Псевдоматричные группы и физические структуры

Симонов Андрей Артёмович

25 августа 2014 г.

УДК 512.74, 512.643.8

Аннотация. На множестве прямоугольных матриц определяется операция псевдоматричного умножения, отличающаяся от стандартного умножения матриц. Приводятся примеры псевдоматричных групп. Обычное матричное умножение является частным случаем псевдоматричного умножения.

Определяются трёхсортные алгебры с псевдоматричным умножением, а также физические структуры. Устанавливается их категорная эквивалентность.

Ключевые слова: группа матриц, псевдоматричное умножение, физическая структура, категория.

Введение

Кольцо квадратных матриц $M_n(R)$ над полем или кольцом R естественным образом появляется как кольцо эндоморфизмов векторного пространства или модуля над R. Умножение матриц строится при помощи функции $f : R^{2n} \to R$:

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = xy^T, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — строки, а y^T — столбец.

Для произвольной матрицы $A \in M_n(R)$, при помощи функции:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_i = xAy^T, \tag{2}$$

можно определить псевдоматричное умножение. Множество всех обратимых матриц из $M_n(R)$ образуют группу $GL_n(R)$. Аналогично, среди всех квадратных матриц — R^{nn}, построенных над множеством R, можно рассмотреть и множество матриц $GL_n^{f^*}(R)$, образующих группу относительно псевдоматричного умножения (2).

Теорема 1 *Если матрица $A \in GL_n(R)$, то группы $GL_n(R)$ и $GL_n^{f^*}(R)$, построенные при помощи функций (1) и (2), изоморфны.*

Доказательство. Умножение матриц X и Y, построенное при помощи функции (2), можно переписать при помощи умножения (1):

$$X \cdot_{f^*} Y = XAY.$$

Изоморфизм задаётся отображением $X \mapsto XA^{-1}$. $\square$

Но, если функции (1) и (2) задают одну и ту же матричную группу $GL_n(R)$, то возникает естественный вопрос:

Вопрос 1. *Можно ли построить функцию $f : R^n \times R^n \to R$, задающую умножение матриц с матричной группой, отличной от $GL_n(R)$?*

Иными словами, необходимо найти такую функцию f, описывающую умножение строки первой матрицы X и столбца второй матрицы Y, при помощи которой можно построить псевдоматричное умножение матриц $X \cdot_f Y$. Причём на некотором подмножестве матриц $\widehat{R^{nn}} \subseteq R^{nn}$ такое псевдоматричное умножение $(\cdot_f)$ должно задавать группу — $\langle \widehat{R^{nn}}; \cdot_f \rangle$.

Положительный ответ на вопрос 1 можно получить, интерпретируя определённые решения в теории *физических структур* [1, 2, 3]. В работе [4], в частности, рассматривалась группа Михайличенко $G_n(\mathbb{R})$, как группа псевдоматричного умножения, построенная при помощи функции

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)(y_i - y_n) + x_n + y_n. \qquad (3)$$

Данную группу $G_n(\mathbb{R})$ можно рассматривать как подгруппу в группе матриц $GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

Получив положительный ответ на вопрос 1 и имея уже две функции (1) и (3), приводящие к построению неизоморфных псевдоматричных групп, возникает новый вопрос:

Вопрос 2. *Исчерпываются ли функциями (1) и (3) виды всех возможных функций, с точностью до эквивалентных преобразований, приводящих к построению над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ всех неизоморфных псевдоматричных групп $GL_n^f(\mathbb{R})$?*

Ответ на данный вопрос получим в заключительной части статьи.

Вообще в теории физических структур рассматриваются (см. [5] и [6, § 1]) такие невырожденные отображения $f : \mathbb{R}^{km} \times \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^k$, для которых найдётся такая пара групп преобразований

$$\chi_{a_1,\ldots,a_{kmn}} : \mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^{km}, \quad \theta_{a_1,\ldots,a_{kmn}} : \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^{kn},$$

зависящих от kmn параметров $a_1, \ldots, a_{kmn} \in \mathbb{R}$, что выполнено равенство:

$$f(x_1, \ldots, x_{km}, y_1, \ldots, y_{kn}) = f(\chi\left(x_1, \ldots, x_{km}\right), \theta\left(y_1, \ldots, y_{kn}\right)).$$

Два отображения f и f' считаются эквивалентными, если найдутся три гомеоморфных отображения $\lambda : \mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^{km}$, $\rho : \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^{kn}$, $\sigma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, для которых справедливо равенство

$$f'(x_1, \ldots, x_{km}, y_1, \ldots, y_{kn}) = \sigma\left(f(\lambda\left(x_1, \ldots, x_{km}\right), \rho\left(y_1, \ldots, y_{kn}\right))\right).$$

В теории физических структур, в зависимости от ранга физической структуры (параметры m и n) и рассматриваемого множества $\mathbb{R}^k$, имеется, с точностью до эквивалентных преобразований, много различных функций f. Возникает желание интерпретировать такие функции в качестве функций для псевдоматричного умножения, обобщающего понятие матричного умножения.

В данной работе определим *трёх–сортную алгебраическую систему*, описывающую псевдоматричное умножение и соответствующую категорию. Отметим, что определяя функцию f формулой (1), мы придём к псевдоматричному умножению, совпадающему с обычным матричным умножением. В данной работе также будут рассмотрены вопросы эквивалентности трёх–сортных алгебраических систем псевдоматричного умножения. Определим трёх–сортную алгебраическую систему и соответствующую категорию *физических структур*. Покажем, что категории физических структур и псевдоматричного умножения эквивалентны, так, что, действительно, все решения физических структур можно записать в виде групп псевдоматричного умножения.

§ 1. Псевдоматричное умножение

Рассмотрим прямоугольные матрицы $A, B \in R^{mn}$ размера $m \times n$, где m — число строк, n — число столбцов матрицы с элементами из множества R. На множестве R может быть задана структура поля, кольца, почти–кольца или другая алгебраическая система. В качестве произведения двух матриц A и B будем рассматривать матрицу C, построенную при помощи функции, может быть и частичной

$$f : R^n \times R^m \to R.$$

В результате умножения матриц, элемент c_{ij} матрицы C, стоящий в строке i и столбце j, есть функция f от n элементов i–ой строки матрицы A и m элементов j–го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj}).$$

Если $A \in R^{mn}$, то символом A_i будем обозначать i–ю строку, а символом A^j — j–й столбец. В этих обозначениях элемент c_{ij} можно записать в виде функции произведения строки на столбец:

$$c_{ij} = f\left(A_i, B^j\right) = A_i \cdot_f B^j.$$

Псевдоматричное умножение матриц A и B, построенное при помощи функции f, также запишем в виде $A \cdot_f B = C$. Это же обозначение оставим и для умножения строки A_i на матрицу B и умножения матрицы B на столбец C^j — $A_i \cdot_f B$ и $B \cdot_f C^j$.

