Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет»

На правах рукописи

СИМОНОВ АНДРЕЙ АРТЕМОВИЧ

Ограниченно точно транзитивные группы и алгебраические системы, связанные с псевдоматричным умножением

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Бардаков Валерий Георгиевич

Горно-Алтайск – 2016

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования. Изучение транзитивных групп преобразований различных множеств является классическим разделом теории групп. Напомним, что группа $G = G(M)$ преобразований множества M называется *транзитивной*, если для произвольных $x, y \in M$ существует $g \in G$ такой, что $y = g(x)$. Группа называется *n-транзитивной*, если для произвольных кортежей $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M^n$, из попарно неравных элементов, существует $g \in G$ такой, что $y_i = g(x_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ и *точно n-транзитивной* — если такой элемент $g \in G$ единственный.

К. Жордан [20] доказал, что если G конечная точно n-транзитивная группа при $n \geq 4$, то G является одной из следующих групп: симметрической S_n, S_{n+1}, знакопеременной A_{n+2} или группой Матьё M_{11}, M_{12} для $n = 4,\ 5$ соответственно. Г. Цассенхауз [31] показал, что любую точно 2-транзитивную группу можно представить как группу аффинных преобразований: $x \mapsto xb + a$, $b \neq 0$ конечного почти-поля, а точно 3-транзитивную группу — как группу дробно-линейных преобразований конечного поля или почти-поля.

М. Холл [19] обобщил результат К. Жордана на бесконечные группы, доказав, при некоторых дополнительных условиях на группу, что точно 2-транзитивная группа является группой аффинных преобразований планарного почти-поля. Напомним, что почти-поле F называется *планарным*, если уравнение $xa = xb + c$ при $a, b, c \in F$, $a \neq b$ имеет единственное решение в F. При этом Дж. Л. Земмер [32] показал, что некоторые точно 2-транзитивные группы возникают как группы аффинных преобразований непланарных почти-полей. Ж. Титс [29] изучал локально-компактные, связные группы, действующие на топологическом пространстве и доказал, что каждая такая точно 2-транзитивная группа изоморфна группе аффинных преобразований поля вещественных чисел $\mathbb{R}$, поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ или тела кватернионов $\mathbb{H}$. Такая группа, действующая точно 3-транзитивно изоморфна группе дробно-линейных преобразований поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В этой же работе Ж. Титс показал, что если не требовать от группы локальной компактности и связности, то точно 2-транзитивная группа будет изоморфна группе преобразований некоторого псевдополя. *Псевдополем* Ж. Титс назвал алгебраическую систему $\langle B;+,\cdot\rangle$ для которой $\langle B;+\rangle$ — группоид, $\langle B\setminus\{0\};\cdot\rangle$ — группа.

Г. Карзел [21] независимо от работ Ж. Титса определил *почти-область* как близкую к псевдополю алгебраическую систему и построил взаимно-однозначное соответствие между почти-областями и точно 2-транзитивными группами. Всякая почти-область является псевдополем, но не наоборот. Тем не менее, Ф.В. Вилк [30] показал, что любое псевдополе можно построить при помощи соответствующей почти-области. П. Кара, Р. Киебум, Т. Вервлоет [26] определив категорию почти-областей и категорию точно 2-транзитивных групп доказали их эквивалентность.

В. Д. Мазуров [9], используя теоретико–групповые методы показал, что если стабилизатор точно 2-транзитивной группы содержит инволюцию и произведение некоторых двух инволюций имеет бесконечный порядок, то в стабилизаторе точки содержится подгруппа, изоморфная $\mathbb{Q}^*$ (мультипликативной группе поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$), а точно 2-транзитивная группа содержит подгруппу изоморфную группе аффинных преобразований поля $\mathbb{Q}$. Также точно 2-транзитивные группы, используя теоретико–групповые методы, изучали А.И. Созутов, Е.Б. Дураков, Е.В. Бугаева [18].

Долгое время оставался открытым вопрос существования почти-области не являющейся почти-полем. Этот вопрос эквивалент следующему: всякая ли точно 2-транзитивная группа содержит абелеву нормальную подгруппу [5, вопрос 11.52]? Недавно был построен пример [27; 28] точно 2-транзитивной группы без абелевой нормальной подгруппы. Отсюда следует существование примера почти-области, не являющейся почти-полем.

Для построения бесконечной точно 3-транзитивной группы В. Керби [22] определил КТ-поле. *КТ-поле* задаётся парой $(\mathcal{B},\varepsilon)$, где $\mathcal{B}$ — почти-область, а ε

— автоморфизм её мультипликативной группы. Для ε справедливо равенство $\varepsilon(1-\varepsilon(x)) = 1-\varepsilon(1-x),\ x \in B^* \setminus \{1\}$. Произвольная точно 3-транзитивная группа является группой преобразований некоторого КТ-поля.

П.М. Кон [4, лемма 7.5.1] определил алгебраическую систему $R = \langle G; \cdot, ^{-1},$ $\varphi, 1\rangle$ при помощи, действующей на группе G унарной операции $\varphi : G^* \to G^*$, $G^* = G \setminus \{1\}$ аксиомами:

1. $\varphi(yxy^{-1}) = y\varphi(x)y^{-1},\ \ x \in G^*,\ \ y \in G;$
2. $\varphi\left(\varphi(x)\right) = x,\ \ x \in G^*;$
3. $\varphi(xy^{-1}) = \varphi\left(\varphi(x)\left(\varphi(y)\right)^{-1}\right)\varphi(y^{-1}),\ \ x, y \in G^*,\ x \neq y;$
4. элемент $b = \varphi(x^{-1})x\left(\varphi(x)\right)^{-1}$ не зависит от выбора $x \in G^*$,

и показал, что по R можно построить единственное тело $\langle P; +, \cdot\rangle$. При этом получается, что G — мультипликативная группа тела P, $\varphi(x) = 1-x$, $b = -1$.

В. Лейснер [24] показал, что если в определении R оставить только аксиомы 2–4, то получим почти-поле, если оставить только аксиомы 2 и 3, то получим почти-область. В дальнейшем В. Лейснер [25] расширил алгебраическую систему R, включив в её сигнатуру инволюции $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}$, порождающие симметрическую группу $S_{n-1} \subseteq Aut(G)$, причём $\langle\varphi, S_{n-1}\rangle = S_n$. Введённую алгебраическую систему он назвал *полем степени* n. С КТ-полем связано G*-поле степени 3*. В. Лейснер показал, что при помощи полей степени n можно построить точно n-транзитивные группы.

