С. Я. Серовайский

ГЕОМЕТРИЯ. МЕЖДУ ФИЗИКОЙ И МАТЕМАТИКОЙ

Математика. Республиканский научно-методический журнал.
2010, №№ 1-3

Знание, к которому стремится геометрия, есть знание вечное, а не то, что тленно и преходяще.
Платон

Геометрия. Ее предметом является изучение различных пространственных форм. Что это? Естественная наука, исследующая конкретные свойства реально существующего пространства, или один из разделов абстрактной математики, подобный алгебре, математическому анализу и теории чисел? Как и в каком направлении она развивалась? К чему она пришла за несколько тысячелетий? Мы попытаемся в какой-то степени поискать ответы на эти вопросы.

1. Естественная наука или математическая теория?

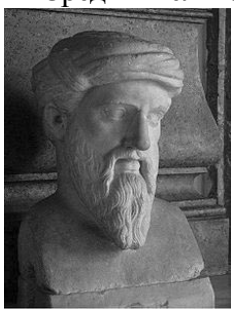
Геометрия – одна из наиболее древних математических дисциплин. Недюжинными познаниями в области геометрии владели все величайшие цивилизации древности – Египет, Вавилон, Китай, Индия и другие. Да и как можно было бы возводить храмы и строить мосты, прокладывать курс в море и следить за звездами, не имея хоть каких-либо представлений о простейших геометрических фигурах и формах пространственных тел, о способах вычисления длин, площадей и объемов?

Архитекторы и инженеры, землемеры и звездочеты, ремесленники и мореплаватели уже в глубокой древности в силу своей профессиональной деятельности просто обязаны были владеть определенными навыками в области геометрии. А ведь кто-то еще должен был их обучать, а также систематизировать и совершенствовать накопленные знания. Были уже и зачатки науки, но вот только какой?

Была механика, изучающая движение реально существующих тел в пространстве. Была астрономия, связанная с наблюдением небесных светил. И была геометрия, рассматривающая пространственные формы реальных объектов. Геометрия оказывалась тем самым естественной наукой, родственной механике и астрономии.

И как же все-таки получилось, что со временем геометрия объединилась вместе с арифметикой, с появившимися позднее алгеброй и анализом в нечто уж очень странное, ну как-то совсем не похожее на физику, химию или биологию – в то, что было названо "математикой"? Где же истоки всего этого?

Среди мыслителей древнего мира особое место занимает **Пифагор**. Он заявлял, что между окружающим миром, воспринимаемым нашими органами чувств, и туманным миром человеческих идей существует прямая связь. И выражена эта странная связь в числах. Действительно, с одной стороны, числа эти являются абстрактным продуктом человеческого разума, а, с другой стороны, они способны дать количественную характеристику всему тому, что происходит вокруг нас. "*Всё есть число*", – провозгласил Пифагор. И отсюда следовал естественный вывод – надо изучать числа, а уже с их помощью – всё то, что происходит вокруг. Числа следует изучать сами по себе, а не просто использовать их в своих практических расчетах... Вот только причем здесь геометрия?

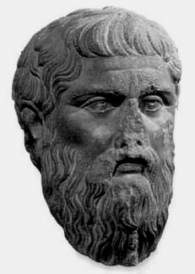

Пифагор
6 в. до н.э.

Кто не изучал в школе *теорему Пифагора*? Кто не рисовал знаменитые "пифагоровы штаны"? Кто не поминал по делу или без такового эти самые катеты и гипотенузу? Но какое всё это имеет отношение к мудреной философии Пифагора? Ну что же такое смог он увидеть в том простеньком соотношении, фактически уже известном в древнем Египте и Вавилоне?

Прямоугольный треугольник – объект, безусловно, геометрический. И он однозначно

характеризуется своими сторонами – катетами и гипотенузой. Так вот, связь между ними может быть выражена в числах. А значит, за геометрическими образами стоят свойства чисел! Значит, геометрия оказывается в чем-то родственной арифметике. А отсюда не столь уж странной может показаться идея заключить их в единую систему знаний. Так, может быть, и на самом деле геометрия является не только и не столько естественно научной дисциплиной?

Платон – один из величайших философов в истории человечества, жил лет через двести после Пифагора. Его воззрения на геометрию и на математику в целом во многом



Платон
4 в. до н.э.

