Алгебра и логика, 45, № 2 (2006), 239—251

УДК 512.543.7+512.558

О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ПОЧТИОБЛАСТЯМИ И ГРУППАМИ

А. А. СИМОНОВ

В работе [1] изучалась связь между классом всех колец с единицей и некоторым классом метабелевых групп с двумя фиксированными элементами. При этом, если кольцо было определено на множестве M, группа определялась на множестве M^3. В настоящей работе рассматривается связь между алгебраической системой, близкой к почтиобласти (neardomain), определённой на множестве B, и точно дважды транзитивными группами на подмножестве множества B^2. В качестве примера такой алгебраической системы можно рассмотреть тело K, естественным образом связанное с группой $T_2(K)$, являющейся полупрямым произведением аддитивной группы тела на его мультипликативную группу с умножением

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2).$$

Это умножение задаёт преобразование множества K по правилу $x \mapsto xa + b$, определяя точно дважды транзитивную группу $T_2(K)$ преобразования множества K. Тело K является частным случаем алгебраической системы $(B, \cdot, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$, возникающей в задаче поиска решений *физической структуры* ранга $(3, 2)$ на абстрактных множествах [2]. Данная алгебраическая система эквивалентна алгебраической системе с двумя бинарными операциями и близка к почтиобласти. В [3, сс. 123–135; 4] почтиобласть определялась как алгебраическая система с двумя бинарными операциями $(B, \cdot, +, e_1, e_2)$, для которой справедливы следующие аксиомы:

1) $(B, +)$ — лупа с нейтральным элементом e_2;

2) $a + b = e_2 \Rightarrow b + a = e_2$;

3) $(B^*, \cdot)$ — группа с нейтральным элементом e_1, где $B^* = B \setminus \{e_2\}$;

4) $(\forall x \in B)\, x \cdot e_2 = e_2$;

5) $(\forall x, y, z \in B)\, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;

6) $(\forall a, b \in B)(\exists r_{a,b} \in B^*)(\forall x)\, (x + a) + b = x \cdot r_{a,b} + (a + b)$.

Над почтиобластью B всегда можно построить точно дважды транзитивную группу $T_2(B)$ преобразования множества B. Хотя почтиобласть на конечном множестве всегда является почтиполем, до сих пор не известен пример почтиобласти, не являющейся почтиполем.

Заметим, что аксиомы 1–6 записаны с учётом правой дистрибутивности в отличие от оригинала, где аксиомы записывались с учётом левой дистрибутивности. Это сделано, с одной стороны, для того, чтобы получающаяся в дальнейшем операция вычитания была правой, а с другой стороны — для лучшей связи с [5, лемма 7.5.1], где рассматривалось эквивалентное определение тела K с помощью действующей на мультипликативной группе без единицы $B^\# = B^* \setminus \{e_1\}$ унарной операции φ, удовлетворяющей аксиомам:

1) $\varphi(yxy^{-1}) = y\varphi(x)y^{-1}$, $x \in B^\#$, $y \in B^*$;

2) $\varphi(\varphi(x)) = x$, $x \in B^\#$;

3) $\varphi(xy^{-1}) = \varphi(\varphi(x)(\varphi(y))^{-1})\varphi(y^{-1})$, $x, y \in B^\#$, $x \neq y$;

4) элемент $a = \varphi(x^{-1})x(\varphi(x))^{-1}$ не зависит от выбора x в $B^\#$.

При этом доказывалось существование единственного тела K, мультипликативная группа которого совпадает с группой B^* и при этом $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $a = -1$, $\varphi(x) = 1 - x$. Множество $K = B^* \cup \{e_2\}$ строилось присоединением нового элемента $e_2 \notin B^*$. Действие унарной операции φ расширялось на K так, чтобы $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_1$. Мультипликативная операция расширялась на K так, что e_2 становился нулём в данной операции.

В предлагаемой работе рассматривается более общая, чем почтиобласть (за счёт ослабления первой аксиомы, а также отказа от второй и четвертой аксиом), алгебраическая система $(B^\#, \cdot, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$ и показывается её связь с группой $T_2(B)$. В заключении приводятся примеры локальных групп $T_2(B)$ и соответствующие алгебраические системы, не являющиеся почтиобластями.