Для того, чтобы различать в написании множество строк и множество столбцов будем записывать множество столбцов в виде — R^m, а множество строк для матриц из R^{mn} обозначим в виде — ${}^nR$. Произвольную матрицу можно представить как в виде строки столбцов, так и в виде столбца строк так, что $R^{mn} = {}^n(R^m) = ({}^nR)^m$.

Введём несколько определений.

Определение 1 ([7, Гл. 1, § 3]) *Если алгебраическая система определена не на одном множестве A, а на нескольких $A_1, \ldots, A_n$, т.е. носитель алгебры состоит более чем из одного множества, то такая алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_n; \Omega \rangle$ называется многосортной (n–сортной)[1], где Ω — сигнатура алгебры $\mathfrak{A}$ (множество основных операций алгебры $\mathfrak{A}$).*

Операция $f^{(\tau)} \in \Omega$ характеризуется своим типом $\tau = (i_1, \ldots, i_n, j)$:

$$A_1^{i_1} \times \ldots \times A_n^{i_n} \xrightarrow{f^{(\tau)}} A_j.$$

[1]Иногда говорят *многоосновной* или *гетерогенной*.

Определение 2 ([8, § 2.2.]) *Если в алгебре $\mathfrak{A}$ определены частичные операции $f_i^{(\tau)} \in \Omega$, действующие не на всём множестве, то такие алгебры называются частичными.*

Определение 3 ([9, Гл. VI, § 4.5.]) *Квазигруппой (или примитивной квазигруппой) называется алгебра $\langle G; \cdot, \diagdown, \diagup \rangle$ с тремя бинарными операциями, для которых выполнены тождества:*
1. $(x \diagup y) \cdot y = x$, $y \cdot (y \diagdown x) = x$,
2. $(x \cdot y) \diagup y = x$, $y \diagdown (y \cdot x) = x$.

Определение 4 ([9, Гл. VI, § 4.5.]) *Два группоида $\langle G; \cdot \rangle$ и $\langle G; \odot \rangle$ называются изотопными, если найдётся такая тройка (λ, γ, χ) подстановок множества G, для которых справедливо $\lambda(x \cdot y) = \gamma(x) \odot \chi(y)$.*

Если в квазигруппе имеется только правое — $\diagup$ (левое — $\diagdown$) деление, то такая квазигруппа называется правой (левой). Если в квазигруппе имеется нейтральный элемент, то такая квазигруппа является лупой. Любая квазигруппа изотопна некоторой лупе. Две изотопные группы — изоморфны.

Для произвольного подмножества матриц $\widehat{R^{mn}} \subseteq R^{mn}$ определим связанное с ним *подмножество строк*

$$\widehat{{}^nR} = \{A_i \in {}^nR | i = \overline{1, m}, A \in \widehat{R^{mn}}\}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

и *подмножество столбцов*

$$\widehat{R^m} = \{A^j \in R^m | j = \overline{1, n}, A \in \widehat{R^{mn}}\}, \text{ где } A = (A^1, \dots, A^n).$$

Будем говорить, что отображение, быть может частичное,

$$f : {}^nR \times R^m \to R$$

задаёт *псевдоматричное умножение*, если для алгебры $\langle {}^nR, R^m, R; f \rangle$ выполнены

Аксиомы псевдоматричного умножения.
Трёхсортная алгебраическая система $\langle {}^nR, R^m, R; f \rangle$ задаёт псевдоматричное умножение, если найдётся подмножество $\widehat{R^{mn}} \subseteq R^{mn}$ такое, что если $A, B \in \widehat{R^{mn}}$, то и $A \cdot_f B \in \widehat{R^{mn}}$, при этом для подмножеств строк $\widehat{{}^nR}$ и столбцов $\widehat{R^m}$ выполнены условия:
A1. *Для произвольной матрицы $A \in \widehat{R^{mn}}$ и произвольного столбца*

$C^j \in \widehat{R^m}$ *существует единственный* $B^j \in \widehat{R^m}$*, для которого справедливо равенство* $A \cdot_f B^j = C^j$*;*

A2. *Для произвольной матрицы* $B \in \widehat{R^{mn}}$ *и произвольной строки* $C_i \in \widehat{{}^nR}$ *существует единственная строка* $A_i \in \widehat{{}^nR}$*, для которой справедливо равенство* $A_i \cdot_f B = C_i$*;*

A3. *Умножение матриц ассоциативно. Иными словами, для произвольных* $A, B, C \in \widehat{R^{mn}}$ *справедливо равенство* $(A \cdot_f B) \cdot_f C = A \cdot_f (B \cdot_f C)$*.*

При помощи процедуры построения матрицы как столбца, когда в качестве элементов рассматриваются строки:

$$A = (A_1, \ldots, A_m)^T \text{ для } A_i \in \widehat{{}^nR},$$

мы получим множество матриц $\widehat{{}^nR}^m$. Аналогичным образом получим и множество матриц, построенных как "строка из столбцов" — ${}^n\widehat{R^m}$. Проверим теперь, что аксиомы псевдоматричного умножения приводят к тому, что на подмножестве $\widehat{R^{mn}}$ умножение $(\cdot_f)$ задаёт псевдоматричную группу $\langle \widehat{R^{mn}}; \cdot_f \rangle$, но сначала ещё одно определение:

Определение 5 *Подмножество матриц* $\widehat{R^{mn}}$ *максимально в* R^{mn}*, если для произвольных* $A \in \widehat{R^{mn}}$*,* $B, C \in R^{mn}$ *из того, что* $A \cdot_f B \in \widehat{R^{mn}}$ *и* $C \cdot_f A \in \widehat{R^{mn}}$ *следует, что* $B, C \in \widehat{R^{mn}}$*.*

Лемма 1 *Для алгебры* $\langle {}^nR, R^m, R; f \rangle$ *псевдоматричное умножение* $(\cdot_f)$ *на максимальном подмножестве матриц* $\widehat{R^{mn}}$ *в* R^{mn} *задаёт группу* $\langle \widehat{R^{mn}}; \cdot_f \rangle$*.*

Доказательство. Из аксиом псевдоматричного умножения, с учётом максимальности множества $\widehat{R^{mn}}$, следует, что для произвольных матриц

$$A \in \widehat{{}^nR}^m \setminus \widehat{R^{mn}}, D \in {}^n\widehat{R^m} \setminus \widehat{R^{mn}}, B, C \in \widehat{R^{mn}},$$

справедливо $AB \notin \widehat{R^{mn}}$ и $CD \notin \widehat{R^{mn}}$. В этом случае из аксиом А1 и А2 можно построить левое и правое деление для матриц из $\widehat{R^{mn}}$ так, что $\langle \widehat{R^{mn}}; \cdot_f, \diagdown, \diagup \rangle$ — квазигруппа. С учётом А3 данная квазигруппа будет ассоциативной, а значит — группой. От записи группы с сигнатурой $\{\cdot_f, \diagdown, \diagup\}$ можно перейти к сигнатуре $\{\cdot_f, {}^{-1}, e\}$, т.к. для произвольного $x \in \widehat{R^{mn}}$ можно записать $e = x \diagup x$ и $x^{-1} = e \diagup x$. $\square$