Г.Г. Михайличенко среди локальных групп Ли нашёл все $(n \cdot k)$-параметрические локально точно n-транзитивные группы преобразований множества $\mathbb{R}^k$ для $k = 1$ [11] и $k = 2$ [13; 14]. Все локальные группы при $k = 1$, с точностью до локального изоморфизма, совпадали с глобальными точно n-транзитивными группами с $n = 1,\ 2,\ 3$. Для $n > 3$ других групп нет. Необходимо отметить, что в отличие от точно n-транзитивных групп, прямое произведение локально точно n-транзитивных групп будет локально точно n-транзитивным.

Эти решения были получены Г.Г. Михайличенко в рамках изучения «феноменологически-симметричных геометрий на двух множествах» (далее, для простоты, ФСГ). Развиваемый подход долгое время работал с гладкими функциями над гладкими многообразиями. Первые шаги в изучении алгебраических систем, возникающих в ФСГ, были сделаны Е.Е. Витяевым [2] и В.К. Иониным [3]. Ими были получены алгебраические системы, связанные с ФСГ минимального ранга. Ю.И. Кулаковым [8] была высказана гипотеза об эквивалентном определении ФСГ произвольного ранга через ФСГ минимального ранга. При сопоставлении данной гипотезы и результатов В.К. Ионина [3] можно говорить о групповом умножении прямоугольных матриц [39], которое отличается от обычного матричного умножения — о *псевдоматричном умножении*.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является изучение псевдоматричной алгебраической системы и установление её связей с другими известными алгебраическими системами.

Исходя из поставленной цели, необходимо решить следующие задачи:

1. Построить категорную эквивалентность между точно n транзитивными группами и полями степени n, когда морфизмами категорий являются гомоморфизмы алгебраических систем. Расширить соответствующие алгебраические системы так, чтобы между ними по-прежнему оставалась категорная эквивалентность.

2. Построить псевдоматричную алгебраическую систему, расширяющую матричное умножение и найти примеры.

3. Доказать гипотезу вложимости ФСГ произвольного ранга в ФСГ минимального ранга. Построить категорную эквивалентность между алгебраической системой ФСГ и псевдоматричной алгебраической системой.

Научная новизна. Представленные в диссертации результаты являются новыми, получены автором самостоятельно или в неразделимом соавторстве с научным руководителем В. Г. Бардаковым (§ 2.1).

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Результаты диссертационной работы могут быть использованы специалистами в области теории групп, теории алгебраических систем, теоретической физики. Большая часть результатов может служить основой дальнейших исследований ограниченно точно транзитивных групп, псевдоматричного умножения и поиска новых решений ФСГ.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Введён класс *групп ограниченно точно n-транзитивных* и класс *n-псевдополей*. Установлена их категорная эквивалентность для категорий, когда морфизмами категорий являются гомоморфизмы соответствующих алгебраических систем. Поля степени n являются частным случаем n-псевдополей, отсюда получается категорная эквивалентность точно n-транзитивных групп и полей степени n [34; 36].

2. Построена псевдоматричная алгебраическая система, расширяющая матричное умножение. Построены примеры псевдоматричного умножения для квадратных и прямоугольных матриц. Установлено, что произвольная ограниченно точно n-транзитивная группа задаёт псевдоматричное умножение, равно как и произвольное псевдоматричное умножение задаёт ограниченно точно n-транзитивную группу [33; 35].

3. Установлена категорная эквивалентность алгебраических систем ФСГ и псевдоматричных алгебраических систем. Доказана гипотеза вложимости ФСГ произвольного ранга в ФСГ минимального ранга [33].

Методология и методы исследования. В работе использовались методы теории групп, алгебраических систем и теории категорий.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

«Алгебра и логика», «Теория групп», «Эварист Галуа», семинаре имени А.И. Ширшова (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирского национального исследовательского государственного университета, г. Новосибирск). Научный семинар кафедры алгебры (Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, 2013, 2016 гг.). «Теория физических структур» (Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Горно-Алтайский государственный университет, г. Горно-Алтайск).

Докладывались на конференциях:

1. «Mathematics of Distances and Applications», Varna, Bulgaria, 2012.

2. 9-ая Международная летняя школа «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры», Эрлагол-2011, Республика Алтай, 2011.

3. Международная конференция «Мальцевские чтения» (ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 2000, 2002, 2005, 2007, 2009 гг.).

4. Всероссийская конференция «Знания – Онтологии – Теории», Новосибирск, 2007.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах. Из них пять статей в рецензируемых журналах [33–37], из которых четыре [33–36] входят в перечень ВАК.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично. Работа [35] выполнена совместно с научным руководителем В.Г. Бардаковым при равном участии обеих сторон.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав (разбитых на параграфы), заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 92 страницы. Список литературы содержит 43 наименования. Все утверждения (леммы, предложения, теоремы, следствия) пронумерованы в порядке возрастания. Формулы занумерованы двумя числами: первое соответствует номеру главы, второе — порядковому номеру формулы в данной главе.

Краткое содержание работы.

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы.

В первой главе рассматриваются ограниченно точно n-транзитивные группы и n-псевдополя, устанавливается их связь. Определим множество

$$F(M,n)=\{(m_1,\ldots,m_n)\in M^n | m_i\neq m_j \text{ при } i\neq j\}$$

и рассмотрим непустое подмножество $N\subseteq F(M,n)$. Введём новое понятие:

Определение 2. *Группа $G(M)$ называется N-ограниченно точно n-транзитивной, если для любых $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in N\subseteq F(M,n)$ существует единственный $g\in G$ такой, что $x_i\cdot g=y_i$ для $i=1,\ldots,n$.*

Если $N=F(M,n)$, то $G(M)$ — *точно n-транзитивная группа.* Многие известные точно 2-транзитивные группы являются группами аффинных преобразований почти-полей. Рассмотрим правое почти-кольцо $\mathbb{K}$ с единицей 1. Множество обратимых элементов $K^*\subset K$ образует группу $\langle K^*;\cdot,{}^{-1},1\rangle$. Определим подмножество $N\subseteq F(K,2)$: $N=\{(x,y)\in K^2|x-y\in K^*\}$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{K}$ — правое почти-кольцо с мультипликативной группой $\langle K^*;\cdot,^{-1},1\rangle$. Определим на N бинарную операцию:*

$$(x_1,x_2)\circ(y_1,y_2)=(f(x_1,y_1,y_2),f(x_2,y_1,y_2))\,,$$

где функция $f:K\times N\to K$ определена равенством:

$$f(x,y_1,y_2)=x\,(y_1-y_2)+y_2.$$

Тогда алгебраическая система $G=\langle N;\circ\rangle$ является группой, которая действует на $\mathbb{K}$ и это действие является N-ограниченно точно 2-транзитивным. При этом группа $G(K)$ изоморфна группе аффинных преобразований правого почти-кольца $\mathbb{K}$.