Полученные в данной работе результаты позволяют решить одну из задач теории физических структур для ранга $(3, 2)$.

§ 1. Предварительные сведения

Далее будем рассматривать алгебраическую систему $(B, \cdot, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$ с одной частичной бинарной операцией $(\cdot) : B \times B^* \to B$, унарными операциями $\varphi : B \to B$ и $(^{-1}) : B^* \to B^*$, где $B^* = B \setminus \{e_2\}$, для которой справедливы аксиомы

A1: $(B^*, \cdot, ^{-1}, e_1)$ — группа;

A2: $e_2 x = e_2$, $x \in B^*$;

A3: $\varphi(e_1) = e_2$;

A4: $\varphi(\varphi(x)\varphi(y)) = \varphi(x\varphi(y^{-1}))y,$ (1)

где $x \in B$, $y \in B^{\#}$, $B^{\#} = B^* \setminus \{e_1\}$.

Рассмотрим простейшие свойства данной алгебраической системы.

ЛЕММА 1. *Для операции φ справедливо*:

1) $\varphi^2 = \mathrm{id}$, $x \in B$;

2) $\rho^3 = \mathrm{id}$, *где* $\rho(x) = \varphi(x^{-1})$, $x \in B^{\#}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма следует из тождества (1). Равенство $\varphi^2(y) = \varphi(e_2)y$ для $y \in B^{\#}$ получается при $x = e_1$ с учётом замены $y \mapsto y^{-1}$ и аксиомы A2. Распишем $\varphi^4(y)$, воспользовавшись полученным выражением: $\varphi^4(y) = (\varphi(e_2))^2 y$, и из (1) получаем $\varphi(\varphi^2(\varphi(y))) = \varphi(\varphi(e_2)\varphi(y)) = \varphi(e_2)y$. Сравнивая оба выражения, приходим к равенству $\varphi(e_2) = e_1$, а следовательно, и к тождеству $\varphi^2 = \mathrm{id}$, $x \in B$. Второе утверждение леммы получается при $x^{-1} = \varphi(y^{-1})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Применяя два тождества из леммы* 1 *к тождеству* (1), *из* A3 *легко получить выражение для тела из* [5, лемма 7.5.1].

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для группы B^* эквивалентны следующие два утверждения*:

1) $(b \in B^{\#})\, b = b^{-1}$;

2) $(c \in B^{\#})\, \varphi(c) = c$.

Действительно, второе тождество леммы 1 можно переписать в виде $\varphi E \varphi(x) = E \varphi E(x)$, где $E(x) = x^{-1}$. Полагая $E\varphi(b) = c$ и рассматривая полученное равенство для $b \in B^{\#}$, из первого утверждения следует второе и наоборот.

Более того, справедлива

ЛЕММА 2. *Если в группе B^* найдётся элемент $c = \varphi(c)$, то он будет единственным, а элемент b будет принадлежать центру группы B^*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, найдутся два таких элемента $c_1 \neq c_2$, следовательно, найдутся два элемента $b_1 = \varphi(c_1^{-1}) \neq \varphi(c_2^{-1}) = b_2$, для которых $b_1 = b_1^{-1}$, $b_2 = b_2^{-1}$. Используя свойства этих элементов, запишем тождество (1) как

$$\varphi(c_1\varphi(b_2)) = \varphi(\varphi(c_1)\varphi(b_2)) = \varphi(c_1\varphi(b_2^{-1}))b_2 = \varphi(c_1\varphi(b_2))b_2.$$

Это возможно только в случае, когда $\varphi(c_1\varphi(b_2)) = e_2$ или $b_2 = e_1$, а поскольку $b_2 \in B^{\#}$, должно выполняться равенство $c_1\varphi(b_2) = e_1$. Получаем противоречие $c_1^{-1} = \varphi(b_2) = c_2^{-1}$, следовательно, справедливо первое утверждение леммы.

Если элемент b единствен, то для произвольного $x \in B^*$ выполняется $x^{-1}bx = b$, значит, элемент b принадлежит центру группы B^*.

Рассмотрим далее группу G с нейтральным элементом E, обладающую подгруппой $G_0 < G$ и элементом $A \in G \setminus G_0$ таким, что $A^2 = E$. Элементы множества $G' = G_0 \cup \{A\}$ будем обозначать строчными буквами, а остальные элементы множества G — заглавными.

