Теория физических структур (ТФС) с момента её зарождения долгое время рассматривалась как теория, работающая над множеством действительных чисел [1], [2]. Но в последнее время ведутся работы по поиску решений и на других множествах, например на множествах R^2 [3], R^3 [4], комплексном многообразии [5], абстрактных множествах, не наделенных дополнительной структурой [6]. В данной работе даётся аксиоматика ТФС на абстрактных множествах с помощью которой удаётся получить физические структуры ранга (2.n).

Введём сначала необходимые для работы понятия и объекты.

Для произвольных r, s ∈ N, построим множества: {1, 2, …, r}, {1, 2, …, s} и прямое произведение этих множеств $A \equiv \{1, 2, \ldots, r\}\times\{1, 2, \ldots, s\} \equiv \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (r, s)\}$. Введём три непустых множества M, N, B. Рассмотрим все *отображения* γ: $A \to B$, множество всех таких *отображений* обозначим как степень B^A. Множество всех прямоугольных матриц размера (r, s) с элементами из множества B эквивалентно множеству B^A, поэтому *отображения* γ мы часто будем представлять в виде матриц и говорить о них как о матрицах.

Действительно любое *отображение* γ полностью характеризуется своими значениями: $\gamma(1, 1) = b_{11}$, $\gamma(1, 2) = b_{12}$, …, $\gamma(r, s) = b_{rs}$. Если представить, что элемент $\gamma(q, p) = b_{qp}$ это элемент матрицы из строки q и столбца p то любая матрица размера (r, s) с элементами из множества B задаёт некоторое отображение γ.

Множество всех *отображений* $x:\{1, 2, \ldots, r\} \to M$ обозначим как M^r. Множество всех *отображений* $\xi:\{1, 2, \ldots, s\} \to N$ обозначим как N^s. При этом множество M^r эквивалентно множеству всех *кортов* длины r с элементами из множества M, а множество N^s эквивалентно множеству всех *кортов* длины s с элементами из множества N. Элементы из множества M будем обозначать латинским буквами i, j, …, а из множества N греческими буквами α, β, ….

Рассмотрим отображение ϕ: $A \to M \times N$. Множество всех таких *отображений* обозначим как $(M \times N)^A$. Элементами множества $M \times N$ являются пары (i, α). Тогда отображение ϕ характеризуется своими значениями: $\phi(1, 1) = (i_{11}, \alpha_{11})$, $\phi(1, 2) = (i_{12}, \alpha_{12})$, …, $\phi(r, s) = (i_{rs}, \alpha_{rs})$.

Выделим в множестве $(M \times N)^A$ подмножество Φ *представимых отображений*:

$$\Phi \equiv \{\phi \in (M \times N)^A \mid (\exists\, x \in M^r), (\exists\, \xi \in N^s), (\forall\, (q, p) \in A), \phi(q, p) = (x(q), \xi(p))\}.$$

Иными словами эквивалентное подмножество *представимых матриц* такое, что для элементов пары (i_{qp}, α_{qp}) выполняются следующие соотношения:

$$i_{q1} = i_{q2} = \ldots = i_{qs},$$
$$\alpha_{1p} = \alpha_{2p} = \ldots = \alpha_{rp},$$

т.е. все первые элементы пар в одной строке равны, а все вторые элементы пар равны в одном столбце:

$$\begin{matrix} (i_1,\alpha_1) & (i_1,\alpha_2) & \cdots & (i_1,\alpha_s) \\ (i_2,\alpha_1) & (i_2,\alpha_2) & \cdots & (i_2,\alpha_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (i_r,\alpha_1) & (i_r,\alpha_2) & \cdots & (i_r,\alpha_s) \end{matrix}.$$

Иными словами, *представимая матрица* определяется своими двумя кортами $x = \langle i_1, i_2, \ldots, i_r\rangle$ и $\xi = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\rangle$. Если отображение ϕ представимо в виде двух отображений x и ξ, то будем писать $\phi = x \times \xi$.

Введём новое понятие - *отклонение* $\nu(\gamma_1, \gamma_2) \in N$, характеризующее отличие одного *отображения* γ_1: $A \to B$ от другого γ_2: $A \to B$. Если $\gamma_1 = \gamma_2$, то $\nu(\gamma_1, \gamma_2) = 0$. Если имеется n и только n прообразов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ для которых $\gamma_1(a_1) \neq \gamma_2(a_1)$, $\gamma_1(a_2) \neq$

$\gamma_2(a_2)$, …, $\gamma_1(a_n) \neq \gamma_2(a_n)$, то $\nu(\gamma_1, \gamma_2) = n$. Если *график отображения* γ обозначим в виде Gr_γ, то для случая $|A| < \infty$[1] *отклонение* можно определить:

$$\nu(\gamma_1, \gamma_2) \equiv |A| - |Dom(Gr_{\gamma_1} \cap Gr_{\gamma_2})|.$$

