

О группах матриц с нестандартным умножением

А. А. СИМОНОВ

Кольцо квадратных матриц $M_n(R)$ над полем или кольцом R естественным образом появляется как группа автоморфизмов векторов или модулей над R . Умножение матриц строится при помощи билинейной функции

$$f^{(1)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Возникает естественный вопрос о возможности построения умножения матриц при помощи функции $f : R^n \times R^n \rightarrow R$ отличной от билинейной. В теории физических структур [1] возникает решение, приводящее к группе матриц с умножением

$$f^{(2)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)(y_i - y_n) + x_n + y_n.$$

Можно рассмотреть более общий случай, когда в качестве f -умножения двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$ рассматривается матрица $C = (c_{jk})$, построенная при помощи функции

$$f : \widehat{R^n \times R^m} \rightarrow R.$$

Функция f определена на подмножестве $\widehat{R^n \times R^m} \subset R^n \times R^m$. Будем рассматривать перемножения матриц одного размера — $m \times n$. В результате умножения матриц A и B получается матрица C с элементами:

$$c_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj}).$$

Лемма. Если число строк и столбцов не равно 1, то умножение матриц можно записать при помощи f^n -умножения матриц-столбцов или f^m -умножения матриц-строк.

Физическую структуру ранга $(m+1, n+1)$ можно определить как частичную многосортную алгебру $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, R; f, g \rangle$, где

$$f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow R, \quad g : R^{m+mn+n} \rightarrow R$$

— частичные операции с некоторыми дополнительными условиями.

Теорема. Категория физических структур $\vec{K} \langle R^n, R^m, R; f, g \rangle$ и категория f -умножения матриц эквивалентны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кулаков Ю. И. О теории физических структур // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 15, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 127, Изд-во "Наука", Ленинград. отд., Л., 1983. С. 103–151.

Новосибирск

E-mail: Andrey.Simonoff@gmail.com