Для определения n-псевдополя рассмотрим группу $B_1=\langle B_1;\bullet,^{-1},e_1\rangle$ которая действует на множестве A, $A\cap B_1=\emptyset$. Будем рассматривать правое действие группы B_1 на A. Действие элемента $b\in B_1$ на элемент $a\in A$ обозначим символом $a\cdot b\in A$. Продолжим это действие на множество $B=A\cup B_1$, по правилу:

$$c\cdot b=\begin{cases} c\cdot b, & \text{если } c\in A,\\ c\bullet b, & \text{если } c\in B_1.\end{cases}$$

Таким образом, операция «$\cdot$» является частичной операцией на множестве B.

На множестве B действуют инволюции $\varphi_i : B \to B$, $i = 1, \dots, n$, разбивающие множество B на непересекающиеся подмножества. Обозначим $A_i \subseteq A$, $B_i \subseteq B_1$ — инвариантные относительно φ_i подмножества, т. е. $A_i^{\varphi_i} \subseteq A_i$, $B_i^{\varphi_i} \subseteq B_i$. Дополнения соответствующих множеств: $\overline{A_i} = A \setminus A_i$, $\overline{B_i} = B_1 \setminus B_i$.

Определение 4. *Алгебраическую систему $\mathbb{B}_n = \langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \dots, \varphi_n, e_1\rangle$ с частичной операцией «$\cdot$» будем называть n-псевдополем если справедливы аксиомы:*

(A1) $\varphi_i\big(\varphi_i(x) \cdot \varphi_i(y)\big) = \varphi_i\big(x \cdot \varphi_i(y^{-1})\big) \cdot y,\ x \in B,\ y \in B_i,\ i = 2, \dots, n;$

(A2) *для произвольных $i \neq j \in \{2, \dots, n\}$ выполняется равенство $\varphi_i\varphi_j\varphi_i = \varphi_j\varphi_i\varphi_j$;*

(A3) *для $\sigma_i = \varphi_2\varphi_i\varphi_2$ справедливы равенства $\sigma_i(x \cdot y) = \sigma_i(x) \cdot \sigma_i(y)$, где $i = 3, \dots, n$ и $x \in B, y \in B_1$;*

(A4) $\varphi_i\varphi_j(e_1) = \varphi_j(e_1)$ *при $i \neq j \in \{2, \dots, n\}$.*

Символом $K\mathbb{B}_n$ обозначим класс n-псевдополей $\mathbb{B}_n$. Для построения групп ограниченно точно n-транзитивных в классе $K\mathbb{B}_2$ 2-псевдополей выделим подкласс $K\mathbb{B}_2^*$ для которых выполняется условие

(A5) Для произвольных $x \in \overline{B_2}$ и $y \in B_2$ справедливо $xy \in B_2$.

Для 2-псевдополя $\mathbb{B}_2 \in K\mathbb{B}_2^*$ определим множество

$$N_2 = \{(x, y) \in B^2 | \varphi_2(x \cdot y^{-1}) \in B_1 \text{ или } \varphi_2(\varphi_2(x) \cdot E\varphi_2(y)) \in B_1\}$$

и функцию $f_2 : B \times N_2 \to B$:

$$f_2(x, y_1, y_2) = \begin{cases} \varphi_2\big(x\varphi_2(y_1y_2^{-1})\big)y_2, & \text{при } y_2 \in B_1, \\ \varphi_2\Big(\varphi_2\Big(\varphi_2(x)\varphi_2\big(\varphi_2(y_1)E\varphi_2(y_2)\big)\Big)\varphi_2(y_2)\Big), & \text{при } y_2 \in \overline{A_2}. \end{cases}$$

Лемма 5. *Алгебраическая система $\langle N; \circ\rangle$ с операцией:*

$$[x_1, x_2] \circ [y_1, y_2] = [f_2(x_1, y_1, y_2), f_2(x_2, y_1, y_2)],$$

построенной при помощи функции f_2 определённой выше, является N_2-ограниченно точно 2-транзитивной группой, действующей на $\mathbb{B}_2 \in K\mathbb{B}_2^*$.

Введём подкласс n-псевдополей $K\mathbb{B}_n^* \subseteq K\mathbb{B}_n$ такой, что для произвольного n-псевдополя $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\rangle \in K\mathbb{B}_n^*$ соответствующее ему 2-псевдополе: $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2\rangle$ лежит в $K\mathbb{B}_2^*$.

Для n-псевдополя $\mathbb{B}_n \in K\mathbb{B}_n^*$ определим множество N_n и функцию $f_n : B \times N_n \to B$ индукцией по n. Множество N_2 и функция f_2 определены ранее для леммы 5. Пусть определено множество N_{n-1} для $(n-1)$-псевдополя. Тогда определим множество N_n:

$$N_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n | \big(\varphi_n(x_1 x_n^{-1}), \ldots, \varphi_n(x_{n-1} x_n^{-1})\big) \in N_{n-1}, x_n \in B_1\} \cup$$
$$\cup_{k=2}^{n} \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n | \Big(\varphi_n\big(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_n)\big), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_n\big(\varphi_k(x_{n-1}) E \varphi_k(x_n)\big)\Big) \in N_{n-1}, x_n \in \overline{A_k}\Big\}.$$

Пусть определена функция f_{n-1} для $(n-1)$-псевдополя. Тогда определим функцию f_n:

$$f_n(x, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_k\Big(\varphi_n\Big(f_{n-1}\Big(\varphi_n\big(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_n)\big), \ldots,$$
$$\ldots, \varphi_n\big(\varphi_k(x_{n-1}) E \varphi_k(x_n)\big)\Big)\Big)\varphi_k(y_n)\Big), \text{ где } k = \begin{cases} 1, \text{ если } y_n \in B_1, \\ m, \text{ если } y_n \in \overline{A_m}. \end{cases}$$

Теорема 3. *Алгебраическая система* $\langle G_n; \circ\rangle$, $n = 3, \ldots, n$ *с операцией, определённой равенством:*

$$[x_1, \ldots, x_n] \circ [y_1, \ldots, y_n] = [f_n(x_1, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x_n, y_1, \ldots, y_n)],$$

является N_n*-ограниченно точно* n*-транзитивной группой, действующей на* $\mathbb{B}_n \in K\mathbb{B}_n^*$.

