УДК
MSC

О соответствии правых почтиобластей точно дважды транзитивным группам

А.А. Симонов
Andrey.Simonoff@gmail.com

Abstract. Определяется правая почтиобласть путём ослабления аксиом почтиобласти. Строится соответствие класса правых почтиобластей и класса точно дважды транзитивных групп.

Keywords: почтиобласть, точно дважды транзитивные группы (neardomain, sharply 2–transitive groups).

В [1, 2] для описания *точно дважды транзитивных групп* введено понятие *почтиобласти*, как алгебраической системы с двумя бинарными операциями $(B_1, 0, \cdot, +)$, для которой справедливы аксиомы:

1. $(B, +)$ — лупа с нейтральным элементом 0;
2. $a + b = 0 \Rightarrow b + a = 0$;
3. $(B_1, \cdot)$ — группа с нейтральным элементом e, где $B_1 = B \setminus \{0\}$;
4. $(\forall x \in B) \quad x \cdot 0 = 0$;
5. $(\forall x, y, z \in B) \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
6. $(\forall a, b \in B)(\exists\, r_{a,b} \in B_1) \quad (x + a) + b = x \cdot r_{a,b} + (a + b)$ для любого $x \in B$.

До последнего времени не известно ни одного примера почтиобласти, которая не была бы почтиполем. В данной работе предлагается ослабить аксиомы почтиобласти, оставив только необходимые для построения точно дважды транзитивных групп. В частности, предлагается отказаться от аксиом 2, 4 и ослабить аксиомы 1, 5.

Рассмотрим расширение почтиобластей, но, к сожалению, при этом перейдя от обычного рассмотрения левых преобразований к правым. Это сделано отнюдь не с целью запутать читателя, а только из благих намерений, полагая, что естественней воспринимать вычитание $x - y$ как то, что из элемента x надо вычесть элемент y. В отличие от мультипликативной операции, где имеются устоявшиеся обозначения для левого и правого делений, в аддитивной операции такого нет.

Определим правую почтиобласть как алгебраическую систему $(B_1, 0, v, \cdot, +, -, h, r)$ с операциями:

$$(+) : B \times B_1 \to B,\ (-) : B \times B_1 \to B,\ (\cdot) : B \times B_1 \to B,\ \text{где } B = B_1 \cup \{1\} \text{ и}$$

$$v : B_1 \to B_1,\ h : B_1 \times B_1 \to B_1,\ r : B_1 \times B_1 \to B_1,$$

для которых выполнены аксиомы
A1. $(\forall x \in B)(\forall y \in B_1)\ (x - y) + y = x$;
A2. $(\forall x \in B)(\forall y \in B_1)\ (x + y) - y = x$;
A3. $(\forall x \in B_1)\ \ x - x = 0$;
A4. $(B_1, \cdot, e)$ — группа с нейтральным элементом $e \in B_1$;
A5. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_1)(\exists\, h(y, z) \in B_1)\ (x + y)z = xh(y, z) + yz$;

A6. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_1 :\ y + z \neq 0)(\exists\, r(y, z) \in B_1)\ (x + y) + z = xr(y, z) + (y + z)$;
A7. $(\forall x \in B)(\forall z \in B_1)(\exists\, v(z) \in B_1)\ (x + (0 - z)) + z = xv(z)$.

В отличие от правой почтиобласти в почтиобласти $h(y, z) = z$ и $v(z) = e$. Аксиомы A1 — A3 определяют алгебраическую систему $(B_1, 0, +, -)$ как правую лупу. Введём обозначения $L(x) = 0 - x$, тогда из A1 следует $L(x) + x = 0$. Т.о. отображение $L : B_1 \to B_1$ определяет левый обратный в правой лупе.

Рассмотрим теперь простейшие следствия и покажем, что

Лемма. *в правой почтиобласти выполнено:*
1. $(\forall x \in B_1)\ 0x = 0$*;*
2. $h(x, y) = EL(x)L(xy)$*;*
3. $r(y, z) = (L(z) - y)^{-1}L(y + z)$*;*
4. $x - z = xv^{-1}(z) + L(z)$*;*
5. $v(z) = EL^2(z)z$*,*
где $E(x) = x^{-1}$*,* EL *— суперпозиция преобразований* L *и* E*.*

Определим отображение $u : B_1 \to B$ в виде $u(x) = 0x$.