сформировались под влиянием Пифагора. Вслед за ним Платон считал, что математику следует изучать саму по себе, а не только в связи с решением каких-либо прикладных задач.

Согласно Платону сами геометрические объекты не существуют в реальном мире. Их место – в мире идеальном. А в обыденной жизни вы уже никак не встретите настоящих окружностей, треугольников и пирамид. Всё это – лишь математические абстракции, обладающие удивительно красивыми свойствами исключительно в силу своей идеальности, оторванности от нашего, увы, далеко не столь идеального мира. Они лишь приближенно реализуются на практике. И хотя эффективность практического применения геометрических методов чрезвычайно высока, занимаясь изучением идеальных свойств идеальных объектов, геометрия никак не может быть отнесена к естественным научным дисциплинам. С этих позиций становилась актуальной разработка чисто абстрактной геометрической теории. И такая теория действительно вскоре появилась.

2. Рождение теоретической геометрии

Философия Платона стала идеологической основой для геометрии Евклида – глубоко формализованной математической теории. Но на пути разработки математического аппарата геометрии среди предшественников Евклида, конечно же, были и математики.

Уже в 6 веке до н.э. **Фалес из Милета** дает первые доказательства простейших геометрических утверждений. К примеру, он устанавливает признаки равенства треугольников, доказывает равенство соответствующих углов равнобедренного треугольника. Особо важно здесь то обстоятельство, что геометрические свойства обосновываются с помощью некоторой цепочки логических утверждений. Фактически здесь мы уже имеем дело с настоящими теоремами. Эта концепция, проходящая через всю математику, была впоследствии положена в основу геометрии Евклида.

И всё же у Фалеса эти результаты явно не составляют целостную теорию. Однако уже в 5 веке до н.э. **Гиппократ Хиосский** издает свои "*Начала*". Его труд, так и не дошел до нас. Трудно сказать, на каких принципах он был в действительности построен. Но по свидетельству очевидцев это была, возможно, первая в истории попытка систематического изложения геометрии на плоскости. Не случайно и Евклид назвал свой труд "*Началами*". Видимо, была здесь какая-то преемственность. Но только в чем она выражалась?

К сожалению, мы не знаем, в какой степени осознавал Гиппократ аксиоматический метод. Да и пользовался ли он вообще аксиомами? Но вот **Евдокс Книдский**, живший в 4 веке до н.э. незадолго до Евклида, и бывший, помимо всего прочего, непосредственным учеником Платона, имеет уже достаточно четкое представление о значении аксиом. В частности, одна из наиболее известных математических аксиом, названная впоследствии *аксиомой Архимеда*, но сформулированная впервые именно Евдоксом, постулировала неограниченную возможность расширения отрезков. По своей известности и влиянию на развитие всей математики, с ней, видимо, может конкурировать лишь знаменитый пятый постулат Евклида. Отметим, что у Евдокса это было действительно некое недоказуемое

утверждение, интуитивно принимаемое, тем не менее, за истину. А уже с его помощью получались другие геометрические результаты, например, вычислялась площадь круга.

Евдокс по праву считается одним из величайших математиков античного мира. Но всё-таки создание полноценной геометрической теории принято связывать с именем Евклида. Находившийся под несомненным влиянием философских воззрений Платона и прекрасно знакомый с трудами Евдокса и других крупнейших математиков предшествующего периода, **Евклид** жил в Александрии, в городе, основанном Александром Македонским и превращенным им в центр мировой культуры. Основной труд Евклида – "*Начала*" является, пожалуй, наиболее известным научным трактатом за всю историю человеческой цивилизации.

Евклид
4 в. до н.э.

Евклид создал образец математической теории, эталон, на который равнялись математики (да и не только математики) всех последующих поколений. Он разработал стройную систему, основанную на четких и ясных логических принципах.

Геометрия Евклида самодостаточна, она не нуждается в каких-либо ссылках на другие работы. Сначала даются важнейшие *определения*. Затем приводятся *аксиомы* – основополагающие положения, считающиеся истинными изначально. После этого формулируются и логически обосновываются *теоремы* – утверждения, характеризующие свойства введенных геометрических объектов, выводимые из аксиом или предшествующих (уже доказанных) теорем. Не случайно, более двух тысячелетий преподавание геометрии осуществлялось непосредственно на основе "*Начал*" Евклида. Собственно, отныне любая математическая теория будет строиться на подобных принципах.