Определение 6 ([7, Гл. 1, § 3]) *Три отображения* $\chi : {}^nR \to {}^nP$, $\lambda : R^m \to P^m$, $\psi : R \to P$ *задают гомоморфизм алгебры* $\langle {}^nR, R^m, R; f\rangle$ *в алгебру* $\langle {}^nP, P^m, P; g\rangle$, *если диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} {}^nR \times R^m & \xrightarrow{f} & R \\ {\scriptstyle \chi\times\lambda}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi} \\ {}^nP \times P^m & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

коммутативна. Если в тройке (ψ, χ, λ) *все отображения биективны, то они задают изоморфизм трёхсортных алгебр.*

Пример 1. В качестве главного примера обобщённого матричного умножения рассмотрим обычное умножение матриц, например, над полем $\mathbb{R}$. В этом случае соответствующая трёхсортная алгебраическая система псевдоматричного умножения — $\langle {}^n\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}; f\rangle$ с функцией f из (1) строится на подмножестве матриц $\widehat{\mathbb{R}^{nn}} = \{x \in R^{n^2} |\, \det(x) \neq 0\}$ и состоит из всех невырожденных матриц из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Множество строк $\widehat{{}^n\mathbb{R}} = {}^n\mathbb{R} \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$ состоит из всех строк ${}^n\mathbb{R}$, за исключением нулевой строки. Аналогичная ситуация для множества столбцов $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)^T\}$.

Пример 2. Если рассмотреть алгебру псевдоматричного умножения — $\langle {}^n\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}; f\rangle$ с функцией f из (3), то с её помощью можно построить псевдоматричную группу $\langle \widehat{\mathbb{R}^{nn}}; \cdot_f\rangle = G_n(\mathbb{R})$ — группу Михайличенко, рассмотренную в [4]. Группа Михайличенко определена на матрицах

$$\widehat{\mathbb{R}^{nn}} = \{X \in \mathbb{R}^{nn} |\, \det(VX + U) \neq 0\},$$

где $U = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ и $V = (E - U)(E - U^T)$, E — единичная матрица.

Матрицы U, V, E все порядка n. В данной алгебре $\widehat{{}^n\mathbb{R}} = {}^n\mathbb{R}$ и $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$.

В [4] показано, что группа Михайличенко $G_n(\mathbb{R})$ изоморфна группе с обычным умножением матриц, но построенной над матрицами большей размерности следующего вида:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \cdots & x_{(n-1)(n-1)} & x_{(n-1)n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x_{n1} & \cdots & x_{n(n-1)} & x_{nn} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Из Примера 2 можно получить псевдоматричное умножение для прямоугольных матриц размера $(n, n-1)$, если в (3) положить $x_n = 0$:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i(y_i - y_n) + y_n.$$

В этом случае алгебра псевдоматричного умножения — $\langle {}^{n-1}\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}; f\rangle$. Функция f будет задавать псевдоматричную группу $\langle\widehat{\mathbb{R}^{n(n-1)}}; \cdot_f\rangle$, в которой умножение двух прямоугольных матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$ приводит к прямоугольной матрице $A \cdot_f B = C \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$ того же размера. Псевдоматричная группа $\langle\widehat{\mathbb{R}^{(n-1)n}}; \cdot_f\rangle$ изоморфна аффинной группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n-1})$ (см. [4]).

Приведём пример псевдоматричного умножения над почтикольцом.

Определение 7 ([9, Гл. VI, §4]) *Алгебраическая система* $\langle R; \cdot, +, -, 0\rangle$ *называется правым почтикольцом, если*
1. $\langle R; +, -, 0\rangle$ *— группа,*
2. $\langle R; \cdot, 0\rangle$ *— полугруппа с нулём,*
3. для произвольных $x, y, z \in R$ *выполнена правосторонняя дистрибутивность, т.е.* $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Пример 4. Если в правом почтикольце R мультипликативная операция такая, что на некотором подмножестве $R^* \subset R$ она является групповой — $\langle R^*; \cdot, {}^{-1}, 1\rangle$, тогда на подмножестве $\widehat{R^2} = \{(y_1, y_2) \in R^2 | y_1 - y_2 \in R^*\}$ при помощи функции

$$f(x, y_1, y_2) = x(y_1 - y_2) + y_2, \tag{4}$$

можно построить алгебру псевдоматричного умножения $\left\langle R, \widehat{R^2}, R; f\right\rangle$. При помощи данной алгебры можно построить группу умножения матриц-столбцов — $\left\langle \widehat{R^2}; \cdot_f\right\rangle$, а само умножение матриц-столбцов записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot_f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, y_2) \\ f(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

В [10] приведены примеры алгебраических систем, близких к почтиобласти[2], которые являются более слабыми[3], чем почтикольцо.

[2]В почтиобласти (определена в [12]) аддитивная операция должна быть лупой, а в правой почтиобласти может быть частичной правой лупой.

[3]Любое правое почтикольцо является правой почтиобластью, но не наоборот.

Определение 8 *Частичную алгебру* $\langle B;\ \cdot, +, -,^{-1}, e, 0\rangle$ *с частичными операциями:*

$$(+) : B \times B^* \to B; \quad (-) : B \times B^* \to B; \ (\cdot) : B \times B^* \to B$$

будем называть правой почтиобластью, если для произвольного $x \in B$ *и произвольных* $y, z \in B^*$ *выполнено:*
A1.1. $(x - y) + y = x$;
A1.2. $(x + y) - y = x$;
A1.3. $y - y = 0$;
A2. $\langle B^*; \cdot,^{-1}, e\rangle$ *— группа;*
A3. $(x + y) \cdot z = x \cdot h(y, z) + y \cdot z$;
A4. $(x + y) + z = \begin{cases} x \cdot r(y, z) + (y + z), & \text{при } y \neq 0 - z \\ x \cdot r(0 - z, z), & \text{при } y = 0 - z \end{cases}$.

В качестве примера правой почтиобласти можно привести алгебру $\langle B; \odot, \oplus, \ominus,^{-1}, e, 0\rangle$ из [10] с бинарными операциями:

$$(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^2 + (x_1 - 1) x_1 y_1^2 \ln |y_1|),$$

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2 x_1 y_1 \ln |y_1|),$$

$$(x_1, x_2) \ominus (y_1, y_2) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2 + 2(y_1 - x_1) y_1 \ln |y_1|),$$

где $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Подмножество $B^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ будет группой относительно операции $\odot$. В [10] эта алгебраическая система была получена из двуметрической физической структуры ранга $(3, 2)$ [11].

Пример 5. В правой почтиобласти B на множестве $\widehat{B^2} = \{(y_1, y_2) \in B^2 | y_1 \ominus y_2 \in B^*\}$, при помощи функции (4), можно построить алгебру псевдоматричного умножения $\left\langle B, \widehat{B^2}, B; f \right\rangle$. При помощи данной алгебры можно построить группу умножения матриц-столбцов — $\left\langle \widehat{B^2}; \cdot_f \right\rangle$, а само умножение матриц-столбцов записывается как и в примере 4.