Для построения n-псевдополя по N-ограниченно точно n-транзитивной группе $G_n(B)$ фиксируем произвольный $(e_1, \ldots, e_n) \in N \subseteq B^n$. По множеству N строим множество кортежей $\widetilde{G_n} = \{[g_1, \ldots, g_n] \big| (g_1, \ldots, g_n) \in N\}$. Определим соответствие $\psi : G_n \to \widetilde{G_n}$ по правилу $g \mapsto [g_1, \ldots, g_n]$, где $g_i = e_i \cdot g$. Определим на $\widetilde{G_n}$ произведение в виде:

$$[g_1, \ldots, g_n] \circ [h_1, \ldots, h_n] = [g_1 \cdot [h_1, \ldots, h_n], \ldots, g_n \cdot [h_1, \ldots, h_n]].$$

Лемма 6. *Соответствие ψ задаёт изоморфизм групп $\langle G_n; \cdot\rangle$ и $\langle\widetilde{G_n}; \circ\rangle$.* Для нейтрального элемента $\varepsilon \in G_n$ соответствующий $\psi(\varepsilon) = E = [e_1, \ldots, e_n]$.

Для произвольного множества B рассмотрим его декартово произведение B^n и определим операции проектирования $\mathrm{Pr}_i : B^n \to B$ так, что если $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n$, то $\mathrm{Pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Для произвольного $X = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n$ определим X_{ij}, который получается из X перестановкой i-й и j-й компонент.

Далее будем рассматривать N-ограниченно точно n-транзитивные группы с дополнительным условием:

(T1) если $X \in N$, то $X_{ij} \in N$ для всех $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$.

В классе KT_2 рассмотрим подкласс KT_2^*, состоящий из групп G_2 для которых выполнено условие:

(T2) для любых $(y_1, y_2) \in N$ и $x \in \mathrm{Pr}\,_1(N)$ справедливо, по крайней мере, одно из условий $(x, y_2) \in N$ или $(y_1, x) \in N$.

Лемма 7. *Если группа $G_2(B) \in KT_2^*$, то на множестве B индуцировано 2-псевдополе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, e_1\rangle \in K\mathbb{B}_2^*$, где $\phi_2(x) = x \cdot [e_2, e_1]$.*

Определим класс $KT_n^* \subseteq KT_n$ состоящий из ограниченно точно n-транзитивных групп $G_n(B)$, стабилизаторы $St_{G_n(B)}(e_3, \ldots,\ e_n) = G_2(B)$ которых лежат в классе KT_2^*. Тогда, справедлива

Теорема 4. *Если группа $G_n(B) \in KT_n^*$, то на множестве B можно определить n-псевдополе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n, e_1\rangle \in K\mathbb{B}_n^*$, где $\phi_i(x) = x \cdot E_{1i}$.*

Теорема 5. *Категории n-псевдополей $\mathcal{C}\mathbb{B}_n^*$ и ограниченно точно n-транзитивных групп $\mathcal{C}T_n(B)^*$ эквивалентны.*

Результаты первой главы опубликованы в работах [34; 36]

Во второй главе рассматривается псевдоматричное умножение. В § 2.1 строится пример псевдоматричного умножения.

Для определения псевдоматричного умножения рассмотрим прямоугольные матрицы $A, B \in M_{m,n}$ размера $m \times n$, где m — число строк, n — число столбцов матрицы с элементами из множества R. Псевдоматричным умножением двух матриц A и B является матрица C, построенная при помощи

$$f : R^n \times R^m \to R.$$

Элемент c_{ij} матрицы C есть функция f от n элементов i–ой строки матрицы A и m элементов j–го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj}).$$

Отображение $f : \Omega_R \times \Sigma_R \to R$ задаёт *псевдоматричное умножение* на множестве G. Трёхсортную алгебраическую систему $\langle \Omega_R, \Sigma_R, R; f \rangle$ будем называть *псевдоматричной алгебраической системой*, если выполнены аксиомы:

AM1. Для произвольных матрицы $A \in G$ и столбца $C^j \in \Sigma_R$ существует единственный $B^j \in \Sigma_R$, для которого справедливо равенство $A \cdot_f B^j = C^j$;

AM2. Для произвольных матрицы $B \in G$ и строки $C_i \in \Omega_R$ существует единственная строка $A_i \in \Omega_R$, для которой справедливо равенство $A_i \cdot_f B = C_i$;

AM3. Умножение матриц ассоциативно. Иными словами, для произвольных $A, B, C \in G$ справедливо равенство $(A \cdot_f B) \cdot_f C = A \cdot_f (B \cdot_f C)$.

Теорема 9. *Псевдоматричное умножение для матриц размера $m \times n$ можно записать при помощи псевдоматричного умножения матриц–столбцов с функцией f^m или псевдоматричного умножения матриц–строк с функцией f^n.*

Результаты второй главы опубликованы в работах [33; 35].

В первом параграфе **третьей главы** даётся определение:

Трёхсортную алгебраическую систему $\langle M, N, B; f, g \rangle$ с операциями

$$f : M \times N \to B, \;\; g : B^{n+mn+m} \to B,$$

определенными на множествах $M \times N, B$ будем называть *алгебраической системой ФСГ ранга (m, n)*, если на подмножествах $\Sigma_M \subseteq M^m$, $\Sigma_B \subseteq B^m$, $\Omega_N \subseteq N^n$, $\Omega_B \subseteq B^n$ выполнены аксиомы:

АК1. Для любых $(i_1, \ldots, i_m) \in \Sigma_M$, $(b_1, \ldots, b_m) \in \Sigma_B$ найдётся единственный $\alpha \in N$, для которого справедливо равенство $f(i_j, \alpha) = b_j$, $j = 1, \ldots, m$;

АК2. Для любых $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Omega_N$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \Omega_B$ найдётся единственный $i \in M$, для которого справедливо равенство $f(i, \alpha_j) = b_j$, $j = 1, \ldots, n$;

АК3. Для любых $(i_0, i_1, \ldots, i_m) \in M \times \Sigma_M$, $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N \times \Omega_N$ справедливо равенство $f(i_0, \alpha_0) = g\left(f(i_0, \alpha_1), \ldots, f(i_m, \alpha_n)\right)$. В последнем равенстве функция g от $n + mn + m$ переменных рассматривается над элементами $f(i_j, \alpha_k) \in B$, построенными над всеми парами (i_j, α_k), за исключением (i_0, α_0).