Потребуем, чтобы группа G обладала свойством

$$(\forall X \in G)(\exists!(x_1, x_2) \in G_0 \times G')\, X = x_1 A x_2. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение $P : G \to G'$ (которое будем называть *проекцией*), удовлетворяющее требованиям

P1: $(\forall x \in G_0)\, P(x) = x,\ P(Ax) = A$;

P2: $(\forall X, Y \in G)\, P(XY) = P(P(X)Y)$.

Рассмотрим простейшие свойства группы G и проекции P. Тождество P2 для элементов $X = xy^{-1}A$, $Y = Ay$ имеет вид

$$(\forall x, y \in G')\, P(P(xy^{-1}A)Ay) = x. \tag{3}$$

Тогда из $x \in G_0 \setminus \{E\}$ вытекает, что $P(xA) \in G_0 \setminus \{E\}$.

Тождество P2 для элементов $X = Ax$, $Y = A$ с учётом P1 имеет вид

$$(\forall x \in G_0)\, P(AxA) = E. \tag{4}$$

Рассмотрим множество $\widehat{G'^2} = G'^2 \setminus \Delta_{G'}$, где $\Delta_{G'} = \{(x, x) \mid x \in G'\}$, и построим отображение $U : G \to \widehat{G'^2}$ по правилу $U : X \mapsto (P(X), P(AX))$.

ЛЕММА 3. *U биективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем отображение U с учётом свойства (2) группы G. Если $x_1 \neq E$, $x_2 \neq A$, то в силу P1, P2 и следствия из (3), получим

$$P(X) = P(x_1Ax_2) = P(P(x_1A)x_2) = P(x_1A)x_2.$$

В случае $x_1 = E$, $x_2 \neq A$ из P1 вытекает $P(X) = P(Ax_2) = A$. Если $x_2 = A$, то $P(X) = P(x_1) = x_1$.

Рассмотрим вторую компоненту отображения U. Для $x_2 \neq A$ имеем

$$P(AX) = P(Ax_1Ax_2) = P(P(Ax_1A)x_2) = P(Ex_2) = x_2,$$

здесь последовательно применялись свойство P2 и тождество (4). При $x_2 = A$ выполняется

$$P(AX) = P(Ax_1AA) = P(Ax_1) = A$$

по свойству P1. Итак, отображение U может быть записано в виде

$$U(x_1Ax_2) = \begin{cases} (P(x_1A)x_2, x_2), & \text{если } x_1 \neq E,\ x_2 \neq A, \\ (A, x_2), & \text{если } x_1 = E,\ x_2 \neq A, \\ (x_1, A), & \text{если } x_2 = A. \end{cases} \tag{5}$$

Первая и вторая компоненты отображения U не равны друг другу. Это очевидно для случая $x_1 = E$ и $x_2 = A$. Рассмотрим случай $x_1 \neq E$,

$x_2 \neq A$. Предположим обратное. Пусть найдётся пара (x_1, x_2) из рассматриваемого случая, для которой справедливо равенство $P(x_1A)x_2 = x_2$, тогда $P(x_1A) = E$. Полученное равенство противоречит следствию из (3), значит, $(\forall X \in G)\, U(X) \in \widehat{G'^2}$.

Построим отображение $U' : \widehat{G'^2} \to G$ по правилу

$$U'(x_1, x_2) = P(x_1 x_2^{-1} A) A x_2. \tag{6}$$

Простая проверка показывает, что $UU' = \mathrm{id}_{\widehat{G'^2}}$ и $U'U = \mathrm{id}_G$, следовательно, $U' = U^{-1}$, а отображение U является биекцией. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство основной теоремы

ТЕОРЕМА. *Существует взаимно однозначное соответствие между алгебраическими системами* $(B, \cdot, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$ *с тождествами* A1–A4 *и группами G со свойством* (2) *и проекцией P, удовлетворяющей тождествам* P1 *и* P2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала алгебраическую систему $(B, \cdot, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$ и при помощи функции $f : B \times \widehat{B^2} \to B$, где $\widehat{B^2} = B \times \times B \setminus \Delta_B$, построим группоид $T_2(B) = (\widehat{B^2}, \cdot)$ с умножением