Произвольную матрицу $A \in R^{mn}$ представим в виде столбца строк $A = (A_1, \ldots, A_m)^T$, а для псевдоматричного умножения матриц $A, B \in R^{mn}$ введём обозначение для функции

$$f^m : {}^nR \times ({}^nR)^m \to {}^nR,$$

описывающую умножение строки на матрицу. Иными словами,

$$A_i \cdot_f B = f^m(A_i, B_1, \ldots, B_m).$$

Аналогично, для строки столбцов $A = (A^1, \ldots, A^n)$ определим функцию

$$f^n : {}^n(R^m) \times R^m \to R^m,$$

при помощи которой запишется умножение матрицы на столбец

$$A \cdot_f B^j = f^n(A^1, \ldots, A^n, B^j).$$

Лемма 2 *Псевдоматричное умножение для матриц размера $m \times n$ можно записать при помощи псевдоматричного умножения матриц–столбцов с функцией f^m или псевдоматричного умножения матриц–строк с функцией f^n.*

Доказательство. Если определена алгебраическая система $\mathfrak{A}_1 = \langle {}^nR, R^m, R; f\rangle$ псевдоматричного умножения на подмножестве $\widehat{R^{mn}}$, то проверим выполнение аксиом псевдоматричного умножения для алгебры $\mathfrak{A}_2 = \langle {}^nR, ({}^nR)^m, {}^nR; f^m\rangle$. Рассмотрим подмножество $\widehat{({}^nR)^m} = \widehat{R^{mn}}$ матриц–столбцов над множеством ${}^nR$.

Условие А1 для матриц–столбцов из $\mathfrak{A}_2$ выполнено в силу того, что они совпадают с матрицами из $\mathfrak{A}_1$.

Условие А2 выполнено в силу того, что строка $A_i \in \widehat{{}^nR}$ в алгебре $\mathfrak{A}_1$ совпадает с элементом $A_i \in \widehat{{}^nR}$ в алгебре $\mathfrak{A}_2$.

Условие А3 выполнено автоматически на множестве $\widehat{({}^nR)^m} = \widehat{R^{mn}}$.

Таким образом, пришли к выводу, что если определена алгебраическая система $\mathfrak{A}_1$, то определена и алгебраическая система $\mathfrak{A}_2$ столбцов над строками. Аналогичная ситуация и для алгебры строк над столбцами, когда $\widehat{{}^n(R^m)} = \widehat{R^{mn}}$. □

§ 2. Физические структуры

Термин *физическая структура* (далее ФС) был введён Ю.И. Кулаковым в середине 60-х годов прошлого века [1, 2] для описания математической теории, нацеленной на классификацию физических законов.

Перед тем как перейти к определениям, приведём один пример, характеризующий постановку задачи в теории физических структур [1, 13]: Рассмотрим, казалось бы простой, второй закон Ньютона, который в одномерном случае можно записать в виде $f = ma$, где m – масса тела, a – его ускорение и f – сила, действующая на тело. Сложность возникает, когда попытаемся понять и определить понятия массы и силы, входящих в этот закон. Масса — мера инертности, но это определение неявно использует сам этот закон. Что такое сила? “Это, — говорил Лагранж, — причина, которая производит движение тела или которая стремится произвести движение". Но всё ещё более усугубляется, если воспроизвести полностью традиционную формулировку Второго закона Ньютона: "В инерциальной системе отсчёта произведение ускорения материальной точки на её массу равно по величине и направлению действующей на неё силе". При этом вводится нетривиальное понятие *инерциальной системы отсчёта* и устанавливается связь между тремя физическими величинами — *ускорением, массой* и *силой*, две последние из которых предварительно не определены. Можно ли так сформулировать Второй закон Ньютона, при котором не требуется предварительно определять, что такое масса и что такое сила?

Рассмотрим два множества: множество тел $\mathfrak{M}$ и множество источников сил, или множество акселераторов $\mathfrak{N}$. При этом, если элементы множеств взаимодействуют между собой, то мы можем наблюдать такое взаимодействие в виде изменения скорости тел. Такое изменение — ускорение: $a_{i\alpha}$ тела $i \in \mathfrak{M}$ под воздействием источника силы $\alpha \in \mathfrak{M}$, мы можем измерять.

В данном случае, ускорение $a_{i\alpha}$ — это некоторое *расстояние* между телом i и источником силы α. Для произвольных двух тел $i, j \in \mathfrak{M}$ и двух произвольных источников силы $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ измерим *четыре* ускорения $a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta} \in \mathbb{R}$. С достаточной степенью точности имеет место соотношение:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Используя (произвольные) эталонные точки $k \in \mathfrak{M}, \gamma \in \mathfrak{N}$ придём к выражению:

$$a_{k\alpha} = \frac{a_{k\gamma}}{a_{i\gamma}} a_{i\alpha}. \tag{5}$$

Опыт показывает, что для произвольных α, β и эталонного k, если рассмотреть источник силы $\alpha \oplus \beta$, являющийся одновременным воздействием двух источников α и β, то справедливо выражение:

$$a_{k(\alpha\oplus\beta)} = a_{k\alpha} + a_{k\beta}, \tag{6}$$

из которого следует, что функция силы $F : \alpha \mapsto a_{k\alpha}$ будет аддитивно зависеть от источников силы. Рассмотрим теперь два произвольных тела i и j и один эталонный источник силы γ. Измерим три ускорения $a_{i\gamma}$, $a_{j\gamma}$ и $a_{i\oplus j\gamma}$. Тело $i \oplus j$ получено путём объединения в одно целое тел i и j. Из опыта, результаты трёх измерений оказываются связанными между собой:

$$\frac{1}{a_{i\oplus j\gamma}} = \frac{1}{a_{i\gamma}} + \frac{1}{a_{j\gamma}}, \tag{7}$$

из чего следует аддитивность функции массы $m : i \mapsto \frac{a_{k\gamma}}{a_{i\gamma}}$. Следовательно из (5), с учётом опытных данных (6) и (7), можно получить хорошо известный Второй закон Ньютона:

$$F_\alpha = m_i a_{i\alpha}.$$

Физическая структура, связанная со вторым законом Ньютона, характеризуется множествами $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathbb{R}$ и функциями $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$ и (5).