Ю.И. Кулаков в [8] сформулировал гипотезу:

Гипотеза 1. *Всякая алгебраическая система* $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}; f, g \rangle$ *ранга* (m, n) *вложима в некоторую алгебраическую систему* $\left\langle \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g} \right\rangle$ *ранга (1,1), но построенную над матрицами* $\mathbb{R}^{mn}$.

Данная гипотеза доказана для произвольных множеств M, N, B:

Теорема 11. *Алгебраическая система ФСГ* $\langle M, N, B; f, g \rangle$ *ранга* (m, n) *вложима в некоторую* $\langle M^m, N^n, B^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g} \rangle$ *ранга (1,1).*

Теорема 12. *Категории алгебраических систем ФСГ и псевдоматричных алгебраических систем эквивалентны.*

Результаты третьей главы опубликованы в работе [33].

В Заключении приводятся основные результаты диссертации.

Список литературы завершает изложение работы.

Благодарность. Автор выражает искреннюю признательность своему учителю Юрию Ивановичу Кулакову за интересную и плодотворную тему, благодарность научному руководителю Валерию Георгиевичу Бардакову за помощь в работе и скрупулезность. Автор благодарит участников Горно–Алтайской школы ТФС во главе с Г.Г. Михайличенко, участников семинаров им. А.И. Ширшова, «Эварист Галуа» и «Теория групп» за полезные обсуждения и лично руководителей семинаров Л.А. Бокутя, В.Д. Мазурова за щедрые советы и стимулирование работы.

Глава 1

Ограниченно точно транзитивные группы

В первом параграфе даются определения и простейшие свойства ограниченно точно n-транзитивных групп. Приводятся основные примеры таких групп. Во втором параграфе даётся определение n-псевдополя и доказываются простейшие его свойства. В третьем параграфе строятся ограниченно точно n-транзитивные группы над n-псевдополями. В четвёртом параграфе при помощи ограниченно точно n-транзитивных групп строятся n-псевдополя. В пятом параграфе, на основе результатов четвёртого параграфа, приводятся примеры n-псевдополей. В шестом параграфе доказывается основная теорема первой главы о категорной эквивалентности классов ограниченно точно n-транзитивных групп и n-псевдополей.

1.1. Общие сведения об ограниченно точно n-транзитивных группах

Будем считать, что группа $G = \langle G; \bullet, {}^{-1}, \varepsilon \rangle$ действует справа на множестве M, если задано отображение $M \times G \to M$, обозначаемое $(m, g) = m \cdot g$, такое что

1) $m \cdot \varepsilon = m$, для произвольного $m \in M$;
2) $m \cdot (g \bullet h) = (m \cdot g) \cdot h$, для произвольных $g, h \in G$.

В этом случае будем говорить, что задана группа преобразований $G(M) = (G, M)$ множества M с правым действием.

Напомним, что группа $G(M)$ называется транзитивной, если каждый элемент $x \in M$ может быть переведён в любой элемент $y \in M$ подходящим элементом $g \in G$, т. е. $x \cdot g = y$.

Каждое действие G на M индуцирует действие G на $M^n = M \times \ldots \times M$

по правилу $(m_1, \dots, m_n) \cdot g = (m_1 \cdot g, \dots, m_n \cdot g)$.

Определим множество

$$F(M, n) = \{(m_1, \dots, m_n) \in M^n | m_i \neq m_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Определение 1. *Группа $G(M)$ называется n-транзитивной, если для любых $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in F(M, n)$ существует такой элемент $g \in G$, что $x_i \cdot g = y_i$ для $i = 1, \dots, n$.*

Рассмотрим некоторое непустое подмножество $N \subseteq F(M, n)$.

Определение 2. *Группа $G(M)$ называется N-ограниченно точно n-транзитивной, если для любых $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in N \subseteq F(M, n)$ существует единственный $g \in G$ такой, что $x_i \cdot g = y_i$ для $i = 1, \dots, n$.*

В частности, если $N = F(M, n)$, то $G(M)$ называется *точно n-транзитивной группой.*

Рассмотрим типичный пример.

Пример 1. *Общая линейная группа $G = GL_n(F)$ над полем F действует на множестве строк $M = F^n$. Подмножество $F(M, n)$ — множество матриц без равных строк. Если в качестве подмножества N выбрать множество всех базисов пространства M, то $G(M)$ будет являться N-ограниченно точно n-транзитивной группой.*

Многие известные точно 2-транзитивные группы являются группами аффинных преобразований почти-полей. Аналогично, некоторые ограниченно точно 2-транзитивные группы можно построить как группы аффинных преобразований почти-колец. Напомним

Определение 3 ([1, Гл. VI, §4])**.** *Алгебраическая система $\mathbb{K} = \langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$ называется правым почти-кольцом, если*

1. $\langle K; +, -, 0\rangle$ — группа, *2. $\langle K; \cdot \rangle$ — полугруппа,*

3. для произвольных $x, y, z \in K$ выполнена правосторонняя дистрибутивность: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Рассмотрим далее правое почти-кольцо $\mathbb{K}$ с единицей 1. Множество обратимых элементов $K^* \subset K$ образуют группу $\langle K^*; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$. Определим подмножество $N \subseteq F(K, 2)$:

$$N = \{(x, y) \in K^2 | x - y \in K^*\}.$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{K}$ — правое почти-кольцо с мультипликативной группой $\langle K^*; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$. Определим на N бинарную операцию:*

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)), \tag{1.1}$$

где функция $f : K \times N \to K$ определена равенством:

$$f(x, y_1, y_2) = x\,(y_1 - y_2) + y_2. \tag{1.2}$$

Тогда алгебраическая система $G = \langle N; \circ\rangle$ является группой, которая действует на $\mathbb{K}$ и это действие является N-ограниченно точно 2-транзитивным. Группа $G(K)$ изоморфна группе аффинных преобразований правого почти-кольца $\mathbb{K}$.