После трудов Евклида становилось отчетливо видно, что геометрия – это действительно математика. Более того, к самой математике теперь будет принято относить всё то, что может быть изложено таким же способом, как геометрия Евклида. Однако, несмотря на это, геометрия еще долгое время развивалась совершенно самостоятельно и была практически изолирована от других математических дисциплин. Единство всей математики было далеко не очевидным. Предстоял еще долгий нелегкий путь к истине…

3. На пути к великому синтезу

Отдельные факты, указывающие на связь геометрии с другими математическими направлениями, были обнаружены задолго до Евклида. Вспомним уже упоминавшуюся теорему Пифагора. Наряду с естественной геометрической интерпретацией ей можно было придать числовой, алгебраический и аналитический смысл.

Действительно, каждой стороне треугольника (геометрическому объекту) можно было поставить в соответствие его длину, т.е. число. При определенных условиях эти длины выражаются целыми числами. И тогда теорема Пифагора выражает возможность представления квадрата одного целого числа в виде суммы квадратов двух других целых чисел. А это утверждение относится уже к *теории чисел*. И, что любопытно, отсюда открывается прямой путь к знаменитой *теореме Ферма* – достаточно заменить квадраты целых чисел на степени более высокого порядка.

С другой стороны, с математической точки зрения задача определения с помощью теоремы Пифагора одной из сторон прямоугольного треугольника по двум другим сторонам представляет собой *уравнение* – некое равенство, связывающее неизвестную величину с известными. А это уже в полной степени относится к *алгебре*, одному из ведущих разделов математики, призванному изначально заниматься решением уравнений.

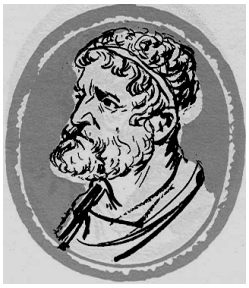
Кроме того, в процессе расчета сторон прямоугольного треугольника естественным образом возникают ситуации, когда искомая сторона не может быть выражена не только

целым числом, но даже и отношением двух целых чисел, т.е. рациональным числом. В частности, это относится к длине гипотенузы равнобедренного прямоугольника с катетами единичной длины. Количественная характеристика подобных объектов неминуемо приводит к понятию *иррациональных чисел*. Их описание связано с процедурой перехода к *пределу*, что является уже предметом *математического анализа*.

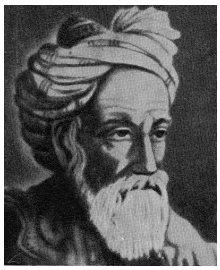
В трудах наиболее проницательных математиков древности постепенно выявляются глубокие связи между геометрией и другими разделами математики. В частности, уже упоминавшийся **Евдокс** был не только великим математиком, но и блестящим астрономом – создателем, возможно, первой в истории космологической теории. Так вот, при составлении атласа неба, для указания места расположения звезд он приписывает им определенные координаты. А его последователь **Гиппарх** пользуется еще и географическими координатами. Видимо, здесь – истоки *метода координат*, позволяющего сопоставить положению тела на плоскости или в пространстве несколько чисел – координат. Отсюда открывался путь к описанию многообразных геометрических объектов на языке чисел и формул, т.е. средствами других разделов математики. Но до ясного осознания такой возможности было еще так далеко.

Евдокс
4 в. до н.э.

Пожалуй, наиболее глубоко среди математиков античного мира чувствовал связь геометрии с другими математическими направлениями **Аполлоний**. В своих исследованиях он уверенно пользовался различными типами систем координат, и при необходимости умело переходил от одних координат к другим. Кстати, именно ему мы обязаны такими терминами, как ось, абсцисса, ордината, аппликата, а также гипербола, парабола, эллипс, фокус, асимптота и др. Труды Аполлония – вершина древнегреческой геометрии. Только через полторы тысячи лет европейские математики нового времени смогут превзойти этот уровень.



Аполлоний
3-2 в. до н.э.



Омар Хайям
11 в.

