f(i\beta)\right)\Big|_{f(g\beta)=const},$$

получим уравнение

$$\Omega\left(f(i\alpha), f(i\beta)\right) - \Omega\left(f(j\alpha), f(j\beta)\right) = 0\ , \tag{9}$$

которое, очевидно, можно считать выполняющимся для некоторого открытого и плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей $\langle ij, \alpha\beta\rangle$, о котором говорится в лемме 4. Также как и функция Φ в уравнении (1), левая часть (9) локально имеет отличные от нуля производные по всем переменным $f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)$. Кроме того, из свойств функции Γ следует, что отличны от нуля все производные функции Ω.

Запишем, далее, уравнение (1) для кортежей $\langle ij, \rho\alpha\rangle$ и $\langle ij, \rho\beta\rangle$ из множества леммы 4 и разрешим их относительно переменной $f(i\rho)$:

$$f(i\rho) = \Gamma\left(f(i\alpha), f(j\alpha), f(j\rho)\right)\ ,$$

$$f(i\rho) = \Gamma\left(f(i\beta), f(j\beta), f(j\rho)\right)\ .$$

Приравнивая правые части, приходим к соотношению

$$\Gamma\left(f(i\alpha), f(j\alpha), f(j\rho)\right) = \Gamma\left(f(i\beta), f(j\beta), f(j\rho)\right)\ ,$$

которое является тождеством по независимой переменной $f(j\rho)$. Если зафиксировать значение этой переменной и ввести обозначение

$$\Xi\left(f(i\alpha), f(j\alpha)\right) = \Gamma\left(f(i\alpha), f(j\alpha), f(j\rho)\right)\Big|_{f(j\rho)=const},$$

то получим уравнение

$$\Xi\left(f(i\alpha), f(j\alpha)\right) - \Xi\left(f(i\beta), f(j\beta)\right) = 0\ , \tag{10}$$

свойства которого аналогичны свойствам уравнения (9).

Функция Ξ, как и функция Ω, имеет отличные от нуля производные по всем входящим в нее переменным и, кроме того, отличны от нуля все производные левой части уравнения (10).

Два различных уравнения (9) и (10) задают локально одну и ту же гиперповерхность в некоторой окрестности $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}^4$ точки $F(\langle ij, \alpha\beta\rangle)$, соответствующей кортежу $\langle ij, \alpha\beta\rangle$, множество которых открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Это, естественно, налагает дополнительнные ограничения на функции Ω и Ξ.

Разрешим уравнение (9) и (10) относительно $f(i\alpha)$:

$$f(i\alpha) = \mathcal{X}\left[\Omega\left(f(j\alpha), f(j\beta)\right), f(i\beta)\right]\ , \tag{11}$$

$$f(i\alpha) = \mathcal{X}_1\left[\Xi\left(f(i\beta), f(j\beta)\right), f(j\alpha)\right]\ ,$$

откуда получаем функциональное уравнение для $\mathcal{X}\left[\Omega\left(f(j\alpha), f(j\beta)\right), f(i\beta)\right]$:

$$\mathcal{X}\left[\Omega\left(f(j\alpha), f(j\beta)\right), f(i\beta)\right] = \mathcal{X}_1\left[\Xi\left(f(i\beta), f(j\beta)\right), f(j\alpha)\right]\ , \tag{12}$$

так как по следствию леммы 1 все переменные, входящие в равенство (11), независимы и, кроме того, $\partial\Omega(f(j\alpha), f(j\beta))/\partial f(j\alpha) \neq 0$.

Производные левой и правой частей уравнения (12) по каждой из переменных отличны от нуля, откуда, в частности, следует, что не обращаются в нуль производные функций $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_1$ по первым аргументам Ω и Ξ.

