О соответствии правых почтиобластей точно дважды транзитивным группам

А. А. Симонов

Для описания *точно дважды транзитивных групп* в [1] введено понятие *почтиобласти*, как алгебраической системы $(B_1, 0, \cdot, +, r)$, но до последнего времени не известно ни одного примера почтиобласти, которая не была бы почтиполем. Предлагается ослабить аксиомы почтиобласти, оставив только необходимые для построения точно дважды транзитивных групп. Определим правую почтиобласть как алгебраическую систему $(B_1, 0, v, \cdot, +, -, h, r)$ с операциями:

$$(+) : B \times B_1 \to B,\ (-) : B \times B_1 \to B,\ (\cdot) : B \times B_1 \to B,\ \text{где } B = B_1 \cup \{1\} \text{ и}$$

$$v : B_1 \to B_1,\ h : B_1 \times B_1 \to B_1,\ r : B_1 \times B_1 \to B_1,$$

для которых выполнены аксиомы

A1. $(\forall x \in B)(\forall y \in B_1)\ (x - y) + y = x$;

A2. $(\forall x \in B)(\forall y \in B_1)\ (x + y) - y = x$;

A3. $(\forall x \in B_1)\ \ x - x = 0$;

A4. $(B_1, \cdot, e)$ — группа с нейтральным элементом $e \in B_1$;

A5. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_1)(\exists\ h(y, z) \in B_1)\ (x + y)z = xh(y, z) + yz$;

A6. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_1 :\ y + z \neq 0)(\exists\ r(y, z) \in B_1)\ (x + y) + z = xr(y, z) + (y + z)$;

A7. $(\forall x \in B)(\forall z \in B_1)(\exists\ v(z) \in B_1)\ (x + (0 - z)) + z = xv(z)$.

Введём обозначения $L(x) = 0 - x$, тогда из A1 следует $L(x) + x = 0$. Т.о. отображение $L : B_1 \to B_1$ определяет левый обратный в правой лупе.

Лемма. *в правой почтиобласти выполнено:*

1. $(\forall x \in B_1)\ 0x = 0$;

2. $h(x, y) = EL(x)L(xy)$, *где* $E(x) = x^{-1}$;

3. $r(y, z) = (L(z) - y)^{-1}L(y + z)$;

4. $x - z = xv^{-1}(z) + L(z)$;

5. $v(z) = EL^2(z)z$, *где* EL *— суперпозиция преобразований* L *и* E.

Группа $T_2(B)$ преобразования множества B точно дважды транзитивна, если для произвольных пар $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \in B^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in B\}$ найдётся единственный элемент $g \in T_2(B)$, для которого справедливо $g(x_1) = y_1, g(x_2) = y_2$.

Теорема. *Алгебраические системы* $(B_1, 0, v, \cdot, +, -, h, r)$ *и точно дважды транзитивные группы* $T_2(B)$ *рационально эквивалентны.*

Понятие *рациональной эквивалентности* введено Мальцевым [2].

Приведём несколько примеров правых почтиобластей, над телом $\mathbb{K}$:

1. $x \oplus y = -xa^{-1} + y,\ x \ominus y = -xa + ay,\ r(y, z) = -a^{-1},\ v(z) = a^{-2},\ h(y, z) = z.$
2. $x \oplus y = xy^2 + y,\ x \ominus y = xy^{-2} - y^{-1},\ r(y, z) = y^2z(z + y)^{-1}(yz + 1),\ h(y, z) = z^{-1}.$

Список литературы

[1] Karzel H. Inzidenzgruppen I. Lecture Notes by Pieper, I. and Sorensen, K., University of Hamburg, 1965, 123–135.

[2] Мальцев А. И. Структурная характеристика некоторых классов алгебр. Докл. Акад. наук СССР, 120 (1958), N. 1, 29–32.

Новосибирск
E-mail: Andrey.Simonoff@gmail.com