Из A5 следует, что $(\forall x, y \in B_1)\ (L(x)+x)y = L(x)h(x, y)+xy = u(y)$, следовательно,

$$h(x, y) = EL(x)(u(y) - xy). \tag{1}$$

Если для произвольных $z, t \in B_1$ последовательно применить A5, то

$$h(y, z)h(yz, t) = h(y, zt),$$

подставляя в которое выражение из (1) с учётом сокращения, получим равенство $(u(z) - yz)EL(yz) = e$, следовательно, $u(z) = L(yz) + yz = 0$. Т.о. выполнены условия 1 и 2 леммы.

Рассмотрим теперь следствия из A6. Пусть $x = L(y+z)r^{-1} \Rightarrow (L(y+z)r^{-1}+y)+z = 0$, откуда получим выражение из условия 3 леммы.

В случае, когда $y + z = 0$, рассмотрим следствия из A7 и A2: $x + L(z) = xv(z) - z$. Произведя замену $x \mapsto xv^{-1}(z)$, придём к справедливости условия 4 леммы.

Распишем A2 с учётом условия 4 $(x + z) - z = (x + z)v^{-1} + L(z) = x$. При $x = 0$ получим равенство $zv^{-1} + L(z) = 0$. Тогда с учётом $L^2(x) = LL(x)$, придём к справедливости условия 5 леммы. $\square$

Т.о. операции "$-$ h, r, v выражаются через операции "$+$"$\cdot$ L, следовательно, алгебраическую систему $(B_1, 0, v, \cdot, +, -, h, r)$ будем понимать как $(B_1, 0, L, \cdot, +)$.

Рассмотрим алгебраическую систему $(H_1, 0, \phi, \cdot)$ из [3], с операциями

$$(\cdot) : H \times H_1 \to H, \phi : H \to H, \text{ где } H = H_1 \cup \{0\},$$

для которых выполнены аксиомы:

F1. $(H_1, \cdot)$ — группа с нейтральным элементом e;

F2. $0x = 0, x \in H_1$;

F3. $\phi(e) = 0$;

F4. $\phi(\phi(x)\phi(y)) = \phi(x\phi(y^{-1}))y, x \in H, y \in H_1 \setminus \{e_1\}$,

Заметим, что близкая алгебраическая система была рассмотрена в [4].

Две алгебраические системы $\mathbf{K_1}$ $\mathcal{A}_1 = (A_1, L_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2, L_2)$ с телами A_i и сигнатурами L_i будут рационально эквивалентны

Покажем теперь, что справедлива

Теорема 1. *Алгебраические системы* $(B_1, 0, L, \cdot, +)$ *и* $(B_1, 0, \phi, \cdot)$ *рационально эквивалентны.*

Введём отображение $\phi : B \to B$, определённое в виде $\phi(x) = x(0-e)+e = xa+e$. Рассмотрим далее его квадрат с учётом условия 2 и 5 леммы

$$\phi^2(x) = (xa+e)a+e = (xL(a)+a)+e = xL(a)EL^2(e) = x.$$

Из определения следует $\phi(e) = a+e = 0$ и $\phi(0) = e$. При помощи отображения ϕ можно выразить аддитивные операции. Действительно, $\phi(x)y = (xa+e)y = xL(y) + y$, следовательно, если $x = zEL(y)$, тогда $z+y = \varphi(zEL(y))y$. Перепишем теперь тождество из A2: $z = (z+y)-y = \phi(zEL(y))y - y$. Введя обозначения $t = \phi(zEL(y))y$, выразим $z = \phi(ty^{-1})L(y)$, тогда $t - y = \phi(ty^{-1})L(y)$.

Вычислим значение $t = (x+z)-(y+z)$ в случае $y \neq L(z)$, воспользовавшись сначала A2: $(x+z) = t+(y+z)$, а затем тождеством 3 леммы: $(x+z) = (tr^{-1}(y,z)+y)+z$. Применяя дважды тождество из A2, придём к тождеству:

$$(x+z)-(y+z) = (x-y)(L(z)-y)^{-1}L(y+z).$$

Перепишем данное тождество с учётом $y \neq e, z = L^{-1}(e)$ заменяя аддитивные бинарные операции их выражениями через функцию ϕ:

$$\phi(\phi(x)E\phi(y)) = \phi(xy^{-1})E\phi E(y) = \phi(xy^{-1})E\phi E(y). \tag{2}$$

При $x = 0$ данное тождество приобретает простой вид $\phi E\phi(y) = E\phi E(y)$, воспользовавшись которым распишем тождество (2) для $y = E\phi E(t)$:

$$\phi(\phi(x)\phi(t)) = \phi(x\phi E(t))t. \tag{3}$$

Т.о. построили отображение $\mathbb{A} : (B_1, 0, L, \cdot, +) \to (B_1, 0, \phi, \cdot)$.