Продифференцируем уравнение (12) по переменным $f(i\beta)$, $f(j\beta)$ и разделим правую и левую части второго результата дифференцирования на соответствующие части первого:

$$\partial\mathcal{X}\,[\Omega(\,f(j\alpha), f(j\beta)\,), f(i\beta)]\,/\partial\Omega(\,f(j\alpha), f(j\beta)\,)\cdot\partial\Omega(\,f(j\alpha), f(j\beta)\,)/\partial f(j\beta)\;=$$

$$=\;\mathcal{X}\,[\Omega(\,f(j\alpha), f(j\beta)\,), f(i\beta)]\,/\partial f(i\beta)\cdot\frac{\partial\Xi(\,f(i\beta), f(j\beta)\,)/\partial f(j\beta)}{\partial\Xi(\,f(i\beta), f(j\beta)\,)/\partial f(i\beta)}\,. \tag{13}$$

Равенство (13) имеет место для проекции на подпространство $\mathbb{C}^3$ точки $F(\langle ij, \alpha\beta\rangle)$, соответствующей кортежу $\langle ij, \alpha\beta\rangle$, множество которых открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Поскольку все переменные, входящие в это равенство независимы, оно может рассматриваться как функционально-дифференциальное уравнение для $\mathcal{X}[\lambda, f(i\beta)]$, где $\lambda = \Omega(f(j\alpha), f(j\beta))$. Заметим, что все производные в равенстве (13) отличны от нуля.

В уравнении (13) перейдем к переменной λ, которая взаимно однозначно связана с $f(j\alpha) = \mathcal{X}[\lambda, f(j\beta)]$, так как $\partial\Omega(\,f(j\alpha), f(j\beta)\,)/\partial f(j\alpha) \neq 0$.

$$\partial\mathcal{X}\,[\lambda, f(i\beta)]/\partial\lambda\cdot\partial\Omega(\,\mathcal{X}\,[\lambda, f(j\beta)], f(j\beta)\,)/\partial f(j\beta)\;=$$

$$=\;\partial\mathcal{X}\,[\lambda, f(i\beta)]/\partial f(i\beta)\cdot\frac{\partial\Xi\,(f(i\beta), f(j\beta))/\partial f(j\beta)}{\partial\Xi(f(i\beta), f(j\beta))/\partial f(i\beta)}\,.$$

Зафиксируем в последнем равенстве значение переменной $f(j\beta)$, от которой не зависит функция $\mathcal{X}[\lambda, f(i\beta)]$:

$$\partial\mathcal{X}\,[\lambda, f(i\beta)]/\partial\lambda\cdot A_1\,(\lambda) + \partial\mathcal{X}\,[\lambda, f(i\beta)]/\partial f(i\beta)\cdot A_2\,(f(i\beta)) = 0\,. \tag{14}$$

Таким образом, по комплексным переменным λ и $f(i\beta)$ для голоморфной функции $\mathcal{X}[\lambda, f(i\beta)]$ получено линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Это уравнение не имеет особых точек, так как локально его коэффициенты A_1, A_2 отличны от нуля.

Пусть $B_1(\lambda)$ и $B_2(f(i\beta))$ первообразные для голоморфных функций $1/A_1(\lambda)$ и $-1/A_2(f(i\beta))$, локальное существование которых обеспечивается теоремой комплексного анализа [4, Ч.I,С.89]. То есть ${B_1}'(\lambda) = 1/A_1(\lambda)$ и ${B_2}'(f(i\beta)) = \;-1/A_2(f(i\beta))$. Произведем в уравнении (14) замену переменных $B_1(\lambda) \longrightarrow \lambda$, $B_2(f(i\beta)) \longrightarrow f(i\beta)$:

$$\partial\varphi\,[\lambda, f(i\beta)]/\partial\lambda - \partial\varphi[\,\lambda, f(i\beta)]/\partial f(i\beta) = 0\,, \tag{14$'$}$$

где

$$\mathcal{X}\,[\lambda, f(i\beta)] = \varphi\,[B_1(\lambda), B_2(f(i\beta))]\,.$$

Лемма 5. *Голоморфная функция двух переменных f тогда и только тогда локально задается выражением $f(z_1, z_2) \equiv \psi(z_1 + z_2)$, где ψ голоморфная функция одной переменной с отличной от нуля производной, когда она удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} - \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2} = 0\,. \tag{15}$$

Необходимость. *Действительно для функции f имеем:*

$$\partial f/\partial z_1 = \partial\psi/\partial s \cdot \partial s/\partial z_1 = \partial\psi/\partial s\ ,$$

$$\partial f/\partial z_2 = \partial\psi/\partial s \cdot \partial s/\partial z_2 = \partial\psi/\partial s\ ,$$

где введено обозначение

$$s = z_1 + z_2\ .$$

Уравнение (15) для функции f получим, исключая из выписанных соотношений $\partial\psi/\partial s$.