В Средние Века лишь немногие всерьез задумывались о связи геометрии с другими разделами математики. К числу этих немногих, безусловно, относится **Омар Хайям**, гениальный поэт и крупнейший математик своего времени. В своих работах он пишет: "*Не следует придавать значение тому факту, что алгебра и геометрия по видимости различны. Алгебраические факты есть факты геометрические, которые доказаны.*" Можно еще упомянуть французского математика 14 века **Николя Орема**, пользовавшегося графическим изображением переменной величины, а также итальянского математика 16 века **Рафаэлло Бомбелли**, установившего аналогию между различными процедурами над числами и отрезками. Время великого синтеза приближалось…

Создание *аналитической геометрии*, объединившей геометрию со всей остальной математикой, связывают с двумя великими французскими математиками 17 века – Пьером Ферма и Рене Декартом.

Они были так не похожи друг на друга... Ферма – профессиональный юрист, всю свою жизнь проработавший провинциальным государственным чиновником и практически не покидавший своего родного города. Декарт – знаменитый философ, немало ездивший по свету и умерший вдали от родины.

Ферма, известный широкой общественности, главным образом своей легендарной теоремой, находится у истоков многих математических направлений. С ним связывают создание теории чисел и теории вероятностей, теории экстремума и теории игр. Задолго до Ньютона и Лейбница он владел элементами дифференциального и интегрального исчисления. А еще ему принадлежит принцип Ферма – один из важнейших законов оптики, позволяющий объяснить преломление света.

Именно Ферма первым ввел *систему координат*, причем он рассматривает не только плоский, но и пространственный случай. Ему знакомо понятие размерности. Он прекрасно понимает, что с помощью метода координат можно устанавливать различные геометрические свойства аналитическими методами, и, напротив, геометрическую интерпретацию использовать для наглядной иллюстрации явлений, лежащих за пределами геометрии. В частности, он дает классификацию кривых (геометрических объектов) по свойствам функциональных выражений, дающих аналитическое представление этих кривых. С другой стороны, имея аналитическое представление кривой, он дает графическую интерпретацию решений уравнения, определяемого данной кривой.

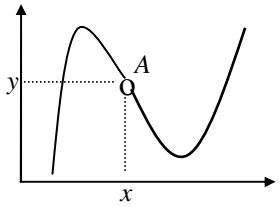
Пьер Ферма
1601 – 1665

Декарт, основоположник философии нового времени, был создателем философской теории естествознания. Согласно Декарту весь мир представляет собой хорошо отлаженный механизм, а любая наука сводится тем самым к механике. А языком науки является, естественно, математика, призванная описывать любые явления окружающего мира. Но поскольку явления эти происходят в пространстве, то непременно должно существовать какое-то надежное средство для описания пространственных форм.

Декарт вводит понятие *переменной величины*, которой можно дать различную интерпретацию. С одной стороны, это может быть траектория движущегося тела, что относится к механике. С другой стороны, за этим стоит некая кривая, т.е. геометрический объект. Но ту же самую переменную величину можно описать с помощью некоторой функциональной зависимости, т.е. средствами алгебры и анализа. Тем самым аналитический аппарат проникает не только в геометрию, но и в механику, связывая воедино всё естествознание.

Рене Декарт
1596 – 1650

Независимо от Ферма Декарт вводит явным образом прямоугольные координаты, которые впоследствии были названы декартовыми. Именно с их помощью предоставляется естественная возможность связать геометрию с анализом. Действительно, каждая точка кривой на плоскости характеризуется парой чисел, являющихся координатами этой точки. Одну из этих координат можно выбрать в качестве независимой переменной, а другую – значением в этой точки какой-то функциональной зависимости. И тогда, перемещая точку вдоль кривой, мы при определенных условиях восстанавливаем некоторую функцию. С другой стороны, имея какую-то функцию, выбирая всевозможные числа из области ее определения и отслеживая соответствующие значения функции, мы получаем множество точек на плоскости, образующее какую-то кривую. В отличие от Ферма, практически не публиковавшего результаты своих исследований, Декарт дает систематическое изложение аналитических методов в геометрии. Тем самым существенно углубляется представление о различных геометрических объектах и о геометрии в целом.