Произведём обратное построение. Рассмотрим выражение из F4 при $x = e, y = t^{-1}$, тогда при условии F2 и F3 придём к равенству $\varphi^2(t) = \varphi(0)t$. С одной стороны $\varphi^4(t) = (\varphi(0))^2 t$, а с другой $\varphi^4(t) = \varphi(\varphi^2(\varphi(t))) = \varphi(\varphi(0)\varphi(t))$. Последнее выражение также можно расписать с учётом F4 и F2: $\varphi(\varphi(0)\varphi(t)) = \varphi(0\varphi(t^{-1}))t = \varphi(0)t$. Т.о. приходим к равенству $\varphi^2(0) = \varphi(0)$, следовательно, $\varphi(0) = e$ и $\varphi^2(t) = t$.

При помощи произвольной биекции $L : B_1 \to B_1$ введём операции

$$x+y = \varphi(xEL(y))y, \; x-y = \varphi(xy^{-1})L(y).$$

С учётом F2, F3 и $\varphi^2 = id$ легко проверить выполнение аксиом A1 — A3 правой лупы. Выполнение A5 следует из определения операции

$$(x+y)z = \varphi(xEL(y))yz = \varphi(xEL(y)L(yz)EL(yz))yz = xEL(y)L(yz)+yz.$$

Для того, чтобы получить A6 воспользуемся тождеством $\varphi^2 = id$ и F4:

$$(x+y)+z = \varphi(\varphi(xEL(y))yEL(z))z =$$

$$\varphi(xEL(y)\varphi E\varphi(yEL(z)))\varphi(yEL(z))z =$$

$$\varphi(xEL(y)\varphi E\varphi(yEL(z))L[\varphi(yEL(z))z]EL[\varphi(yEL(z))z])\varphi(yEL(z))z =$$

$$xEL(y)\varphi E\varphi(yEL(z))L[\varphi(yEL(z))z] + (y+z).$$

Для получения A7 достаточно воспользоваться только тождеством $\varphi^2 = id$:

$$(x + L(z)) + z = \varphi(\varphi(xEL^2(z))L(z)EL(z))z = \varphi^2(xEL^2(z))z = xEL^2(z)z.$$

Для произвольнй биекции L построили отображение $\mathbb{F}_L : (B_1, 0, \varphi, \cdot) \to (B_1, 0, L, \cdot, +)$ так, что справедливо $\mathbb{A} \circ \mathbb{F}_L = id$. В обратную сторону равенство $\mathbb{F}_L \circ \mathbb{A}(B_1, 0, L', \cdot, +') = (B_1, 0, L, \cdot, +)$ возможно только при $L = L'$. Равенство подразумевается в смысле изоморфности алгебраических систем. □

Группа $T_2(B)$ преобразования множества B называется точно дважды транзитивной, если для произвольных пар $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \in \widehat{B^2}$, где $\widehat{B^2} = B^2 \setminus \{(x,x)|x \in B\}$ найдётся единственный элемент $g \in T_2(B)$, для которого справедливо равенство $g(x_1) = y_1, g(x_2) = y_2$.

Теорема 2. *Алгебраические системы $(B_1, 0, \varphi, \cdot)$ и точно дважды транзитивные группы $T_2(B)$ эквивалентны.*

На множестве $\widehat{B^2}$ определим функцию $f : B \times \widehat{B^2} \to B$ в виде

$$f(x, y_1, y_2) = \varphi(x\varphi(y_1 y_2^{-1}))y_2, \tag{4}$$

при условии, что $y_2 \neq 0$ и, в противном случае $f(x, y_1, 0) = xy_1$. Для того, что бы не рассматривать два случая по отдельности, доопределим мультипликативную частичную операцию до группоида на множестве B так, что $(\forall x \in B)\ x0 = \varphi(x)$, тогда $0^{-1} = 0$.

Определим бинарную операцию G на множестве $\widehat{B^2}$ в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, y_2) \\ f(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x_1\varphi(y_1 y_2^{-1}))y_2 \\ \varphi(x_2\varphi(y_1 y_2^{-1}))y_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Предположим, что найдутся пары $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \widehat{B^2}$, что $f(x_1, y_1, y_2) = f(x_2, y_1, y_2)$, тогда, для $y_2 \neq 0$ после умножения обеих частей равенства на y_2^{-1} и преобразования функцией φ, придем к равенству $x_1\varphi(y_1 y_2^{-1}) = x_2\varphi(y_1 y_2^{-1})$, из которого следует, что $x_1 = x_2$. При $y_2 = 0$ получается равенство $x_1 y_1 = x_2 y_1$, следовательно, $x_1 = x_2$. Пришли к противоречию. Т.о. определённая выше операция G будет группоидом.