Достаточность. *Пусть функция f есть любое решение уравнения (15). Произведем в $f(z_1, z_2)$ замену переменных $z_1 = s - z_2$, $z_2 = z_2$, в которой z_1 определяется из выражения для s. Покажем, что функция $f(s - z_2, z_2)$ не зависит от переменной z_2. Действительно производная этой функции по z_2 равна нулю:*

$$\partial f(s - z_2, z_2)/\partial z_2 = \partial f(z_1, z_2)/\partial z_1 \cdot \partial z_1/\partial z_2 + \partial f(z_1, z_2)/\partial z_2 =$$

$$= -\ \partial f(z_1, z_2)/\partial z_1 + \partial f(z_1, z_2)/\partial z_2 = 0\ .$$

Следовательно, имеем $f(z_1(s - z_2), z_2) = \psi(s)$. Подставляя выражение для s, получим $f(z_1, z_2) = \psi(z_1 + z_2)$. Лемма доказана.

Следствие. *Множество всех решений f уравнения (15) с отличными от нуля производными $\partial f/\partial z_1$, $\partial f/\partial z_2$ локально задается выражением $f(z_1, z_2) \equiv \psi(z_1 + z_2)$, где ψ произвольная голоморфная функция с отличной от нуля производной.*

Согласно следствию решение $\varphi[\lambda, f(i\beta)]$ уравнения (14′) есть функция одной переменной $\lambda + f(i\beta)$. Возвращаясь к старым переменным $\lambda, f(i\beta)$ уравнения (14), получим следующее выражение для $\mathcal{X}[\lambda, f(i\beta)]$:

$$\mathcal{X}\,[\lambda, f(i\beta)] = \mathcal{X}_2\,[B_1(\lambda) + B_2(f(i\beta))]\ , \tag{16}$$

где $\mathcal{X}_2$, B_1, B_2 голоморфные функции одной переменной, имеющие отличные от нуля производные по аргументам $B_1 + B_2, \lambda, f(i\beta)$, так как ${B_1}'(\lambda) = 1/A_1(\lambda) \neq 0$, ${B_2}'(f(i\beta)) = -1/A_2(f(i\beta)) \neq 0$ и $\partial\mathcal{X}[\lambda, f(i\beta)]/\partial\lambda \neq 0$.

Подставим выражение (16) в уравнение (11)

$$f(i\alpha) = \mathcal{X}_2\left[B_1[\,\Omega\,(f(j\alpha), f(j\beta))] + B_2(f(i\beta))\right]$$

и разрешим результат подстановки относительно суммы $B_1 + B_2$:

$$B_1\,[\,\Omega\,(f(j\alpha), f(j\beta))] = -B_2\,(f(i\beta)) + \psi\,(f(i\alpha))\ , \tag{17}$$

где $\psi = {\mathcal{X}_2}^{-1}$ - обратная к $\mathcal{X}_2$ функция.

Запишем уравнение (17) для кортежей $\langle ig, \alpha\beta\rangle$ и $\langle jg, \alpha\beta\rangle$:

$$B_1\,[\Omega\,(f(g\alpha), f(g\beta))] = -B_2\,(f(i\beta)) + \psi\,(f(i\alpha))\ ,$$

$$B_1[\Omega\,(f(g\alpha), f(g\beta))] = -B_2\,(f(j\beta)) + \psi\,(f(j\alpha))$$

и приравняем правые части выписанных выражений, поскольку левые совпадают :

$$B_2\,(f(i\beta)) - B_2\,(f(j\beta)) = \psi\,(f(i\alpha)) - \psi\,(f(j\alpha))\ . \tag{18}$$