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)). \tag{7}$$

Пусть функция f имеет вид

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{cases} \varphi(x\varphi(y_1 y_2^{-1}))y_2, & \text{если } y_2 \neq e_2, \\ x y_1, & \text{если } y_2 = e_2. \end{cases} \tag{8}$$

В силу A2, A3 и тождества $\varphi^2 = \mathrm{id}$ функция f на выделенных элементах принимает значения

$$f(e_1, y_1, y_2) = y_1,\ f(e_2, y_1, y_2) = y_2,\ f(x, e_1, e_2) = x,\ f(x, e_2, e_1) = \varphi(x),$$

поэтому элемент $(e_1, e_2) \in \widehat{B^2}$ является нейтральным элементом группоида. Прямой проверкой убедимся, что для произвольного $(x_1, x_2) \in \widehat{B^2}$ элемент

$$(x_1, x_2)^{-1} = \begin{cases} (\varphi(x_2^{-1})(\varphi(x_1 x_2^{-1}))^{-1}, (\varphi(x_1 x_2^{-1}))^{-1}), & \text{если } x_2 \neq e_2, \\ (x_1^{-1}, e_2), & \text{если } x_2 = e_2, \end{cases}$$

будет двусторонним обратным.

Для проверки ассоциативности воспользуемся тождеством, получающимся из (1) заменой $y \mapsto E\varphi E(y)$ и при помощи второго тождества леммы 1

$$\varphi(\varphi(x)E\varphi(y)) = \varphi(xy^{-1})\varphi E\varphi(y). \tag{9}$$

Ассоциативность для элементов $(x_1, e_2), (y_1, e_2), (z_1, e_2)$ очевидна, т. к. она эквивалентна ассоциативности для тройки x_1, y_1, z_1. Рассмотрим случай, когда y_2, z_2 не равны e_2. Взяв произведение $((x_1, x_2)(y_1, y_2))(z_1, z_2)$, придём к выражению для i-ой компоненты, $i = 1, 2$:

$$\varphi(\varphi(x_i\varphi(y_1y_2^{-1}))y_2\varphi(z_1z_2^{-1}))z_2. \tag{10}$$

Рассмотрим произведение $(x_1, x_2)((y_1, y_2)(z_1, z_2))$, тогда для i-ой компоненты получим выражение:

$$\varphi(x_i\varphi(\varphi(y_1\varphi(z_1z_2^{-1}))[\varphi(y_2\varphi(z_1z_2^{-1}))]^{-1}))\varphi(y_2\varphi(z_1z_2^{-1}))z_2.$$

Применим к нему тождество (9) и получим

$$\varphi(x_i\varphi(y_1y_2^{-1})\varphi([\varphi(y_2\varphi(z_1z_2^{-1}))]^{-1}))\varphi(y_2\varphi(z_1z_2^{-1}))z_2.$$

Далее воспользуемся тождеством (1) и придём к выражению:

$$\varphi(\varphi(x_i\varphi(y_1y_2^{-1}))\varphi(\varphi(y_2\varphi(z_1z_2^{-1}))))z_2,$$

которое преобразуется в (10) после применения тождества 1 леммы 1. Таким образом, группоид $T_2(B)$ является группой.

Положим $A = (e_2, e_1)$,

$$P(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1, e_2), & \text{если } x_1 \neq e_2, \\ (e_2, e_1), & \text{если } x_1 = e_2, \end{cases}$$

тогда группа $T_2(B)$ обладает свойством (2), а для проекции справедливы тождества P1, P2.

Обратно. Рассмотрим умножение пар $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \widehat{G'^2}$, индуцируемое умножением на G

$$\begin{aligned}(x_1, x_2)(y_1, y_2) &= U(U^{-1}(x_1, x_2)U^{-1}(y_1, y_2)) \\ &= U(P(x_1x_2^{-1}A)Ax_2P(y_1y_2^{-1}A)Ay_2),\end{aligned} \tag{11}$$

задающее группу $\widehat{G'^2}$, изоморфную G. Покажем, что произведение (11) можно записать при помощи отображения $F : G' \times \widehat{G'^2} \to G'$ в виде

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (F(x_1, y_1, y_2), F(x_2, y_1, y_2)). \tag{12}$$

Первая компонента (11) с учётом (3) принимает вид

$$P(P(P(x_1 x_2^{-1} A)Ax_2)P(y_1 y_2^{-1} A)Ay_2) = P(x_1 P(y_1 y_2^{-1} A)Ay_2).$$