Доказательство. Сначала проверим, что если $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in N$, то $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) \in N$. Воспользовавшись правосторонней дистрибутивностью имеем:

$$f(x_1, y_1, y_2) - f(x_2, y_1, y_2) = x_1(y_1 - y_2) - x_2(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)\,(y_1 - y_2) \in K^*.$$

Проверим ассоциативность введённой операции. В силу определения умножения (1.1) достаточно рассмотреть умножение на x_i, $i = 1, 2$. Тогда с одной стороны

$$\begin{aligned}\big(x_i \circ (y_1, y_2)\big) \circ (z_1, z_2) &= f(f(x_i, y_1, y_2), z_1, z_2)\\ &= (x_i(y_1 - y_2) + y_2)\,(z_1 - z_2) + z_2 = x_i(y_1 - y_2)\,(z_1 - z_2) + y_2\,(z_1 - z_2) + z_2,\end{aligned}$$

а с другой:

$$
\begin{aligned}
x_i \circ \big((y_1, y_2) \circ (z_1, z_2)\big) &= f(x_i, f(y_1, z_1, z_2), f(y_2, z_1, z_2)) \\
&= x_i \left(y_1 \left(z_1 - z_2\right) + z_2 - z_2 - y_2 \left(z_1 - z_2\right)\right) + y_2 \left(z_1 - z_2\right) + z_2 \\
&= x_i(y_1 - y_2) \left(z_1 - z_2\right) + y_2 \left(z_1 - z_2\right) + z_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, операция ассоциативна.

В данной полугруппе элемент $(1, 0) \in N$ будет нейтральным, что следует из того, что $\mathbb{K}$ — правое почти кольцо с единицей. Легко проверяется и то, что элемент

$$
E\left(x_1, x_2\right) = \big((1 - x_2)\left(x_1 - x_2\right)^{-1}, -x_2(x_1 - x_2)^{-1}\big)
$$

принадлежит N и будет обратным к (x_1, x_2).

Таким образом мы показали, что $G = \langle N; \circ\rangle$ является группой. Функция (1.2) задаёт её действие на $\mathbb{K}$. Группа G при действии на множестве N точно транзитивна, следовательно при действии на правом почти-кольце $\mathbb{K}$ группа G является N-ограниченно точно 2-транзитивной.

Покажем, что отображение $\Psi : N \to K^* \times K$ в виде $\Psi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2)$ задаёт изоморфизм групп $G \to K^* \leftthreetimes K$:

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) &= \Psi\big(\Psi^{-1}(x_1, x_2) \circ \Psi^{-1}(y_1, y_2)\big) \\
&= \Psi\big((x_1 + x_2, x_2) \circ (y_1 + y_2, y_2)\big) = \Psi\big((x_1 + x_2)y_1 + y_2, x_2 y_1 + y_2\big) \\
&= \Psi\big(x_1 y_1 + x_2 y_1 + y_2, x_2 y_1 + y_2\big) = \big(x_1 y_1, x_2 y_1 + y_2\big).
\end{aligned}
$$

При этом отображение $K \times (K^* \leftthreetimes K) \to K$ в виде $x \mapsto x \cdot a + b$, для $x \in K$, $(a, b) \in K^* \leftthreetimes K$ задаёт действие группы $K^* \leftthreetimes K$ на $\mathbb{K}$. Таким образом $(K^* \leftthreetimes K)\big(K\big)$ является группой аффинных преобразований правого почти-кольца $\mathbb{K}$. $\square$

Если в теореме 1 $\mathbb{K}$ является почти-полем, то группа $G(K)$ преобразования $\mathbb{K}$ является точно 2-транзитивной.

В работах [27; 28] был построен пример точно 2-транзитивной группы без абелевой нормальной подгруппы. В силу [26] эта группа будет изоморфна группе аффинных преобразований некоторой почти-области. К сожалению, явный вид такой почти-области неизвестен.

Автором [33; 36] были построены примеры алгебраических систем близких к почти-областям, группы преобразований которых будут группами ограниченно точно 2-транзитивными.

Рассмотрим пример. Пусть дана алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}^2; \oplus, \ominus, \odot \rangle$ с бинарными операциями:

$$(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^2 + (x_1 - 1) x_1 y_1^2 \ln |y_1|),$$

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2 x_1 y_1 \ln |y_1|), \tag{1.3}$$

$$(x_1, x_2) \ominus (y_1, y_2) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2 + 2(y_1 - x_1) y_1 \ln |y_1|). \tag{1.4}$$

Считаем, что $x \ln |x| \Big|_{x=0} = 0$.

Определим подмножество $N \subseteq F(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 2)$:

$$N = \{\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \in \mathbb{R}^4 | (x_1, x_2) \ominus (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}.$$

Теорема 2. *Алгебраическая система $\langle N; \circ \rangle$ с операцией определённой в теореме 1 является N-ограниченно точно 2-транзитивной группой, действующей на $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Проверим, что алгебраическая система $\langle \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}; \odot \rangle$ является группой. Очевидно, что если $x, y \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, то $x \odot y \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Элемент $(1, 0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ является нейтральным. Проверим выполнение ассоциативности.

С одной стороны:

$$\begin{aligned}((x_1, x_2) \odot (y_1, y_2)) \odot (z_1, z_2) &= (x_1 - 1) \ln (|y_1|)\, x_1\, {y_1}^2 {z_1}^2 \\ &+ (x_1 y_1 - 1) \ln (|z_1|)\, x_1\, y_1\, {z_1}^2 + (x_2\, {y_1}^2 + x_1\, y_2)\, {z_1}^2 + x_1\, y_1\, z_2.\end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \odot ((y_1, y_2) \odot (z_1, z_2)) &= \left(x_1\, {y_1}^2 {z_1}^2 - x_1\, y_1\, {z_1}^2\right) \ln (|z_1|) \\ &+ \left({x_1}^2 {y_1}^2 {z_1}^2 - x_1\, {y_1}^2 {z_1}^2\right) \ln (|y_1\, z_1|) + (x_2\, {y_1}^2 + x_1\, y_2)\, {z_1}^2 + x_1\, y_1\, z_2.\end{aligned}$$

Учитывая равенство $\ln(|y_1 z_1|) = \ln(|y_1|) + \ln(|z_1|)$, получим требуемое. Легко проверяется, что отображение $E : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, определённое в виде

$$E(x_1, x_2) = \frac{x_1(x_1 - 1)\ln(|x_1|) - x_2}{x_1^3},$$

задаёт операцию взятия обратного. Таким образом $\langle \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}; \odot \rangle$ — группа.