Определение физической структуры. *Частичная трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$, где*

$$f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B,\ g : B^{n+mn+m} \to B$$

— частичные бинарная и $(n+mn+m)$–арная операции определяют физическую структуру ранга $(m+1, n+1)$, если найдутся подмножества $\widehat{\mathfrak{M}^m} \subseteq \mathfrak{M}^m$, $\widehat{B^m} \subseteq B^m$, $\widehat{{}^n\mathfrak{N}} \subseteq {}^n\mathfrak{N}$, $\widehat{{}^nB} \subseteq {}^nB$, для которых справедливы аксиомы:

ФС1. *Для любых $(i_1, \ldots, i_m) \in \widehat{\mathfrak{M}^m}$, $(b_1, \ldots, b_m) \in \widehat{B^m}$ найдётся единственный $\alpha \in \mathfrak{N}$, для которого справедливы равенства: $f(i_k, \alpha) = b_k$, где $k \in \{1, \ldots, m\}$;*

ФС2. *Для любых $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \widehat{{}^n\mathfrak{N}}$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \widehat{{}^nB}$ найдётся единственный $i \in \mathfrak{M}$, для которого справедливы равенства: $f(i, \alpha_k) = b_k$, где $k \in \{1, \ldots, n\}$;*

ФС3. *Для любых $i_0 \times (i_1, \ldots, i_m) \in \mathfrak{M} \times \widehat{\mathfrak{M}^m}$, $\alpha_0 \times (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{N} \times \widehat{{}^n\mathfrak{N}}$ справедливо равенство*

$$f(i_0, \alpha_0) = g\left(f(i_0, \alpha_1), \ldots, f(i_m, \alpha_n)\right).$$

В последнем равенстве функция g рассматривается над элементами $f(i_j, \alpha_k) \in B$, построенными над всеми парами (i_j, α_k), за исключением (i_0, α_0). Элементы $f(i_j, \alpha_k) \in B$ упорядочены в g по индексам j, k, например, лексикографически.

Гомоморфизм и изоморфизм для физических структур определяются аналогично определению 6:

Определение 9 *Тройка отображений $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$, $\chi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$, $\psi : B \to B'$ задаёт гомоморфизм двух физических структур $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ и $\langle \mathfrak{M}', \mathfrak{N}', B'; f', g' \rangle$, если диаграммы*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(\lambda \times \chi)"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{M}' \times \mathfrak{N}' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^{n+mn+m} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi^{n+mn+m}"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ (B')^{n+mn+m} \arrow[r, "g'"] & B' \end{tikzcd}$$

коммутативны. Если гомоморфизмы λ, χ, ψ биективны, то говорят, что физические структуры $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ и $\langle \mathfrak{M}', \mathfrak{N}', B'; f', g' \rangle$ *изоморфны или эквивалентны.*

Лемма 3 *ФС ранга $(m+1, n+1)$ на трёх множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, B изоморфна ФС на одном множестве B и подмножествах $\widehat{{}^nB}$, $\widehat{B^m}$.*

Доказательство. Построим изоморфизм

$$\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle \to \left\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f', g' \right\rangle, \tag{8}$$

ФС ранга $(m+1, n+1)$. Воспользуемся аксиомой *ФС1* и по произвольному столбцу $(k_1, \ldots, k_m) \in \widehat{\mathfrak{M}^m}$ построим отображение $f_1 : \mathfrak{N} \to \widehat{B^m}$ так, что

$$f_1 : \alpha \mapsto (f(k_1, \alpha), \ldots, f(k_m, \alpha)),$$

которое в соответствии с *ФС1* будет биекцией. Воспользовавшись аксиомой *ФС2*, аналогично, по произвольной строке $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \widehat{{}^n\mathfrak{N}}$, построим биекцию $f_2 : \mathfrak{M} \to \widehat{{}^nB}$ так, что

$$f_2 : i \mapsto (f(i, \gamma_1), \ldots, f(i, \gamma_n)).$$

Изоморфизм (8) алгебр задаётся тройкой (f_1, f_2, id). С такими отображениями подмножество $\widehat{\mathfrak{M}^m}$ отобразится в подмножество $\widehat{\widehat{{}^nB}^m} = f_2^m\left(\widehat{\mathfrak{M}^m}\right)$, а подмножество $\widehat{{}^n\mathfrak{N}}$ в $\widehat{{}^n\widehat{B^m}} = f_1^n\left(\widehat{{}^n\mathfrak{N}}\right)$. Таким образом, придём к $\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f', g \rangle$ — изоморфной алгебре ФС, определённой на подмножествах $\widehat{\widehat{{}^nB}^m}$, $\widehat{B^m}$, $\widehat{{}^n\widehat{B^m}}$, $\widehat{B^n}$. □

Псевдоматричное умножение, при условии максимальности множества $\widehat{B^{mn}}$, с учётом леммы 1, задаёт группу.

Лемма 4 *Если дана группа $\langle \widehat{B^{mn}}; \cdot_f, {}^{-1}, E \rangle$ псевдоматричного умножения, то определена и ФС $\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g \rangle$ ранга $(n+1, m+1)$, где*

$$g\left(X_i, Y, Z^j\right) = X_i \cdot_f Y^{-1} \cdot_f Z^j \quad \textit{для} \quad X_i \in \widehat{{}^nB}, Y \in \widehat{B^{mn}}, Z^j \in \widehat{B^m}.$$

Доказательство. Действительно, если определить

$$\mathfrak{M} = \widehat{{}^nB}, \mathfrak{N} = \widehat{B^m}, \widehat{\mathfrak{M}^m} = \widehat{{}^n\mathfrak{N}} = \widehat{B^{mn}},$$

то выполнение аксиом *ФС1* и *ФС2* является следствием выполнения аксиом *A1* и *A2* соответственно.

Для проверки *ФС3* убедимся, что для произвольных $A_0 \times (A_1, \dots, A_n) \in \mathfrak{M} \times \widehat{B^{mn}}$ и произвольных $C^0 \times\ (C^1, \dots, C^m) \in \mathfrak{N} \times \widehat{B^{mn}}$, справедливо равенство

$$A_0 \cdot_f C^0 = (A_0 \cdot_f C) \cdot_f (A \cdot_f C)^{-1} \cdot_f (A \cdot_f C^0),$$

которое определяет отображение g. При этом, строки A_i для $i = \overline{1,n}$ составляют матрицу A, а столбцы C^j для $i = \overline{1,m}$ — матрицу C. Результатом умножения строки на матрицу $A_0 \cdot_f C$ будет строка, а результатом умножения матрицы на столбец $A \cdot_f C^0$ будет столбец. $\square$

Перед тем как перейти к случаю $m, n > 2$, рассмотрим предварительно простейший случай — случай физической структуры $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g\rangle$ ранга $(2, 2)$. Для этого изменим формулировку теоремы из [14], с учётом аксиом физических структур.