Вторая компонента в силу (3) и (4) для случаев $x_1 = Ax_2$ и $x_1 \neq Ax_2$ с учётом следствия из (3) принимает вид

$$P(P(AP(x_1 x_2^{-1} A)A)x_2 P(y_1 y_2^{-1} A)Ay_2) = P(x_2 P(y_1 y_2^{-1} A)Ay_2),$$

следовательно, в силу тождества P2, функция F может быть записана как

$$F(x, y_1, y_2) = P(P(xP(y_1 y_2^{-1} A)A)y_2).$$

Введём частичную операцию $(\odot) : G' \times G_0 \to G'$ по формуле $x \odot y \equiv \equiv P(xy)$ и функцию $\phi(x) \equiv P(xA)$, для которых справедливо $A \odot x = A$, $\phi^2 = \mathrm{id}$, $\phi(E) = A$. С учётом P2 перепишем функцию F в новых обозначениях:

$$F(x, y_1, y_2) = \phi(x \odot \phi(y_1 y_2^{-1})) \odot y_2. \tag{13}$$

Функция F на элементах E, A принимает значения $F(x, E, A) = x$, $F(x, A, E) = \phi(x)$, $F(E, x, y) = x$, $F(A, x, y) = y$. Тогда

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1, x_2)(A, E)(A, E)(y_1, y_2) = (\phi(x_1), \phi(x_2))(y_2, y_1).$$

Из последнего равенства, полагая $y = y_1 y_2^{-1}$ при $y_1, y_2 \in G_0$, в силу (13) получим

$$\phi(\phi(x) \odot \phi(y)) = \phi(x \odot \phi(y^{-1})) \odot y,$$

откуда следует, что на G' индуцирована алгебраическая система $(G', \odot, {}^{-1}, \phi, E, A)$.

В первой части доказательства построено отображение $T_2 : B \to \to T_2(B)$, а во второй — отображение $\psi : G \to G'$ и изоморфизм U групп G и $\widehat{G'^2}$, означающий, что $T_2(\psi(G)) \simeq G$.

Алгебраические системы $(B, \cdot, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$ и $(\psi(T_2(B)), \odot, ^{-1}, \phi,$ $(e_1, e_2), (e_2, e_1))$ также изоморфны, изоморфизм $\lambda : B \to \psi(T_2(B))$ зададим в виде

$$\lambda(x) = \begin{cases} (x, e_2), & \text{если } x \in B^*, \\ (e_2, e_1), & \text{если } x = e_2, \end{cases}$$

поэтому $\psi(T_2(B)) \simeq B$. Теорема доказана.

§ 3. Следствия и частные случаи

СЛЕДСТВИЕ 3. *Справедливо соотношение* $B_1 \simeq B_2 \Leftrightarrow T_2(B_1) \simeq$ $\simeq T_2(B_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi : B_1 \to B_2$ задаёт изоморфизм алгебраических систем B_1 и B_2, т. е. $\chi(x \cdot_1 y) = \chi(x) \cdot_2 \chi(y)$ и $\chi\varphi_1\chi^{-1} =$ $= \varphi_2$. Если умножение в группе $T_2(B_1)$ строится при помощи функции $f_1(x, y_1, y_2)$ из (8), то в группе $T_2(B_2)$ — при помощи функции $f_2(x, y_1, y_2) = \chi(f_1(\chi^{-1}(x), \chi^{-1}(y_1), \chi^{-1}(y_2)))$ так, что $\chi^2 : T_2(B_1) \to$ $T_2(B_2)$, где $\chi^2(x_1, x_2) = (\chi(x_1), \chi(x_2))$ задаёт изоморфизм. Для проекций P_1 и P_2 справедливо $\chi P_1 = P_2 \chi$.