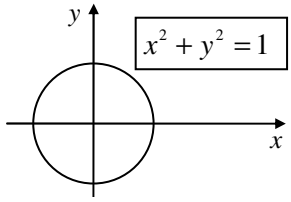
Точка A на кривой,
числа x, y – координаты

Работы Декарта и Ферма знаменовали собой реальное объединение геометрии с остальной математикой и дали мощный импульс для развития всей математики.

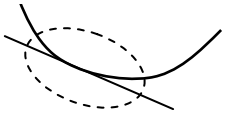
4. Геометрия или геометрии?

Метод координат стал надежным мостом, связывающим геометрию с алгеброй, анализом и другими разделами математики. Геометрия обогатилась оригинальными идеями, и в ней открылись новые неизведанные миры.

Отталкиваясь от пионерских изысканий Ферма и Декарта, на стыке геометрии и алгебры появилась *алгебраическая геометрия*, призванная первоначально изучать решения алгебраических уравнений. С помощью метода координат решения уравнения отождествляется с множеством точек некоторого пространства, образующего некий геометрический объект. Мощный алгебраический аппарат и наглядная геометрическая интерпретация, дополняя друг друга, существенно расширили и углубили представление математиков об окружающем их мире.



Окружность – множество решений уравнения


Кривая локально близка к прямой

А на стыке геометрии и анализа рождалась *дифференциальная геометрия*, в которой кривые, поверхности и др. изучаются средствами математического анализа. Так, в малой окрестности некоторой точки гладкая кривая достаточно близка к прямой – ее касательной в этой точке. Однако свойство гладкости и определение касательной напрямую связаны с *дифференцированием* – одним из центральных понятий математического анализа. Чрезвычайно актуальным является также сравнительное изучение поверхности и плоскости. Дело в том, что реальная поверхность земной коры естественно является криволинейной, в то время как ее изображение, т.е. карта, остается плоской. Стимулируемый в значительной степени потребностями картографии, великий немецкий математик **Карл Гаусс** публикует в начале 19 века работу "*Общее исследование о кривых поверхностях*", после чего дифференциальная геометрия становится самостоятельным разделом математики.


Карл Гаусс
1777 – 1855

Параллельно развивалась *проективная геометрия*, связанная с изучением свойств фигур, не меняющихся при различных преобразованиях типа проектирования. Это направление стимулировалось, прежде всего, потребностью изобразительного искусства. Действительно, как правильно изобразить на картине перспективу? Какой вид принимают протяженные объекты, если смотреть на них издали под определенным углом? Неудивительно, что первые шаги в разработке учения о перспективе сделали живописцы – **Пьеро делла Франческо**, **Леонардо да Винчи**, **Альбрехт Дюрер** и др. Их идеи были подхвачены в 17 веке **Жаном Дезаргом,** а становление проективной геометрии как полноправного раздела математики произошло в первой половине 19 века после работ другого французского математика – **Жана Понселе**.


Жан Понселе
1788 – 1867

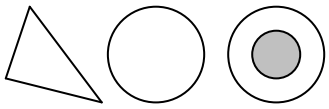
Качественно новые геометрические миры открылись в результате долгой и мучительной работы над *пятым постулатом Евклида*. Согласно Евклиду, через точку, взятую вне прямой, можно провести ровно одну прямую, параллельную данной. Тысячелетиями математики пытались обосновать это утверждение, выводя его из других аксиом Евклида. Но все их отчаянные попытки оканчивались безрезультатно. И лишь к 19 веку постепенно пришло понимание того, что отказ от пятого


Николай Лобачевский
1792 – 1856

Бернхард Риман
1826 – 1866

постулата приводит не к противоречию, а принципиально новым геометриям. Так, в геометрии **Николая Лобачевского** через точку, взятую вне прямой, проходит бесконечное множество прямых, параллельных данной прямой. А в разработанной чуть позднее геометрии **Бернхарда Римана** таких прямых вообще не существует. Новые геометрии, названные *неевклидовыми*, оказались столь же непротиворечивыми, как и геометрия Евклида, но существенно отличающимися от нее многими свойствами. С математической точки зрения они имеют точно такое же право на существование, как и евклидова геометрия. И, как это не странно, впоследствии они нашли свое практическое применение. Так, в общей теории относительности Эйнштейна материальные тела искривляют пространство вокруг себя. Соответствующая геометрия уже не будет евклидовой – здесь уверенно вступают в свои права строгие законы геометрии Римана.