Легко проверить, что пара $(e, 0) \in \widehat{B^2}$ будет как левым, так и правым нейтральным элементом. Проверим теперь ассоциативность:

$$\varphi(\varphi(x_i\varphi(y_1 y_2^{-1}))y_2\varphi(z_1 z_2^{-1}))z_2 = \varphi(\varphi(x_i\varphi(y_1 y_2^{-1}))\varphi\varphi(y_2\varphi(z_1 z_2^{-1})))z_2 =$$

$$\varphi(x_i\varphi(y_1 y_2^{-1})\varphi E\varphi(y_2\varphi(z_1 z_2^{-1})))\varphi(y_2\varphi(z_1 z_2^{-1}))z_2 =$$
$$\varphi(x_i\varphi(y_1\varphi(z_1 z_2^{-1})E\varphi(y_2\varphi(z_1 z_2^{-1})))\varphi(y_2\varphi(z_1 z_2^{-1}))z_2.$$

Пришли к полугруппе с нейтральным элементом. Найдём теперь левый обратный:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x_2^{-1})E\varphi(x_1 x_2^{-1}) \\ E\varphi(x_1 x_2^{-1}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что он является и правым обратным:

$$\varphi(x_i\varphi(\varphi(x_2^{-1})E\varphi(x_1 x_2^{-1})\varphi(x_1 x_2^{-1})))E\varphi(x_1 x_2^{-1}) = \varphi(x_i x_2^{-1})E\varphi(x_1 x_2^{-1}).$$

Т.о. пришли к тому, что G — группа, но из–за того, что она действует на множестве $\widehat{B^2}$ точно транзитивно, то группа G при действии на множестве B будет точно дважды транзитивной, следовательно, построили отображение $\mathbb{G} : (B_1, 0, \varphi, \cdot) \to T_2(B)$.

Произведём теперь обратное построение и по группе $T_2(B)$ построим алгебраическую систему $(B_1, e_2, \phi, \cdot)$. Для произвольной упорядоченной пары $(e_1, e_2) \in \widehat{B^2}$ можно построить взаимооднозначное отображение $T_2(B) \to \widehat{B^2}$, ставя в соответствие элементу $g \in T_2(B)$ пару $(x_1, x_2) = (e_1, e_2)\cdot g$. Нейтральному элементу группы $T_2(B)$ сопоставится пара (e_1, e_2). Т.о. элементы группы $T_2(B)$ можно представить в виде пар из множества $\widehat{B^2}$ так, что если $(x_1, x_2) = (e_1, e_2) \cdot g$, то $g = [x_1, x_2] \in T_2(B)$, тогда

$$(e_1, e_2) \cdot [x_1, x_2] = (e_1 \cdot [x_1, x_2], e_2 \cdot [x_1, x_2]) = (x_1, x_2). \tag{6}$$

При последовательном преобразовании пары (e_1, e_2) элементами $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$ придем к равенству

$$[x_1, x_2][y_1, y_2] = [x_1 \cdot [y_1, y_2], x_2 \cdot [y_1, y_2]], \tag{7}$$

из которого, с учётом (6), следует, что на подмножестве $B_1 = \{x \in B | [x, e_2] \in T_2(B)\}$ можно естественным образом ввести структуру группы. Отображение $e_1 \cdot [x, e_2] \mapsto x$ индуцирует на B_1 структуру группы. Умножение в группе B_1 также, как и в группе $T_2(B)$ будем писать без точки. Расширим групповую операцию до частичной операции $B \times B_1 \to B$, доопределив её в виде $e_2 y = e_2 \cdot [y, e_2] = e_2$ так, что e_2 будет левым анулятором в частичной операции $(\cdot) : B \times B_1 \to B$.