Определим подмножество $\Gamma \subseteq B^A$. Подмножество Γ содержит только такие *матрицы* $\gamma \in \Gamma$, которые однозначно[2] определяются по своим rs-1 элементам. Т.е. если для rs-1 элементов $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{q(p-1)}, b_{q(p+1)}, \ldots, b_{rs}$ за исключением одного b_{qp} найдётся такая *матрица* $\gamma \in \Gamma$, что $\gamma(1, 1) = b_{11}$, $\gamma(1, 2) = b_{12}$, …, $\gamma(q, (p-1)) = b_{q(p-1)}$, $\gamma(q, (p+1)) = b_{q(p+1)}$, …, $\gamma(r, s) = b_{rs}$, то она будет и единственной в этом множестве. Это означает, что множество *матриц* Γ задаёт *функциональное соответствие*[3] $g_{qp}: B^{rs-1} \rightarrow B$:

$$g_{qp}(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{q(p-1)}, b_{q(p+1)}, \ldots, b_{rs}) = b_{qp}.$$

Иными словами множество Γ обладает следующим свойством:

$$(\forall\, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma): \nu(\gamma_1, \gamma_2) \neq 1. \qquad (1)$$

На множестве $M \times N$ *отображение*[4] $f: M \times N \rightarrow B$ задаёт *бинарную физическую структуру ранга (r, s) на двух множествах,* если диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & M \times N \arrow[dr, "f"] & \\
A \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[rr, "\Gamma"'] & & B
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Под ФС мы будем понимать пару (Φ, f) (с их областями определения и значений A, B, M, N).

Определение эквивалентности структур

Заданием подмножеств: $\Gamma \subseteq B^A$, $\Phi \subseteq \Phi$ на соответствующих множествах B, M, N задаётся некоторая слабая структура. Тогда две ФС ранга (r, s) f и f ` будем считать эквивалентными, если имеется три биективных соответствия:

$$\chi: B \rightarrow B,\ \theta: M \rightarrow M\ ,\ \lambda: N \rightarrow N,$$

сохраняющих слабую структуру так, что диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}` \times \mathcal{N}` \arrow[dr, "f'"] & \\
 & \mathcal{M} \times \mathcal{N} \arrow[u, "\theta\ \ \lambda"] \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[uur, "\Phi`"] \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[rr, bend right, "\Gamma`"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "\chi"] & \mathcal{B}`
\end{tikzcd}$$

будет коммутативной.

Будем пока рассматривать специальные физические структуры с дополнительными ограничениями:

---

[1] Множество A - конечное

[2] В общем случае может быть n-значений

[3] Функциональное соответствие $g_{qp}: B^{rs-1} \rightarrow B$ будем называть «верификатором»

[4] Отображение $f: M \times N \rightarrow B$ далее будем называть «репрезентатор»

A1: Подмножество $\Phi = X \times \Xi$ определяется как множество $M^r \times N^s$ за исключением диагональных элементов, т.е.
$X \equiv \{x \in M^r | x$ – инъективное отображение$\}$,
$\Xi \equiv \{\xi \in N^s | \xi$ – инъективное отображение$\}$.

A2: $\Gamma = \{\gamma \in (f \circ \Phi) | (\forall \gamma` \in f \circ \Phi): \nu(\gamma, \gamma`) \neq 1\}$

A3: $(\forall \xi \in \Xi)$, (для любых попарно неравных $b_1, b_2, \ldots b_{r-1} \in B$), $(\exists i \in M)$:
$f(i, \xi(1)) = b_1, f(i, \xi(2)) = b_2, \ldots, f(i, \xi(r\text{-}1)) = b_{r-1}$.

A4: $(\forall x \in X)$, (для любых попарно неравных $b_1, b_2, \ldots b_{s-1} \in B$), $(\exists \alpha \in N)$:
$f(x(1), \alpha) = b_1, f(x(2), \alpha) = b_2, \ldots, f(x(s\text{-}1), \alpha) = b_{s-1}$.

Рассмотрим общие следствия

Для доказательства утверждения, что строки (столбцы[5]) в матрицах из Γ не могут совпадать или отличаться одним значением, будем рассматривать ограничения отображения $x|_{\{q\}}$, область определения которого – одноэлементное множество $\{q\}$. Иными словами ограничение $x|_{\{q\}}$ выделяет элемент - q. Для произвольного $x \in X$ и подмножества $\{q, p\} \in \{1, 2, \ldots, r\}$ рассмотрим ограничения $x|_{\{q\}}$, $x|_{\{p\}}$, для которых сформулируем:

Лемму 1 $(\forall x \in X), (\forall \xi \in \Xi): \nu(f \circ (x|_{\{q\}} \times \xi), f \circ (x|_{\{p\}} \times \xi)) \neq 1$, т.е. строчки не могут отличаться только одним элементом.