Пусть $G \simeq H$, т. е. $\chi : G \to H$, следовательно, $\chi(A_G) = A_H$ и $\chi P_G =$ $= P_H \chi$, а для подгрупп $G_1 < G$ и $H_1 < H$ имеет место $\chi : G_1 \to H_1$. Тогда $\chi : G' \to H'$ будет задавать изоморфизм алгебраических систем G' и H'.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Функция* φ *задает изоморфизм алгебраических систем* $(B, \cdot, E, \varphi, e_1, e_2)$ *и* $(B, \cdot_\varphi, \varphi E \varphi, \varphi, e_2, e_1)$, *где* $x \cdot_\varphi y = \varphi(\varphi(x) \cdot \varphi(y))$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Для произвольного* $X \in \{(x_1, x_2) \in T_2(B) \mid x_1 \neq$ $\neq e_1\}$ *справедливо*

$$A = P(X^{-1}A)AXA(P(XA))^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямой проверке.

СЛЕДСТВИЕ 6. *На множестве* $B \setminus \{c\}$, *где* $\varphi(c) = c$, *определена группа с нейтральным элементом* e_1 *и умножением* $x \odot y =$ $= \varphi(x\varphi(y(\varphi(y))^{-1}))\varphi(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим централизатор $C_{T_2(B)}(A) < T_2(B)$, который состоит из элементов $X = (x, \varphi(x)) \in C_{T_2(B)}(A)$, где $x \in B \setminus \{c\}$. Для произвольных $X, Y \in C_{T_2(B)}(A)$ можно записать $(x, \varphi(x))(y, \varphi(y)) = (x \odot y, \varphi(x \odot y))$, где $x \odot y = \varphi(x\varphi(y(\varphi(y))^{-1}))\varphi(y)$. Таким образом, определен естественный изоморфизм $C_{T_2(B)}(A) \to B \setminus \{c\}$.

В алгебраической системе B для произвольного $a \in B^*$ определим частичные операции *сложения* $x \oplus y = \varphi(x(ay)^{-1})y$ и *вычитания* $x \ominus y = \varphi(xy^{-1})ay = xy^{-1}a^2y \oplus ay$, $x \in B$, $y \in B^*$. Для данных операций справедливо $(x \oplus y) \ominus y = x$ и $(x \ominus y) \oplus y = x$.

Операция сложения является группоидом с левым нейтральным элементом e_2 и левым обратным $ax \oplus x = e_2$. Для обеих операций справедлива правосторонняя дистрибутивность: $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$, $(x \ominus y)z = xz \ominus yz$.

Алгебраическая система $(B, \oplus, \cdot)$ с определённой выше аддитивной операцией будет близка к почтиобласти, так как $(\forall y, z \in B)\,(\exists! r_{y,z} \in B)\,(\forall x \in B)\,(x \oplus y) \oplus z = x \cdot r_{y,z} \oplus (y \oplus z)$, где

$$r_{y,z} = \begin{cases} (\varphi(azy^{-1})ay)^{-1}a\varphi(y(az)^{-1})z, & \text{если } y \neq az, \\ (aaz)^{-1}z, & \text{если } y = az. \end{cases}$$

Если, кроме того, справедливо тождество, близкое тождеству из следствия 5, а именно $a = \varphi(x^{-1})axa(\varphi(x))^{-1}$, $x \in B^{\#}$, то операция сложения ассоциативна; если при этом $a^2 = e_1$, то данная операция задаёт абелеву группу.

В качестве примера можно рассмотреть задачу, возникающую в теории физических структур [6]. В общем случае, физическая структура ранга (r, s), где r, s — натуральные числа, определяется на множествах M, N, B тогда и только тогда, когда определены такие нетривиальные функциональные соответствия $f : M \times N \to B$ и $g : B^{rs-1} \to B$, что для произвольного кортежа $\langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle \in \widehat{M^r} \subset M^r$ и $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle \in \widehat{N^s} \subset N^s$ справедливо тождество

$$f(i_1, \alpha_1) = g(f(i_1, \alpha_2), f(i_1, \alpha_3), \dots f(i_r, \alpha_s)).$$

Для множеств M, N, B требуется найти соответствия f, g, которые задают физическую структуру ранга (r, s). Такая задача при локальном рассмотрении на гладких многообразиях была решена в случае $B \subseteq \mathbb{R}$ для произвольного ранга, в случае $B \subseteq \mathbb{R}^2$ — для ранга $(2, n)$, в случае $B \subseteq \mathbb{R}^3$ — для ранга $(2, 2)$ (см. [7, § 7]). Во всех случаях было найдено соответствие f. Соответствие g было найдено только для $B \subseteq \mathbb{R}$ наряду с некоторыми простейшими соответствиями в остальных случаях.