Из (6) и (7) следует, что элемент $[e_2, e_1]$ будет инвалютивным элементом группы $T_2(B)$. Определим $\phi : B \to B$ в виде $\phi(x) = x \cdot [e_2, e_1]$, тогда $\phi(e_1) = e_2$ и

$$[e_2, e_1][x_2, x_1] = [x_1, x_2] = [\phi(x_1), \phi(x_2)][e_2, e_1]. \tag{8}$$

Определим подмножество $B_0 = B_1 \setminus \{e_1\}$. Для произвольного $[e_1, x_2] \in T_2(B)$, при $x_2 \in B_0$ можно записать

$$[e_1, x_2] = [x_2^{-1}, e_1][x_2, e_2] = [\phi(x_2^{-1}), e_2][e_2, e_1][x_2, e_2],$$

с другой стороны, с учётом (8) для $[e_1, x_2]$ справедливо

$$[e_1, x_2] = [e_2, e_1][\varphi(x_2), e_2][e_2, e_1].$$

Воспользовавшись полученными двумя выражениями и приравнивая результаты преобразования произвольного $t \in B$ элементом $[e_1, x_2] \in T_2(B)$, придём к тождеству

$$\phi(\phi(t)\phi(x_2)) = \phi(t\phi(x_2^{-1}))x_2, \; t \in B, x_2 \in B_0.$$

Построено отображение $\mathbb{F}_{(e_1,e_2)} : T_2(B) \to (B_1, e_2, \phi, \cdot)$, ставящее в соответствие группе $T_2(B)$ алгебраическую систему $(B_1, e_2, \phi, \cdot)$.

Заметим ещё, что для произвольного $[x_1, x_2] \in T_2(B)$ можно записать

$$[x_1, x_2] = \begin{cases} [\phi(x_1 x_2^{-1}), e_2][e_2, e_1][x_2, e_2], & x_2 \in B_1 \\ [x_1, e_2], & x_2 = e_2 \end{cases}.$$

Тогда для произвольного $t \in B$:

$$t \cdot [x_1, x_2] = t \cdot [\phi(x_1 x_2^{-1}), e_2][e_2, e_1][x_2, e_2] = \phi(t\phi(x_1 x_2^{-1}))x_2, \tag{9}$$

при $x_2 \neq e_2$ и $t \cdot [x_1, e_2] = tx_1$. Сравнивая (4), (5) с (9) и (7) приходим к тому, что имеется естественный изоморфизм $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}_{(e_1,e_2)} : T_2(B) \to T_2'(B)$, т.о. $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}_{(e_1,e_2)} = id$. Изоморфизм алгебраических систем $\mathbb{F}_{(e_1,e_2)} \circ \mathbb{G} : (B_1, 0, \varphi, \cdot) \to (B_1', e_2, \phi, \cdot')$ задаётся отображением $\mathbb{F}_{(e_1,e_2)} \circ \mathbb{G} : x \mapsto \varphi(x\varphi(e_1 e_2^{-1}))e_2$, т.о. $\mathbb{F}_{(e_1,e_2)} \circ \mathbb{G} = id$. $\square$

Рассмотрим несколько примеров правых почтиобластей, построенных над телом $\mathbb{K}$, для которого $\varphi(x) = -x+1$, $x \in \mathbb{K}$. В качестве первого примера рассмотрим $L(x) = ax$:

$$x \oplus y = -xa^{-1} + y,\ x \ominus y = -xa + ay,\ r(y,z) = -a^{-1},\ v(z) = a^{-2}.$$

В такой правой почтиобласти выполняется двухсторонняя дистрибутивность и справедливо тождество $L(x \oplus y) = L(x) \oplus L(y)$, но не выполнены тождества Бола и Брака.

Для второго примера над телом рассмотрим $L(x) = -x^{-1}$, тогда

$$x \oplus y = xy^2 + y,\ x \ominus y = xy^{-2} - y^{-1},\ r(y,z) = y^2 z(z+y)^{-1}(yz+1),\ h(y,z) = z^{-1}.$$

Для данной правой лупы $L(x \oplus y) \neq L(x) \oplus L(y)$, но выполнено $L(x) \oplus x = x \oplus L(x) = 0$.

Список литературы

[1] *Karzel H.* Inzidenzgruppen I. Lecture Notes by Pieper, I. and Sorensen, K., University of Hamburg (1965), 123-135.

[2] *Karzel H.* Zusammenhange zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechtecksaxiom, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32(1968), 191-206.

[3] *А.А. Симонов* О соответствии между почтиобластями и группами. Алгебра и Логика. 2006, 45, 2.

[4] *Leissner W.* On the Functional Equation $\phi(xy^{-1}) = \phi(\phi(x)\phi(y)^{-1})\phi(y^{-1})$ over a Group. Report of Meetings. Elfte internationale Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach vom 14. bis 20. Dezember 1973.