Очевидно, что операции (1.3), (1.4) замкнуты на $\mathbb{R}^2$, а элемент $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ является нулевым:

$$(0,0) \oplus x = x \oplus (0,0) = x, \ \text{ для } x \in \mathbb{R}^2.$$

Прямой проверкой устанавливается равенство:

$$(x \oplus y) \ominus y = x, \ (x \ominus y) \oplus y = x, \ \text{ для } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Проверим правостороннюю дистрибутивность. С одной стороны:

$$\begin{aligned}((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \odot (z_1, z_2) = \Big((x_1 + y_1)z_1, 2\ln(|y_1|)\, x_1\, y_1\, {z_1}^2 \\ + {z_1}^2 (x_1 + y_1)(x_1 + y_1 - 1)\ln(|z_1|) + (x_2 + y_2)z_1^2 + (x_1 + y_1)z_2\Big).\end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \odot (z_1, z_2) \oplus (y_1, y_2) \odot (z_1, z_2) = \Big((x_1 + y_1)z_1, 2\ln(|y_1 z_1|)\, x_1\, y_1\, {z_1}^2 \\ + {z_1}^2 (x_1^2 + y_1^2 - x_1 - y_1)\ln(|z_1|) + (x_2 + y_2)z_1^2 + (x_1 + y_1)z_2\Big).\end{aligned}$$

Тогда с учётом равенства $\ln(|y_1 z_1|) = \ln(|y_1|) + \ln(|z_1|)$ получаем правостороннюю дистрибутивность. Аналогично проверяется и выполнение правосторонней дистрибутивности для операции вычитания, т. е. $(x \ominus y) \odot z = x \odot z \ominus y \odot z$.

Благодаря правосторонней дистрибутивности, как и в теореме 1, убедимся, что если $\big((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})\big), \big((y_{11}, y_{12}), (y_{21}, y_{22})\big) \in N$, то $\big((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})\big) \circ \big((y_{11}, y_{12}), (y_{21}, y_{22})\big) \in N$:

$$\begin{aligned}&f\big((x_{11}, x_{12}), (y_{11}, y_{12}), (y_{21}, y_{22})\big) \ominus f\big((x_{21}, x_{22}), (y_{11}, y_{12}), (y_{21}, y_{22})\big) \\ &\quad = (x_{11}, x_{12}) \odot \big((y_{11}, y_{12}) \ominus (y_{21}, y_{22})\big) \ominus (x_{21}, x_{22}) \odot \big((y_{11}, y_{12}) \ominus (y_{21}, y_{22})\big) \\ &\quad = \big((x_{11}, x_{12}) \ominus (x_{21}, x_{22})\big) \odot \big((y_{11}, y_{12}) \ominus (y_{21}, y_{22})\big) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что для функции $h:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданной в виде

$$h\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\Big(1,2\big(x_1\ln(|x_1|)+y_1\,\ln(|y_1|)-(y_1+x_1)\ln(|x_1+y_1|)\,\big)\Big)$$

справедливы два тождества:

$$(x\oplus y)\oplus z=x\odot h(y,z)\oplus(y\oplus z). \tag{1.5}$$

$$(x\oplus z)\ominus(y\oplus z)=(x\ominus y)\odot h(y,z). \tag{1.6}$$

Для произвольных $(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in N$ рассмотрим их действие на $\mathbb{R}^2$, задаваемое функцией (1.2) и покажем, что это действие ассоциативно. С одной стороны, с учётом (1.5):

$$\begin{aligned}f(f(x,y_1,y_2),z_1,z_2)&=\big(x\odot(y_1\ominus y_2)\oplus y_2\big)\odot(z_1\ominus z_2)\oplus z_2\\&=\big(x\odot(y_1\ominus y_2)\odot(z_1\ominus z_2)\oplus y_2\odot(z_1\ominus z_2)\big)\oplus z_2\\&=x(y_1\ominus y_2)\odot(z_1\ominus z_2)\odot h\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2),z_2\big)\oplus\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2)\oplus z_2\big).\end{aligned}\tag{1.7}$$

С другой стороны, с учётом (1.6):

$$\begin{aligned}f(x,(y_1,y_2)\circ(z_1,z_2))&=f(x,f(y_1,z_1,z_2),f(y_2,z_1,z_2))\\&=x\Big(\big(y_1\odot(z_1\ominus z_2)\oplus z_2\big)\ominus\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2)\oplus z_2\big)\Big)\oplus\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2)\oplus z_2\big)\\&=x\Big(\big(y_1\odot(z_1\ominus z_2)\big)\ominus\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2)\big)\Big)\odot h\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2),z_2\big)\oplus\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2)\oplus z_2\big)\\&=x(y_1\ominus y_2)\odot(z_1\ominus z_2)\odot h\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2),z_2\big)\oplus\big(y_2\odot(z_1\ominus z_2)\oplus z_2\big).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Сравнивая (1.7) и (1.8) придём к тому, что $\langle N;\circ\rangle$ — группа преобразований множества $\mathbb{R}^2$. В силу того, что при действии на N группа $\langle N;\circ\rangle$ является точно транзитивной, следовательно, при действии на $\mathbb{R}^2$, она N-ограниченно точно 2-транзитивна. □

Замечание 1. *В рассмотренной алгебраической системе* $\langle\mathbb{R}^2;\oplus,\odot\rangle$, *как и в почти-областях:*

1. $\langle \mathbb{R}^2; \oplus \rangle$ *— лупа;*

2. $\langle G; \odot \rangle$ *на подмножестве* $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ *является группой;*

3. справедливо равенство (1.5).

1.2. Определение n-псевдополя и общие следствия

Рассмотрим группу $B_1 = \langle B_1; \bullet, ^{-1}, e_1 \rangle$, которая действует на множестве A, $A \cap B_1 = \emptyset$. Будем рассматривать правое действие группы B_1 на A. Действие элемента $b \in B_1$ на элемент $a \in A$ обозначим символом $a \cdot b \in A$. Продолжим это действие на множество $B = A \cup B_1$, по правилу:

$$c \cdot b = \begin{cases} c \cdot b, & \text{если } \ c \in A, \\ c \bullet b, & \text{если } \ c \in B_1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Таким образом, операция «$\cdot$» является частичной операцией на множестве B. В дальнейшем символ «$\cdot$» в операции умножения иногда будем опускать.

Пусть на множестве B действуют инволюции $\varphi_i : B \to B$, $i = 1, \ldots, n$, причём $\varphi_1 = id$. Каждая из инволюций φ_i разбивает множество B на непересекающиеся подмножества. Обозначим $A_i \subseteq A, B_i \subseteq B_1$ — инвариантные относительно φ_i подмножества, т. е. $A_i^{\varphi_i} \subseteq A_i$, $B_i^{\varphi_i} \subseteq B_i$. Обозначим $\overline{A_i}$, $\overline{B_i}$ — дополнения соответствующих множеств: $\overline{A_i} = A \setminus A_i$, $\overline{B_i} = B_1 \setminus B_i$. Заметим, что $(\overline{A_i})^{\varphi_i} = \overline{B_i}$ и $\overline{A_1} = \emptyset$.