Покажем, что производная функции $\psi(f(i\alpha))$ *по переменной* $f(i\alpha)$ *отлична от нуля. Для этого продиференцируем уравнение (18) по переменной* $f(i\beta)$, *считая при этом* $f(i\alpha)$ *функцией от* $f(i\beta)$, *задаваемой уравнением (5):*

$$\partial B_2\left(f(i\beta)\right)/\partial f(i\beta)=\partial\psi(\,f(i\alpha))/\partial f(i\alpha)\cdot\partial\Gamma\left(f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta)\right)/\partial f(i\beta).$$

Поскольку $\partial B_2/\partial f(i\beta)\neq 0$, $\partial\Gamma/\partial f(i\beta)\neq 0$, *должно быть* $\partial\psi/\partial f(i\alpha)\neq 0$.

Запишем далее результат (18) для кортежей $\langle ij,\alpha\rho\rangle$ *и* $\langle ij,\beta\rho\rangle$:

$$B_2\left(f(i\rho)\right)-B_2\left(f(j\rho)\right)=\psi\left(f(i\alpha)\right)-\psi\left(f(j\alpha)\right),$$

$$B_2\left(f(i\rho)\right)-B_2\left(f(j\rho)\right)=\psi\left(f(i\beta)\right)-\psi\left(f(j\beta)\right).$$

Приравнивая правые части выписанных выражений, так как левые совпадают, получим уравнение :

$$\psi\left(f(i\alpha)\right)-\psi\left(f(i\beta)\right)-\psi\left(f(j\alpha)\right)+\psi\left(f(j\beta)\right)=0\,, \tag{19}$$

где ψ *- произвольная голоморфная функция одной переменной с отличной от нуля производной, определенная в некоторых окрестностях проекции точки* $F(\langle ij,\alpha\beta\rangle)\subset\mathbb{C}^4$ *на одномерное пространство* $\mathbb{C}$.

Уравнение (19) является следствием того обстоятельства, что одна и та же гиперповерхность локально задается двумя различными уравнениями (9) и (10).

Представим уравнение (19) в виде, разрешенном относительно переменной $f(i\alpha)$ *и запишем его для кортежа* $\langle ij_0,\alpha\beta_0\rangle$ *с фиксированными в нем точками* $j_0\in\mathfrak{M}$ *и* $\beta_0\in\mathfrak{N}$:

$$f\left(i\alpha\right)=\psi^{-1}\big[\,\psi\left(f(i\beta_0)\right)+\psi\left(f(j_0\alpha)\right)-\psi\left(f(j_0\beta_0)\right)\big]\,.$$

Если ввести функции

$$\lambda(z(i))=\psi(f(i\beta_0))-\psi(f(j_0\beta_0))/2\,,$$

$$\sigma(\xi(\alpha))=\psi(f(j_0\alpha))-\psi(f(j_0\beta_0))/2\,,$$

то для функции f *получим следующее локальное координатное представление :*

$$f(i\alpha)=\psi^{-1}\left[\lambda(z(i))+\sigma\left(\xi(\alpha)\right)\right], \tag{20}$$

причем, очевидно, $\lambda'\neq 0$ *и* $\sigma'\neq 0$. *Рассмотрим функции* λ, σ, ψ *как некоторые локальные биголоморфные отображения* $\lambda:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{M}$, $\sigma:\mathfrak{N}\longrightarrow\mathfrak{N}$ *и* $\psi:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$. *Тогда результаты (20) и (19) с точностью до эквивалентности, введенной определением 2, зададут соответственно канонические формы (3) и (4) для комплексной физической структуры ранга (2,2). Теорема доказана.*

Список литературы

[1] *Ю.И.Кулаков,Ю.С.Владимиров,А.В.Карнаухов.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. - М.: Архимед, 1992.

[2] *Ю.С.Владимиров.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч.I. Теория систем отношений. - М.: Изд-во МГУ, 1996.

[3] *Г.Г.Михайличенко.* Об одной задаче в теории физических структур. Сиб. мат. журн., 18, N6 (1977), 1342-1355.

[4] *Б.В.Шабат.* Введение в комплексный анализ. Ч.I,II. - М.: Наука, 1985.