Геометрия всё сильнее сплеталась с другими математическими дисциплинами. Но, с другой стороны, геометрический мир неуклонно разрастался. И тут уже вставал другой вопрос, а составляют ли эти столь разные направления единый раздел математики? Вот, к примеру, *топология*, в которой с наиболее общих позиций исследуется понятие *непрерывности*. Зародилась она, безусловно, в недрах геометрии. А предметом ее являются свойства объектов, не меняющиеся при взаимно однозначных и непрерывных в обе стороны преобразованиях. Так, можно нарисовать на резиновом листе круг и, растягивая этот лист должным образом, получить треугольник. Однако никакая непрерывная деформация никогда не сделает из круга кольцо. Следовательно, есть что-то такое, очень важное, объединяющее треугольник и круг, но никак не кольцо. Подобные свойства и изучает топология…

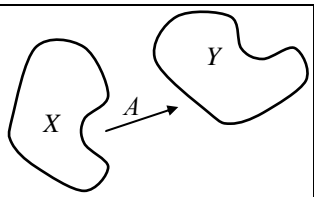


Круг непрерывно отображается в треугольник, но не в кольцо

Казалось бы, всё это чистейшая геометрия. Однако топологические идеи столь глубоки и многообразны, что, охватывая в наиболее общем виде такие понятия, как непрерывность, близость, предел и т.п., топология в настоящее время превратилась в совершенно самостоятельный раздел математики, сопоставимый по масштабам с алгеброй и в значительной степени подчинившей себе анализ.

Назрела необходимость в разработке новых объединяющих принципов геометрии. Решающий шаг в этом направлении сделал во второй половине 19 века немецкий математик **Феликс Клейн**. В своей работе "*Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований*", известной также как *Эрлангенская программа* (по названию университета, где он впервые выступил со своей концепцией) Клейн положил в основу единого взгляда на различные геометрии следующую идею. В евклидовой геометрии две фигуры можно отождествить, если одну из них можно отобразить в другую с помощью преобразований сдвига и поворота, называемых единым термином – *движение*. Характерно, что композиция, т.е. последовательное выполнение двух движений само является движением. Так, изображенное на рисунке преобразование *A* является композицией параллельного переноса рассматриваемой фигуры и ее поворота на некоторый угол вокруг какой-то точки. Если у нас есть три движения *A*, *B* и *C*, выполняемых последовательно одно за другим, то мы можем сначала последовательно выполнить преобразования *A* и *B*, а потом результатом подействовать на преобразование *C*. А можно сначала совершить движение *A*, а потом выполнить композицию *B* и *C*. И результат в обоих случаях окажется одинаковым. Кроме того, существует тривиальное (тождественное) преобразование, которое оставляет рассматриваемое тело на своем месте. Наконец, любому

Феликс Клейн
1849 – 1925



Фигура *X* отображается в *Y* сдвигом и поворотом

преобразованию соответствует обратное преобразование, которое аннулирует действие исходного преобразования, т.е. возвращает фигуру на место. Так, обратным преобразованием к движению *A* на рисунке будет такое преобразование, которое переводит фигуру *Y* в *X*. Совокупность описанных свойств для движений и их композиции соответствует важнейшему алгебраическому понятию *группы*.

Так вот, Клейн отмечает, что евклидова геометрия изучает те и только те свойства тел, которые не меняются при движениях, или, как говорится, остаются инвариантными, относительно *группы движений*. И вообще, разные теории различаются специфическими *группами преобразований*. К примеру, топология изучает исключительно те свойства, которые не меняются при взаимно однозначных и непрерывных в обе стороны преобразованиях, образующих *группу гомеоморфизмов*. Проективная геометрия характеризуется своим типом преобразований, называемых *проективными*. Своя группа преобразований имеется и у геометрии Лобачевского.

