Мальцевские чтения
Новосибирск (2002)
Тезисы докладов

Обобщенное матричное умножение

А. А. Симонов

Рассмотрим обобщение матричного умножения, когда в отличие от обычного матричного умножения, построенного на билинейной функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_r) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ry_r, \tag{1}$$

будем рассматривать произвольную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s)$, в которой не обязательно выполнение равенства $r = s$. В качестве основного условия на функцию $f : B^r \times B^s \to B$ потребуем, чтобы на некотором подмножестве матриц $G \subseteq B^{r\times s}$ их произведение, построенное на такой функции, было групповым. Иными словами, среди всех матриц одной размерности $(r \times s)$ можно выделить подмножество матриц G, на котором такое произведение будет групповым. Хотелось бы выяснить, приводит ли такое ограничение к уменьшению возможных функций f и можно ли получить конкретный вид таких функций, построенных над множеством $B = \mathbb{R}$.

Можно показать, что определяемое таким условием матричное произведение при наложении некоторых дополнительных, не принципиальных ограничений приводит к задаче, возникающей в теории физических структур, развиваемой Ю. И. Кулаковым [**1**] и Г. Г. Михайличенко [**2**]. Последнему удалось решить задачу, которую можно интерпретировать как доказательство наличия только двух матричных произведений для квадратных матриц, с точностью до эквивалентных преобразований (группового изоморфизма матричных групп G_1 и G_2). Первая группа $(\cdot_1, G_1)$, построена на обычной билинейной функции (1), вторая группа $(\cdot_2, G_2)$ построена на функции вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_r) = \sum_{i\geq 2}(x_i - x_1)(y_i - y_1) + x_1 + y_1. \tag{2}$$

Если рассматривать обычное матричное сложение, то первая группа связана с матричным кольцом, для второй группы это не справедливо, так как не выполняется дистрибутивность:

$$X * (Y + Z) - X * Y - X * Z = \begin{pmatrix} -x_{11} & -x_{11} & \dots & -x_{11} \\ -x_{21} & -x_{21} & \dots & -x_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{r1} & -x_{r1} & \dots & -x_{r1} \end{pmatrix},$$

$$(X+Y)*Z - X*Z - Y*Z = \begin{pmatrix} -z_{11} & -z_{12} & \dots & -z_{1r} \\ -z_{11} & -z_{12} & \dots & -z_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z_{11} & -z_{12} & \dots & -z_{1r} \end{pmatrix}.$$

Кроме квадратных матриц имеется еще решение для прямоугольных матриц $r = s+1$ и $r = s-1$, получающееся из (2) при $y_1 = 0$ или $x_1 = 0$. В этом случае будет выполняться либо левосторонняя, либо правосторонняя дистрибутивности. Кроме этого имеется еще решение при $r = 1, s = 3$ или $r = 3, s = 1$, которое можно записать, например, в виде:

$$f(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{3xy_1y_3 + xy_1y_2 - 4xy_2y_3 + 3y_1y_3 - 3y_1y_2}{4xy_1 - 3y_2x - y_3x + 3y_3 - 3y_2},$$

описывающее умножение для матриц–столбцов, состоящих из трех строк.

Литература

[1] Ю. И. Кулаков, *Элементы теории физических структур*, НГУ, Новосибирск, 1968.
[2] Г. Г. Михайличенко, *Математический аппарат теории физических структур* (препринт), Универ-Принт ГАГУ, Горно-Алтайск, 1997.

Горно-Алтайский госуниверситет
E-mail: sim@online.nsk.su