В [8] показано, что задачу теории физических структур можно сформулировать в эквивалентном виде, используя обобщение матричного умножения (когда умножение двух матриц определяется не через билинейную функцию для строки и столбца перемножаемых матриц, а посредством произвольной функции f). Функции f физической структуры и обобщённого матричного умножения с точностью до эквивалентного преобразования, связанного с преобразованием входящих множеств, совпадают. Физическая структура ранга $(3, 2)$ в эквивалентном виде обобщённого матричного умножения строится над группой $T_2(B)$, рассмотренной в данной статье, а функциональное соответствие f физической структуры можно записать в виде (8) или через аддитивную операцию $f(x, y_1, y_2) = x(y_1 \ominus y_2) \oplus y_2$ при $y_2 \neq e_2$ и $f(x, y_1, e_2) = xy_1$. Функциональное соответствие g строится при помощи тождества на группе $T_2(B)$:

$$(x_{i\alpha}, x_{k\alpha}) = (x_{i\beta}, x_{k\beta}) \cdot (x_{j\beta}, x_{l\beta})^{-1} \cdot (x_{j\alpha}, x_{l\alpha}),$$

если рассматривать равенство только по первой или только по второй компоненте.

Приведем явный вид аддитивной и мультипликативной операций для физической структуры ранга $(3, 2)$ над множеством $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (см. [7, § 7, с. 114]), при помощи которых легко строится явный вид функциональных соответствий f и g.

РЕШЕНИЕ 1. Выделенные элементы: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 0)$, $a = -(-1, 0)$; операции:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + \varepsilon x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), \ \varepsilon = -1, 0, 1,$$

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

РЕШЕНИЕ 2. Выделенные элементы: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,0)$, $a = (-1,0)$; операции:

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1^c),\ c\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\},$$

$$(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2).$$

РЕШЕНИЕ 3. Выделенные элементы: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,0)$, $a = (-1,0)$; операции:

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1^2 + (x_1-1)x_1y_1^2\ln|y_1|),$$

$$(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2+2x_1y_1\ln|y_1|).$$

РЕШЕНИЕ 4. Выделенные элементы: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $a = (-1,0)$; операции:

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2),$$

$$(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2) = \left(y_1x_2 - x_1y_2, (y_1x_2 - x_1y_2)\frac{y_2}{y_1} - \frac{x_1}{y_1}\right).$$

В решениях 2–4 мультипликативные операции изоморфны. Во всех случаях, за исключением последнего, нулевой элемент e_2 в мультипликативной операции является двусторонним. В решении 4 нулевой элемент только левосторонний, аддитивная операция не является лупой, но для неё справедливо тождество, характерное для луп Бола $(((z\oplus x)\oplus y)\oplus x) = (z\oplus((x\oplus y)\oplus x))$. Лупа из решения 3 не является лупой Бола или лупой Брака, что характерно для K-луп (гирогрупп) [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Мальцев*, Об одном соответствии между кольцами и группами, Матем. сб., **50**, № 3 (1960), 257—266.
2. *А. А. Симонов*, Физическая структура ранга $(3,2)$, Наука, культура, образование, №№ 4-5, 2000, 108—112.
3. *H. Karzel*, Inzidensgruppen. I, in: I. Pieper, K. Sörensen (eds.), Lecture notes, Univ. Hamburg, 1965.

4. *H. Karzel*, Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechtecksaxiom Abh. Math. Semin. Univ. Hamb., **32** (1968), 191—206.
5. *П. М. Кон*, Свободные кольца и их связи, М., Мир, 1975.
6. *Ю. И. Кулаков*, Теория физических структур, М., 2004.
7. *Г. Г. Михайличенко*, Групповая симметрия физических структур, Барнаул, БГПУ, 2003.
8. *А. А. Симонов*, Приложение 2 в книге: *Ю. И. Кулаков*, Теория физических структур, М., 2004, 673—707.
9. *Л. В. Сабинин*, О гирогруппах А. Унгара, Успехи матем. н., **50**, № 5 (1995), 251—252.

Поступило 24 марта 2005 г.

Окончательный вариант 21 марта 2006 г.

Адрес автора:

СИМОНОВ Андрей Артёмович, п/я 149, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: sim@online.nsk.su