Теория Клейна не только позволила взглянуть с единых позиций на различные геометрические теории, но и дала в руки геометрам мощнейший аппарат теории групп. Математизация геометрии вступила на новый этап. Однако наблюдался и противоположный процесс – геометрические идеи проникали всё глубже и глубже во все разделы математики. Геометризация математики шла полным ходом…

5. Абстрактное пространство и геометризация математики

Еще со времен Евклида (и даже раньше) различали *планиметрию*, т.е. геометрию на плоскости, и *стереометрию*, занимающуюся изучением тел в пространстве. Над тем, что они различаются таким понятием, как *размерность*, задумывался Ферма, а задолго до него– древнегреческий математик и астроном **Клавдий Птолемей**, известный своей космологической системой. Аналитическую геометрию в пространстве разрабатывали в 18 веке **Леонард Эйлер**, **Филипп Лаир** и **Алексис Клеро**.

А в середине 19 века уже известный нам Риман, а также немецкий математик **Герман Гюнтер Грассман** и англичанин **Артур Кэли** пришли, причем с разных позиций, к понятию пространства произвольной размерности. Действительно, если точка на плоскости характеризуется парой чисел, соответствующих ее координатам, а точка в пространстве – уже тремя координатами, то кто нам мешает рассматривать упорядоченные наборы *n* чисел, т.е. *векторы* размерности *n*, которые ассоциируются с точками в *n*-мерном пространстве? Удивительно, что столь простое и естественное понятие вектора произвольной размерности появилось в математике так поздно.

Понятно, что над геометрией постоянно довлело ее естественно научное происхождение. Мы же постоянно в физическом мире наблюдаем тела, имеющие длину, ширину и высоту, т.е. ровно три характеристики. При графическом изображении объектов на плоскости высоты уже нет, и остаются только две координаты. Если же мы движемся в одну сторону строго прямолинейно (например, по дороге), то можем вполне обойтись единственной координатой, характеризующей наше расстояние от точки старта. Ничего сверх этого мы в жизни, как будто, и не наблюдаем. А раз так, то стоит ли искусственно выдумывать геометрию, изучающую объекты четырех и более измерений?

Только вот ведь какая хитрая штука получается. Математика (и геометрия в том числе), конечно же, призвана изучать окружающий мир. Но есть еще и неумолимая внутренняя логика развития науки. Там, где уже есть числа 1, 2 и 3, характеризующие размерность пространства, естественным образом появляется и число 4. А за ним – 5 и другие натуральные числа. Действительно, почему вектор третьего порядка (упорядоченный набор трех чисел) имеет полное право на существование, а упорядоченный набор из четырех чисел – уже нет. Если двум числам можно поставить в соответствие точку на плоскости (двумерном пространстве), а трем числам – в пространстве трехмерном, то что же нам мешает представить, что четыре числа соответствуют точке уже в пространстве четырех измерений? Математическая теория

многомерного пространства во многом оказывается аналогичной соответствующей теории пространства двух или трех измерений.

И вот ведь что любопытно. Стоило только ввести многомерное пространство исключительно из соображений внутреннего логического совершенства, как выяснилось, что пространства высокой размерности имеют естественный практический смысл. К примеру, в специальной теории относительности пространство неотделимо от времени. Соответствующая геометрия, разработанная **Германом Минковским**, оказывается четырехмерной. А в геометрии **Теодора Калуцы** и **Оскара Клейна**, от которой отталкивается популярная в настоящее время физическая теория суперструн, появляется уже пятое измерение.

Но для погружения в многомерный мир совсем не обязательно уходить в дебри современной теоретической физики. При рассмотрении классической системы движения двух тел (например, планеты и ее спутника) нам потребуется ровно шесть характеристик (координат) – по три на каждое тело. Шестью координатами описывается и движение твердого тела в пространстве – три координаты при этом характеризуют положение центра масс, а три остальные связаны с поворотами вокруг выбранной системы координат. А вот движение двух тел, находящихся на фиксированном расстоянии друг от друга, описывается лишь пятью координатами – фиксация расстояния между телами делает одну из шести координат (три на каждое тело) зависимой величиной. Таким образом, при желании можно получить физически осмысленное пространство произвольной размерности.

Казалось бы, рассмотрение пространства произвольного числа измерений является пределом полета человеческой мысли. Но вот уже в начале 20 века великим немецким математиком **Давидом Гильбертом** выдвинута концепция *бесконечномерного пространства*. Если пара чисел характеризует точку на плоскости, тройка чисел – точку в трехмерном пространстве, а вектор произвольной размерности – точку в некотором многомерном пространстве, то упорядоченный набор бесконечного множества чисел, т.е. *последовательность* оказывается по Гильберту точкой в пространстве бесконечной размерности.