Лемма 5 (Теорема Ионина) *Физическая структура $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g\rangle$, при условии $\widehat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, $\widehat{B^1} = B$, $\widehat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$, $\widehat{{}^1B} = B$, изоморфна физической структуре $\langle B, B, B; f', g'\rangle$, такой, что на множестве B определена группа — $\langle B; \cdot, ^{-1}, e\rangle$, а отображения f' и g' можно записать при помощи групповых операций:*

$$f'(x, u) = x \cdot u,$$
$$g'(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z. \qquad (9)$$

Доказательство. Для произвольных $k \in \mathfrak{M}, \gamma \in \mathfrak{N}$, построим отображения

$$f_k : \mathfrak{N} \to B,\ f_\gamma : \mathfrak{M} \to B$$

в виде

$$f_k(\alpha) = f(k, \alpha) \ \text{ и } \ f_\gamma(i) = f(i, \gamma).$$

Данные отображения, с учётом аксиом *ФС1* и *ФС2* — биекции, тогда тройка отображений (f_γ, f_k, id) задаёт переход к изоморфной алгебре $\langle B, B, B; f''', g'''\rangle$, где

$$f'''(x, y) = f(f_\gamma^{-1}(x), f_k^{-1}(y)).$$

При помощи произвольного $e \in B$ и отображения $f_1(x) = f'''(x, e)$, вновь перейдём к изоморфной алгебре

$$(f_1, id, id) : \langle B, B, B; f''', g'''\rangle \to \langle B, B, B; f'', g''\rangle$$

с отображением $f''(x,y)=f'''(f_1^{-1}(x),y)$, для которой будет выполнено

$$f''(x,e)=f'''(f_1^{-1}(x),e)=f_1(f_1^{-1}(x))=x.$$

Аналогично, при помощи $f_2(x)=f''(e,x)$ перейдём к изоморфной алгебре

$$(id,f_2,id):\langle B,B,B;f'',g''\rangle\to\langle B,B,B;f',g'\rangle$$

с отображением

$$f'(x,y)=f''(x,f_2^{-1}(y)).$$

На множестве B определим операцию $x\cdot y=f'(x,y)$. Для неё справедливо равенство

$$x\cdot e=e\cdot x=x,$$

т.е., с учётом *ФС1* и *ФС2*, алгебра $\langle B;\cdot,e\rangle$ — лупа.

Из *ФС3* для произвольных пар $(x,y),(u,v)\in B^2$ справедливо равенство

$$x\cdot u=g'(x\cdot v,y\cdot v,y\cdot u). \tag{10}$$

Тогда для пар (x,e) и $(y\cdot z,y)$, с одной стороны, выполнено

$$x\cdot(y\cdot z)=g'(x\cdot y,e\cdot y,e\cdot(y\cdot z))=g(x\cdot y,y,y\cdot z),$$

а с другой стороны, для пар $(x\cdot y,y)$ и (z,e):

$$(x\cdot y)\cdot z=g'((x\cdot y)\cdot e,y\cdot e,y\cdot z)=g(x\cdot y,y,y\cdot z).$$

Следовательно, из равенства правых частей двух выражений приходим к равенству левых частей, что означает, что определённая выше операция будет ассоциативной. Ассоциативная лупа является группой, значит $\langle B;\cdot,^{-1},e\rangle$ – группа.

Рассматривая (10) на парах $(x\cdot y^{-1},e),(z,y)\in B^2$ придём к (9):

$$(x\cdot y^{-1})\cdot z=g'((x\cdot y^{-1})\cdot y,y,z)=g'(x,y,z). \qquad \square$$

Ю.И. Кулаковым [15] была высказана гипотеза о представимости ФС ранга $(m+1,n+1)$, построенной над множеством вещественных чисел — $\langle\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m,\mathbb{R};f,g\rangle$ в виде ФС ранга (2,2), построенной над матрицами $\mathbb{R}^{mn}$, т. е. ФС — $\langle\mathbb{R}^{mn},\mathbb{R}^{mn},\mathbb{R}^{mn};F,G\rangle$. Докажем данную гипотезу для произвольного множества в виде теоремы о вложимости.

Теорема 2 *Произвольная ФС* $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{N},B;f,g\rangle$ *ранга* $(m+1,n+1)$ *вложима в ФС —* $\left\langle\widehat{\mathfrak{M}^m},\widehat{{}^n\mathfrak{N}},\widehat{B^{mn}};f^{mn},g^{mn}\right\rangle$ *ранга* $(2,2)$.

Доказательство. Для ФС ранга $(m+1, n+1)$, на множествах $\widehat{\mathfrak{M}^m}$, $\widehat{{}^n\mathfrak{N}}$, $\widehat{B^m}$, $\widehat{{}^nB}$ определим множество $\widehat{B^{mn}}$ в виде:

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} f(i_1,\alpha_1) & \cdots & f(i_1,\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(i_m,\alpha_1) & \cdots & f(i_m,\alpha_n) \end{array} \right) \middle| \left(\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{array} \right) \in \widehat{\mathfrak{M}^m}, (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \widehat{\mathfrak{N}^n} \right\}.$$

Запишем частичную функцию $g : B^{n+mn+m} \to B$ в виде:

$$g : \widehat{{}^nB} \times \widehat{B^{mn}} \times \widehat{B^m} \to B$$

так, что

$$g : \left((b_{01},\ldots,b_{0n}), \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} b_{10} \\ \vdots \\ b_{m0} \end{array} \right) \right) \mapsto b_{00}.$$

Построим функцию

$$g^{mn} : \widehat{B^{mn}} \times \widehat{B^{mn}} \times \widehat{B^{mn}} \to \widehat{B^{mn}}$$

такую, что для произвольных $A, C, D \in \widehat{B^{mn}}$ выполнено

$$g^{mn}(A,C,D) = \left(\begin{array}{ccc} g(A_1,C,D^1) & \cdots & g(A_1,C,D^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(A_m,C,D^1) & \cdots & g(A_m,C,D^n) \end{array} \right).$$

В качестве отображения $f^{mn} : \widehat{\mathfrak{M}^m} \times \widehat{{}^n\mathfrak{N}} \to \widehat{B^{mn}}$ рассмотрим mn отображений f так, что

$$f^{mn}\left(\left(\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{array} \right), (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \right) = \left(\begin{array}{ccc} f(i_1,\alpha_1) & \cdots & f(i_1,\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(i_m,\alpha_1) & \cdots & f(i_m,\alpha_n) \end{array} \right).$$

Проверим выполнение аксиом ФС для $\left\langle \widehat{\mathfrak{M}^m}, \widehat{{}^n\mathfrak{N}}, \widehat{B^{mn}}; f^{mn}, g^{mn} \right\rangle$.

Выполнение аксиомы *ФС1.* Для любых

$$\left(\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{array} \right) \in \widehat{\mathfrak{M}^m}, \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right) \in \widehat{B^{mn}}$$

найдётся единственная строка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \widehat{{}^n\mathfrak{N}}$, для которой справедливо равенство

$$f^{mn}\left(\left(\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{array}\right), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right) = \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right).$$

Это следует из покомпонентного выполнения аксиомы *ФС1* для ФС $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g\rangle$. Действительно, из определения ФС ранга $(m+1, n+1)$ аксиома *ФС1* выполняется, т.е. для любых

$$\left(\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{array}\right) \in \widehat{\mathfrak{M}^m}, \left(\begin{array}{c} b_{1u} \\ \vdots \\ b_{mu} \end{array}\right) \in \widehat{B^m}$$

существует единственный элемент $\alpha_u \in \mathfrak{N}$, для которого справедливо равенство

$$f(i_k, \alpha_u) = b_{ku}, \text{ где } k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Необходимо только убедиться, что строка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ действительно найдётся в $\widehat{{}^n\mathfrak{N}}$. Но это требование выполняется, так как мы соответствующим образом определили множество $\widehat{B^{mn}}$.