Для случая s = 1 утверждение тривиальное т.к. это формулировка аксиомы 2 для ФС ранга (r, 1). Рассмотрим теперь случай s > 1.
Допустим противоположное. Пусть $(\exists x \in X), (\exists \xi \in \Xi): \nu(f \circ (x|_{\{q\}} \times \xi), f \circ (x|_{\{p\}} \times \xi)) = 1$.
Рассмотрим тогда корт $x` \in M^r$ такой, что $x`(q) = x`(p) = x(p)$, $(\forall n \neq q, p): x`(n) = x(n)$, тогда $\nu(f \circ (x \times \xi), f \circ (x` \times \xi)) = 1$. Пришли к противоречию с аксиомой 2 $\Rightarrow x \times \xi \notin \Phi$, что противоречит нашему предположению.

Лемма 2 $(\forall x \in X), (\forall \xi \in \Xi): \nu(f \circ (x|_{\{q\}} \times \xi), f \circ (x|_{\{p\}} \times \xi)) \neq 0$, т.е. строчки не могут совпадать.

Среди всех матриц $f \circ \Phi$ можно выделить "хорошие" – это множество Γ и "плохие":

$$\Delta\Gamma = f \circ \Phi \setminus \Gamma = \{\gamma \in (f \circ \Phi) | (\exists \gamma` \in f \circ \Phi): \nu(\gamma, \gamma`) = 1\},$$

причём среди "хороших" матриц не встречается "плохих". Тогда у нас не может быть "плохих" матриц, построенных на кортах удовлетворяющих условиям аксиомы 1. Тогда у нас не может быть и совпадающих строк в матрицах из Γ, т.к. такие матрицы могут быть построены на кортах с совпадающими элементами, ч. и т.д.

Лемма 3 $(\forall i, j \in M)$, найдётся не более чем s-2 элементов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-2} \in N)$:
$f(i \times \alpha_1) = f(j \times \alpha_1), f(i \times \alpha_2) = f(j \times \alpha_2), \ldots, f(i \times \alpha_{s-2}) = f(j \times \alpha_{s-2})$.

[5] Все утверждения и доказательства будем приводить только для одного множества M или N, для второго утверждения аналогичные

Действительно, если найдётся более чем s-2 элементов, например n. тогда: при $n = s$ будет противоречие с леммой 2, если $n = s - 1$, то противоречие с леммой 1.

Лемма 4 (о единственности верификатора)
Если у нас имеется две ФС (Φ, f) и $(\Phi`, g)$ такие, что: $\Phi = \Phi`$, $f = g$, тогда $\Gamma = \Gamma`$.

Допустим $\Gamma \neq \Gamma`$, тогда $(\exists\ \Delta\Gamma \neq \varnothing)$: $((\Delta\Gamma \not\subset \Gamma) \vee (\Delta\Gamma \subseteq \Gamma`)) \wedge ((\Delta\Gamma \not\subset \Gamma`) \vee (\Delta\Gamma \subseteq \Gamma)) \Rightarrow (\exists\ \Delta\Phi \subseteq \Phi)$: $f \circ \Delta\Phi = \Delta\Gamma$. Т.о. $\Phi \neq \Phi`$ что противоречит нашему условию.

Теорема (ФС ранга (2, 2))

При выполнении аксиом ФС ранга (r, s) для случая ранга (2, 2) следует, что:
1. Существует три биекции $\theta: M \to B$, $\lambda: N \to B$, $\chi: B \to B$ так что ФС $\{B, M, N, f\}$ эквивалентна ФС на одном множестве: $\{B, B, B, f\}$.
2. Функция f, действующая на множестве B изотопна некоторой групповой операции, действующей на том же множестве.

1^0 Покажем сначала, что для произвольного $\alpha \in N$ отображение $f_\alpha: M \to B$, такое что $(\forall\ i \in M)$: $f_\alpha(i) \equiv f(i \times \alpha)$ будет биекцией. Действительно, сюръекция отображения f_α следует из аксиомы 3:

$$(\forall\ \alpha \in N), (\forall\ b \in B), (\exists\ i \in M): f(i, \alpha) = b.$$

Инъективность отображения f_α показана в лемме 3.
Аналогично и для отображения $f_i(\alpha) \equiv f(i \times \alpha)$.
2^0. Перейдем к эквивалентной ФС
Итак, преобразования:

$$x: i \mapsto f(i \times \gamma) \equiv x_i,\ \xi: \alpha \mapsto f(k, \alpha) \equiv \xi_\alpha,$$