Давид Гильберт
1862 – 1943

А последователи Гильберта идут еще дальше. Они вообще отказываются от введения изначально размерности пространства. Так, **Феликс Хаусдорф** определяет *топологическое пространство* (множество, в котором имеет смысл понятие близости), **Морис Фреше** – *метрическое пространство* (множество, в котором для любых двух элементов определено расстояние между ними), **Отто Тёплиц** – *линейное пространство* (множество, где определены сумма элементов и умножение элемента на число). Точками этих пространств могут выступать уже объекты произвольной природы – числа, векторы, последовательности, функции, операторы. Особенно важным оказалось понятие *функционального пространства*, точками которого являются функции. Оно стало центральным для *функционального анализа* – анализа 20 (и, видимо, 21) века.

В результате как-то так незаметно получилось, что, практически любой математический объект может быть интерпретирован в качестве точки некоторого пространства. И при его анализе можно таким образом воспользоваться теми или иными геометрическими конструкциями. Но тогда возникает удивительный вопрос – а не свелась ли в таком случае вся необъятная математика к геометрии?

И вот что особо важно. Геометрия неизменно шла в сторону повышения уровня математической абстракции. Но при этом она никак не отрывалась от приложений. Так, появление общей концепции абстрактного математического пространства и построение на ее основе функционального анализа Гильбертом и его последователями в значительной степени стимулировалось потребностями физики, в частности, квантовой механики. Всё глубже внедряясь в абстрактный математический мир, геометрия никогда не забывала своего естественно научного происхождения.

Заключение

На протяжении всего времени геометрия имела два лика, связанные между собой, но всё-таки принципиально разные. С одной стороны, имеется естественная теория реально существующего пространства. А с другой стороны, разрабатывается формализованная математическая теория, определяемая соответствующей аксиоматикой и живущая по своим внутренним законам. До сих пор даже в среде профессиональных научных работников порою наблюдается смешение этих двух концепций, обусловленных двойственным характером геометрии. Но столь ли уж уникально положение геометрии в математическом мире?

Возьмем, к примеру, понятие *вероятности*. Она является числовой характеристикой степени возможности наступления какого-либо события при определенных условиях. В этом смысле вероятность напрямую связана с реальными процессами и не особо отличается от таких физических характеристик как масса, вязкость или сила тока. Но, с другой стороны, в первой половине 20 века была разработана стройная формализованная *теория вероятностей*, построенная на основе соответствующей системы аксиом. В таком виде она уже является полноправной математической теорией со своими абстрактными определениями и строгими теоремами.

А вспомним еще понятие *алгоритма* – некоторого набора предписаний, следуя которым можно решить ту или иную задачу. Правила эти реально существуют, в чем любой из нас в каждом конкретном случае может непосредственно убедиться, решив до конца указанным способом поставленную задачу. Но в 20 веке понятию алгоритма придали строгий математический смысл. И появилась *теория алгоритмов*, ставшая одним из ведущих направлений *математической логики*. Ее предметом являются не обычные алгоритмы, которые можно, к примеру, непосредственно реализовать на компьютере, а некоторые формальные процедуры, подчиняющиеся соответствующему набору аксиом. Как и во всякой чисто математической теории, здесь можно формулировать и строго обосновывать различные утверждения. Словом, здесь действуют те же принципы, которые закладывал еще Евклид в своих "*Началах*".

Ну а геометрия, она развивается…

Литература

1. Ван-дер-Варден Л. Пробуждающаяся наука. – М., ИЛ. – 1959.
2. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины 19 столетия. – М., 1966.
3. Гротендик А. Урожаи и посевы. – Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 288 с.
4. Клайн М. Поиск истины. – М., Мир, 1988. – 296 с.
5. Комацу М. Многообразие геометрии. – М., Знание, 1981. – 208 с.
6. Матвиевская Г. П. Рене Декарт. – М., Наука, 1976.
7. Рид К. Давид Гильберт. – М., Наука, 1977. – 368 с.
8. Стиллвелл Дж. Математика и ее история. – Москва, Ижевск, Институт космических исследований, 2004.
9. Фрейман Л. С., Никифоровский В. А. Рождение новой математики. – М., Наука, 1976.