Аналогичным образом выполнена и аксиома *ФС2*. Аксиома *ФС3* для g^{mn} выполнена вследствие покомпонентного выполнения *ФС3* для каждого g ФС ранга $(m+1, n+1)$ в g^{mn}. □

§ 4. Эквивалентность категорий

Для любого класса алгебр $K\mathfrak{A}$ через $\overrightarrow{K}\mathfrak{A}$ обозначим категорию, объектами которой являются алгебры $\mathfrak{A} \in K\mathfrak{A}$, а морфизмами — гомоморфизмы алгебр.

Определение 10 ([16, §4.4.]) *Функтор* $\overrightarrow{F_2} : \overrightarrow{K}\mathfrak{A}_1 \to \overrightarrow{K}\mathfrak{A}_2$ *задаёт эквивалентность категорий, а категории* $\overrightarrow{K}\mathfrak{A}_1$ *и* $\overrightarrow{K}\mathfrak{A}_2$ *называются эквивалентными, если существует функтор* $\overrightarrow{F_1} : \overrightarrow{K}\mathfrak{A}_2 \to \overrightarrow{K}\mathfrak{A}_1$ *и естественные изоморфизмы* $\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{K}\mathfrak{A}_1) \cong \overrightarrow{K}\mathfrak{A}_1$ *и* $\overrightarrow{F_2}\ \overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{K}\mathfrak{A}_2) \cong \overrightarrow{K}\mathfrak{A}_2$.

Покажем теперь, что категория ФС $\overrightarrow{K}\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g\rangle$ и категория трёхсортных алгебр псевдоматричного умножения $\overrightarrow{K}\left\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f\right\rangle$ эквивалентны.

Сформулируем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 3 *Категория физических структур* $\overrightarrow{K}\left\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g\right\rangle$ *с условием* $\widehat{\widehat{{}^nB}^m} = \widehat{{}^n\widehat{B^m}}$ *и категория псевдоматричного умножения* $\overrightarrow{K}\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f\rangle$ *с максимальным множеством* $\widehat{B^{mn}}$ *— эквивалентны.*

Доказательство. Для произвольной ФС $\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g\rangle$, воспользовавшись теоремой 2, построим отображение в ФС ранга $(2,2)$ $\langle \widehat{B^{mn}}, \widehat{B^{mn}}, \widehat{B^{mn}}; f^{mn}, g^{mn}\rangle$. С учётом условия теоремы и процедуры построения множества $\widehat{B^{mn}}$ в теореме 2, приходим к равенству $\widehat{B^{mn}} = \widehat{\widehat{{}^nB}^m} = \widehat{{}^n\widehat{B^m}}$. Таким образом, попадаем в условие леммы 5, следовательно, операция умножения f^{mn} прямоугольных матриц $\widehat{B^{mn}}$, являющаяся вследствие аксиом *ФС1* и *ФС2* квазигруппой $\left\langle \widehat{B^{mn}}; \cdot_f\right\rangle$, будет изотопна групповой операции. Проверим, каким образом строилась такая изотопия в лемме 5 и как она будет выглядеть для матриц из множества $\widehat{B^{mn}}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot_f \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} f\left(a_{11}, \dots, a_{1n}, b_{11}, \dots, b_{m1}\right) & \dots & f\left(a_{11}, \dots, a_{1n}, b_{1n}, \dots, b_{mn}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f\left(a_{m1}, \dots, a_{mn}, b_{11}, \dots, b_{m1}\right) & \dots & f\left(a_{m1}, \dots, a_{mn}, b_{1n}, \dots, b_{mn}\right) \end{pmatrix}.$$

Для произвольного элемента

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix}$$

из множества $\widehat{B^{mn}}$ построим изотопию квазигруппы $\left\langle \widehat{B^{mn}}; \cdot_f\right\rangle$ правой лупе $\left\langle \widehat{B^{mn}}; \cdot_{f'}, E\right\rangle$, в которой E будет левым нейтральным элементом. Изотопию в силу аксиомы *ФС1* можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix} \cdot_{f'} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} f\left(e_{11}, \dots, e_{1n}, \lambda\left(b_{11}, \dots, b_{m1}\right)\right) & \dots & f\left(e_{11}, \dots, e_{1n}, \lambda\left(b_{1n}, \dots, b_{mn}\right)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f\left(e_{m1}, \dots, e_{mn}, \lambda\left(b_{11}, \dots, b_{m1}\right)\right) & \dots & f\left(e_{m1}, \dots, e_{mn}, \lambda\left(b_{1n}, \dots, b_{mn}\right)\right) \end{pmatrix},$$

т.е. изотопия задаётся лишь одним отображением $\lambda : \widehat{B^m} \to \widehat{B^m}$. Аналогично строится отображение $\chi : \widehat{{}^nB} \to \widehat{{}^nB}$, которое приводит к построению изотопной левой лупы и, соответственно, лупы $\left\langle \widehat{B^{mn}}; \cdot_{f'}, E \right\rangle$, в которой E будет уже двусторонним нейтральным элементом. Таким образом, при помощи построенных преобразований, придём к новой функции

$$f'(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(\chi(x_1, \ldots, x_n), \lambda(y_1, \ldots, y_m))$$

и соответствующей $\langle \widehat{B^{mn}}, \widehat{B^{mn}}, \widehat{B^{mn}}; f'^{mn}, g'^{mn} \rangle$, которая описывает псевдоматричное f'–умножение. Ассоциативность умножения следует из тождества справедливого для отображения g^{mn}, как и в лемме 5.

Итак, построили отображение

$$F_1 : \left\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g \right\rangle \to \left\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f' \right\rangle,$$

сопоставляющее $\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g \rangle$ соответствующую алгебру $\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f' \rangle$ псевдоматричного умножения. Это отображение является суперпозицией двух отображений:

$$\left\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g \right\rangle \xrightarrow{(\chi,\lambda,id)} \left\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f', g \right\rangle \xrightarrow{F_g} \left\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f' \right\rangle,$$

где тройка (χ, λ, id), зависящая от $E \in \widehat{B^{mn}}$, задаёт изоморфизм алгебр, а F_g определяет переход к обеднённой алгебре с потерей частичной операции g.