являются переходом к эквивалентной ФС. Репрезентатор для эквивалентной структуры запишем в виде:

$$f(i \times \alpha) = f(f_\gamma^{-1}(x_i) \times f_k^{-1}(\xi_\alpha)) = f`(x_i\ \xi_\alpha).$$

Далее для простоты по-прежнему будем писать f вместо f`. Верификатор, построенный на точках $x_i, x_j \in B$ и $\xi_\alpha, \xi_\beta \in B$ определяется:

$$g_{11}(f(x_i\ \xi_\beta), f(x_j\ \xi_\beta), f(x_j\ \xi_\alpha)) = f(x_i\ \xi_\alpha)$$

3^0. Теперь покажем, что на B задана структура лупы.
Действительно, из аксиом 3, 4 следует существование правого и левого деления, а из леммы 3 следует единственность такого деления, следовательно, f на B – квазигруппа. Воспользуемся *теоремой Алберта* о том, что *любая квазигруппа изотопна некоторой лупе*, т.е. если $f(x_i, \xi_\alpha)$ квазигруппа, то найдутся биекции:

$$\chi: f \mapsto \chi(f),\ \varphi: x \mapsto \varphi(x),\ \theta: \xi \mapsto \theta(\xi):$$

$$\chi\,(f(\varphi(x_i), \theta(\xi_\alpha))) \text{ – лупа.}$$

Такой переход является эквивалентным преобразованием, введем новое обозначение на бинарную операцию:

$$\chi\,(f(\varphi(x_i), \theta(\xi_\alpha))) \equiv x_i \circ \xi_\alpha,$$

так, что:

$$(\exists!\ \varepsilon \in B), (\forall\ x \in B): x \circ \varepsilon = \varepsilon \circ x = x.$$

4^0. Покажем теперь, что в данной лупе выполняется ассоциативность
Действительно, для произвольных $x, y, z \in B$ с единственным условием $x \neq \varepsilon$, $z \neq \varepsilon$ (аксиома 1) построим верификатор на кортах $<x, \varepsilon>$, $<y \circ z, y>$:

$$x \circ (y \circ z) = g_{11}(x \circ y, \varepsilon \circ y, \varepsilon \circ (y \circ z)) = g_{11}(x \circ y, y, y \circ z). \tag{9}$$

С другой стороны для кортов $<x \circ y, y>$, $<z, \varepsilon>$:

$$(x \circ y) \circ z = g_{11}((x \circ y) \circ \varepsilon,\ y \circ \varepsilon,\ y \circ z) = g_{11}(x \circ y,\ y,\ y \circ z). \tag{10}$$

Сравнивая (9) с (10) приходим к соотношению:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z.$$

Очевидно, что это соотношение выполняется и для $x = \varepsilon$ и/или $z = \varepsilon$. Т.к. данное соотношение выполнено для произвольных точек x, y, z из B, то мы получили ассоциативность введенной операции. Лупа, на которой выполняется ассоциативность, является группой.

6^0. Определим общий вид верификатора «g_{11}»

Для произвольных кортов <x, y>, <z, t> с условием аксиомы 1 построим выражение 9. Действительно, согласно лемме 0.2. $b_{12} \neq b_{22}$, $b_{22} \neq b_{21}$, тогда можно записать следующие равенства:

$$b_{11} = g_{11}(b_{12},\ b_{22},\ b_{21}) = g_{11}((b_{12} \circ (b_{22})^{-1}) \circ b_{22},\ b_{22},\ b_{22} \circ ((b_{22})^{-1} \circ b_{21}) \Rightarrow$$
$$b_{11} = (b_{12} \circ (b_{22})^{-1}) \circ (b_{22} \circ ((b_{22})^{-1} \circ b_{21})) = b_{12} \circ (b_{22})^{-1} \circ b_{21} \tag{11}$$

Иными словами получаем окончательно:

$$\boxed{f_{i\alpha} = f_{i\beta} \circ f_{j\beta}^{-1} \circ f_{j\alpha}.}$$

Теорема доказана.

Литература

1. Ю.И. Кулаков. Элементы теории физических структур (с дополнениями Г.Г. Михайличенко) // Н.: НГУ. 1968.
2. Г.Г. Михайличенко. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.
3. Г.Г. Михайличенко. Двуметрические физические структуры и комплексные числа. ДАН 1991, том 321, №4, с. 677-680.
4. Г.Г. Михайличенко. Простейшие полиметрические геометрии. ДАН 1996, том 348, №1, с. 22-24.
5. А.А. Литвинцев. Комплексная физическая структура ранга (2.2) // В кн.: Г.Г. Михайличенко. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.
6. В.К. Ионин. Абстрактные группы как физические структуры // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. С. 40-43.