Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

О группах близких к точно транзитивными

А. А. Симонов

Рассмотрим группу $T_n(B)$ преобразований множества B с правым действием $B \times T_n(B) \to B$. Определим преобразование множества B^n этой же группой $T_n(B)$ в виде $(x_1, \ldots, x_n) \cdot g = (x_1 \cdot g, \ldots, x_n \cdot g)$, где $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n, g \in T_n(B)$, так что $B^n \times T_n(B) \to B^n$. Группу $T_n(B)$, действующую на множестве B, будем называть *близкой к точно n транзитивной*, если на подмножестве $\widehat{B^n} \subset B^n$ она действует точно транзитивно, т.е. $(\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \widehat{B^n})$ $(\exists! g \in T_n(B))$ так, что $x_1 \cdot g = y_1, \ldots, x_n \cdot g = y_n$, кроме этого выполнена аксиома:

1. $(x_1, \ldots, x_n) \in \widehat{B^n} \Leftrightarrow (x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) \in \widehat{B^n}$, где σ — любая перестановка элементов $1, \ldots, n$.

В качестве примера можно рассмотреть векторное пространство $B = V$ размерности n над некоторым полем $\mathbb{P}$, тогда группа $T_n(B)$ — это группа $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{P})$

Оределим понятие B *поле степени n*, под которым будем понимать алгебраическую систему $(B, \varphi, \cdot)$, где $\varphi : B \to B$ унарная операция. На подмножестве B_1 определена частичная бинарная операция $(\cdot) : B \times B_1 \to B$. На B можно выделить подмножества $O = B \setminus B_1$, $B_E = \{x \in B_1 | \varphi(x) \in O\}$ и $B_0 = B_1 \setminus B_E$ так, что справедливы аксиомы:

A1. $(B_1, \cdot, e_1)$ — группа преобразований множества O;

A2. $(\forall x \in B_E)(x^{-1} \in B_E)$;

A3. $\varphi^2 = id$;

A4. $\phi(\phi(x)\phi(y)) = \phi(x\phi(y^{-1}))y, x \in B, y \in B_0$;

A5. $S_{n-1} \leq \mathrm{Aut}(B_1)$, $S_n = \langle S_{n-1}, \varphi \rangle$ — группы преобразований множества B_0.

Теорема 1. *Существует взаимооднозначное соответствие между группой $T_2(B)$ с условием: для произвольного элемента $x \in B$ и произвольного $(y_1, y_2) \in \widehat{B^2}$ всегда найдётся такой элемент y_k из кортежа (y_1, y_2), что $(y_1, x) \in \widehat{B^2}$ или $(x, y_2) \in \widehat{B^2}$ и B полем степени 2 с условием* **A6.** $(\forall x \in B_E)(\forall y \in B_0)(xy \in B_0)$.

Условие **A6** достаточно сильное, если его ослобить, то

Теорема 2. *Над B полем степени 2 с условием*

A6′. $(\forall x \in B_E)(\forall y \in B_1)(\exists z \in B_0)(yz^{-1}, x\varphi^E(yz^{-1}), \varphi(\varphi(x)yz^{-1})\varphi^E(z) \in B_0)$

можно построить группу $T_2(B)$ *с элементами* $[x_1, x_2] \in T_2(B)$ *представимыми в виде*

$$[x_1, x_2] = \begin{cases} [\varphi(x_1 x_2^{-1})]\varphi[x_2], & x_2 \in B_1, x_1 x_2^{-1} \notin B_E \\ [\varphi(\varphi(x_1) E\varphi(x_2))]\,\varphi[\varphi(x_2)]\varphi, & x_2 \in O, \varphi(x_1) E\varphi(x_2) \notin B_E \end{cases},$$

где $E(x) = x^{-1}$, $[x] \in T_1(B_1)$, *а* $T_1(B_1)$ — *группа преобразований множества* B_1 *определяемая правыми сдвигами* $y \cdot [x] = yx$.

E-mail: `Andrey.Simonoff@gmail.com`