2^0. Для произвольного морфизма[4]

$$h \in \mathtt{mor}\left(\overrightarrow{K} \langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g \rangle \right),$$

задаваемого тройкой $h = (h_1, h_2, h_3)$, по соответствующим алгебрам

$$\mathrm{dom}\ h = \langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g \rangle \quad \text{и} \quad \mathrm{cod}\ h = \langle \widehat{{}^nB_h}, \widehat{B^m_h}, B_h; f_h, g_h \rangle,$$

найдём их образы и построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g \rangle & \xrightarrow{(\chi,\lambda,id)} & \langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f'', g \rangle & \xrightarrow{F_g} & \langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f'' \rangle \\
{\scriptstyle (h_1,h_2,h_3)}\big\downarrow & & {\scriptstyle (h_1',h_2',h_3')}\big\downarrow & & {\scriptstyle (h_1',h_2',h_3')}\big\downarrow \\
\langle \widehat{{}^nB_h}, \widehat{B^m_h}, B_h; f_h, g_h \rangle & \xrightarrow{(\chi',\lambda',id)} & \langle \widehat{{}^nB_h}, \widehat{B^m_h}, B_h; f''_h, g_h \rangle & \xrightarrow{F_g} & \langle \widehat{{}^nB_h}, \widehat{B^m_h}, B_h; f''_h \rangle
\end{array}$$

[4]Для *стрелки* h её начало это dom h, а cod h — конец.

Очевидно, что суперпозиция отображений

$$(\chi', \lambda', id) \circ (h_1, h_2, h_3) \circ (\chi, \lambda, id)^{-1} = (h_1', h_2', h_3')$$

является гомоморфизмом, как суперпозиция гомоморфизма (h_1, h_2, h_3) и изоморфизмов (χ, λ, id), (χ', λ', id) . Следовательно, построили отображение

$$\overrightarrow{F_1} : (h_1, h_2, h_3) \mapsto (h_1', h_2', h_3') \,.$$

Очевидно, что единичный морфизм при таком отображении перейдёт в единичный, т.е.

$$\overrightarrow{F_1} : id_{\mathfrak{A}} \mapsto id_{\overrightarrow{F_1}(\mathfrak{A})}$$

и для произвольных $\tau, h \in \mathtt{mor}\left(\overrightarrow{K}\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g\rangle\right)$, для которых определена композиция $\tau \circ h$, определено и

$$\overrightarrow{F_1}(\tau \circ h) = \overrightarrow{F_1}(\tau) \circ \overrightarrow{F_1}(h).$$

Таким образом, построили ковариантный функтор

$$\overrightarrow{F_1} : \overrightarrow{K}\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g\rangle \to \overrightarrow{K}\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f\rangle$$

из категории ФС в категорию псевдоматричного умножения.

3^0. Проведём обратное построение. Отображение

$$F_2 : K\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f\rangle \to K\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g\rangle$$

было построено в лемме 4 и заключается, фактически, в обогащении алгебры $\langle \widehat{{}^nB}, \ \widehat{B^m}, B; f\rangle$ дополнительной операцией g. По этой причине любой морфизм

$$h \in \mathtt{mor}\left(\overrightarrow{K}\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f\rangle\right),$$

задаваемый тройкой $h = (h_1, h_2, h_3)$, будет морфизмом и в категории $\overrightarrow{K}\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g\rangle$, причём $\overrightarrow{F_2}(h) = h$. Следовательно, и для произвольных $\tau, h \in \mathtt{mor}\left(\overrightarrow{K}\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f\rangle\right)$, для которых определена композиция $\tau \circ h$, определено

$$\overrightarrow{F_2}(\tau \circ h) = \overrightarrow{F_2}(\tau) \circ \overrightarrow{F_2}(h) = \tau \circ h,$$

а для единичного морфизма $\overrightarrow{F_2} : id_{\mathfrak{A}} \mapsto id_{\overrightarrow{F_2}(\mathfrak{A})}$.

4^0. Осталось найти суперпозицию функторов. Из построений видно, что $\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2} = id$. Рассмотрим теперь $\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_1}$. Для произвольной алгебры имеем

$$\langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f, g\rangle \xrightarrow{F_1} \langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f'\rangle \xrightarrow{F_2} \langle \widehat{{}^nB}, \widehat{B^m}, B; f', g\rangle$$

так, что $F_2 F_1 = (\chi, \lambda, id)$. Для морфизмов

$$\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_1}(h_1, h_2, h_3) = \overrightarrow{F_2}(h'_1, h'_2, h'_3) = (h'_1, h'_2, h'_3) \cong (h_1, h_2, h_3).$$

Таким образом, функтор $\overrightarrow{F_2}$, в соответствии с определением 10, является эквивалентностью категорий, т.е. категории эквивалентны. $\square$

Рассмотренная в данном параграфе категорная эквивалентность физических структур и псевдоматричного умножения, позволяет переписать все решения ФС на языке псевдоматричного умножения. Теперь можно ответить на вопрос 2. Ответ, с учётом теоремы 3 и [3], будет положительный: с точностью до локального изоморфизма имеется только две локально–неизоморфные группы, порождаемые функциями (1) и (3).

Для умножения с функцией (3) в [4] было показано, что группа Михайличенко линейна.

Вопрос 3 *Будут ли линейными остальные псевдоматричные группы?*

Когда статья была закончена и передана на рецензирование, автор с горечью узнал о кончине В.К. Ионина — удивительного учёного, который первым обнаружил в теории физических структур алгебраический потенциал. Светлой памяти Владимира Кузьмича Ионина я посвящаю эту статью.

Список литературы

[1] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г.Г) // Новосибирск, Изд–во НГУ, 1968, с. 226.

[2] *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12, № 5, 1142–1145.

[3] *Михайличенко Г.Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // ДАН СССР, 206, 5, 1972, 1056–1058.

[4] *Бардаков В.Г., Симонов А.А.* Кольца и группы матриц с нестандартным произведением // Сиб. матем. журнал, 54, 3, 2013, 504–519.

[5] *Михайличенко Г.Г.* Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур) // ДАН СССР, 284, 1, 1985, 39–43.

[6] *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия физических структур // Барнаул–Горно-Алтайск, 2003, с. 204.

[7] *Плоткин Б.И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных // М., Наука, 1991, с. 448.

[8] *Мальцев А.И.* Алгебраические системы // М., Наука, 1970, с. 392.

[9] *Артамонов В.А. и др.* Общая алгебра // М., Наука, 1991, Т. 2, с. 480.

[10] *Симонов А.А.* О соответствии между почтиобластями и группами // Алгебра и Логика. 45, 2, 2006, 239–251.

[11] *Михайличенко Г.Г.* Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2) // Сиб. матем. журнал, 34, 3, 1993, 132–143.

[12] *Karzel H.* Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2–Strukturen mit Rechtecksaxiom // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 32, 3–4, 1968, 191–206.

[13] *Simonov A.A., Kulakov Y.I., Vityaev E.E.* On an algebraic definition of laws // Journal of Mathematical Psychology, 2014, 58, 13–20.

[14] *Ионин В.К.* Абстрактные группы как физические структуры // Системология и методологические проблемы информационно–логических систем. Вычислительные системы. Новосибирск, 1990, № 135, 40–43.

[15] *Кулаков Ю.И.* Новая формулировка теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно–логических систем. Вычислительные системы. Новосибирск, 1988, № 125, 3–32.

[16] *Маклейн С.* Категории для работающего математика // М., Физматлит, 2004, с. 352.