Определение 4. *Алгебраическую систему* $\mathbb{B}_n = \langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, e_1 \rangle$ *с частичной операцией (1.9) будем называть n-псевдополем, если справедливы аксиомы:*

(A0) $\varphi_i^2 = id$;

(A1) $\varphi_i\big(\varphi_i(x) \cdot \varphi_i(y)\big) = \varphi_i\big(x \cdot \varphi_i(y^{-1})\big) \cdot y, \ x \in B, \ y \in B_i, \ i = 2, \ldots, n;$

(A2) *для произвольных* $i \neq j \in \{2, \ldots, n\}$ *выполняется равенство* $\varphi_i \varphi_j \varphi_i = \varphi_j \varphi_i \varphi_j$;

(A3) *для* $\sigma_i = \varphi_2 \varphi_i \varphi_2$ *справедливы равенства* $\sigma_i(x \cdot y) = \sigma_i(x) \cdot \sigma_i(y)$, *где* $i = 3, \ldots, n$ *и* $x \in B, y \in B_1$;

(A4) $\varphi_i\varphi_j(e_1) = \varphi_j(e_1)$ *при* $i \neq j \in \{2, \ldots, n\}$.

Если определить отображения $\sigma_{ij} = \varphi_i\varphi_j\varphi_i$, то для произвольных, попарно различных $i, j, k \in \{2, \ldots, n\}$ выполняется коммутативность

$$\varphi_i\sigma_{jk} = \sigma_{jk}\varphi_i. \tag{1.10}$$

В дальнейшем будем рассматривать класс n-псевдополей $\mathbb{B}_n$ обозначив его символом $K\mathbb{B}_n$.

Лемма 1. *В n-псевдополе $\mathbb{B}_n$, если $x \in B_i$, то $x^{-1} \in B_i$ для $i = 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Действительно, если в (A1) для $y \in B_i$ выполняется $y^{-1} \in \overline{B_i}$, то правая часть тождества (A1) не определена. □

Лемма 2. *В n-псевдополе $\mathbb{B}_n$ эквивалентны следующие утверждения:*
1) для любых $x \in \overline{A_i}$ и $y \in B_i$ справедливо $x \cdot y \in \overline{A_i}$;
2) для любых $x \in \overline{B_i}$ и $y \in B_i$ справедливо $x \cdot y \in B_i$;
3) $\overline{B_i}$ — подгруппа группы B_1.

Доказательство. Для произвольных $x \in \overline{B_i}, y \in B_i$ выполнено $xy \in B_1 = B_i \cup \overline{B_i}$. Из леммы 1 следует, что если $y \in B_i$, то $\varphi_i(y^{-1}) \in B_i$.

Покажем сначала, что из 1) следует 2).

Пусть выполнено утверждение 1) леммы. Допустим, что найдутся такие $x \in \overline{B_i}, y \in B_i$, для которых справедливо $x\varphi_i(y^{-1}) \in \overline{B_i}$. Тогда для левой части тождества (A1) справедливо $\varphi_i(x) \in \overline{A_i}$. Следовательно, с учётом 1) и леммы 1: $\varphi_i(x)\varphi_i(y) \in \overline{A_i}$. Это приводит к тому, что в левой части $\varphi_i(\varphi_i(x)\varphi_i(y)) \in \overline{B_i}$.

Для правой части равенства (A1) выполнено $\varphi_i(x\varphi_i(y^{-1})) \in \overline{A_i}$ и, следовательно, правая часть равенства принадлежит множеству $\overline{A_i}$. Получили противоречие, значит из 1) следует 2).

Пусть верно 2), тогда при произвольных $x \in \overline{A_i}, y \in B_i$ для левой части равенства (A1): $\varphi_i(\varphi_i(x)\varphi_i(y)) \in B_i$. Для правой части тождества (A1):

$x\varphi_i(y^{-1}) \in A_i \cup \overline{A_i}$. Предположим, что найдутся такие $x \in \overline{A_i}, y \in B_i$, для которых $x\varphi_i(y^{-1}) \in A_i$. Тогда в правой части равенства (A1): $\varphi_i(x\varphi(y^{-1})) \in A_i$ и, следовательно, $\varphi_i(x\varphi_i(y^{-1}))y \in A$. Пришли к противоречию, значит из 2) следует 1).

Покажем, что из 2) следует 3). Допустим, что найдутся такие $x, y \in \overline{B_i}$, для которых $xy \in B_i$, но тогда с учётом 2) и леммы 1

$$x = (xy)y^{-1} \in B_i.$$

Пришли к противоречию, тогда из 2) следует 3). В обратную сторону утверждение очевидно. □

Непосредственно из доказательства леммы получается

Следствие 1. *Если выполнено одно из условий леммы 2, то группа B_1 действует инвариантно на A_i, $i = 2, \dots n$.*

Введём дополнительную запись для операции взятия обратного в группе $\langle B_1, \bullet \rangle$ в виде $E(x) = x^{-1}$. Для последовательного выполнения операций будем использовать бесскобочную запись, например $\varphi_i(E(x)) = \varphi_i E(x)$. Обозначим $\varphi_i E \varphi_i(x) = \widetilde{\varphi}_i(x)$. Для нейтрального элемента e_1 группы B_1 определим элементы $e_i = \varphi_i(e_1)$. Справедлива

Лемма 3. *Элементы $e_i = \varphi_i(e_1)$ для $i = 2, \dots, n$ являются левыми нулями n-псевдополя $\mathbb{B}_n$.*

Доказательство. Для произвольных $t \in B, x \in \overline{B_i}, y \in B_i$ справедливо равенство:

$$\varphi_i\big(\varphi_i(\varphi_i(t)x)y\big) = \varphi_i\Big(t\varphi_i\big(\varphi_i(y)E\varphi_i(\varphi_i(x)y)\big)\Big)\varphi_i(\varphi_i(x)y). \tag{1.11}$$

Действительно, воспользовавшись (A0) и (A1) можно записать:

$$\varphi_i\big(\varphi_i(\varphi_i(t)x)y\big) \overset{(A1)}{=} \varphi_i\big(\varphi_i(t)x\widetilde{\varphi}_i(y)\big)\varphi_i(y) \overset{(A0),(A1)}{=}$$
$$\varphi_i\big(t\widetilde{\varphi}_i(x\widetilde{\varphi}_i(y))\big)\varphi_i\big(x\widetilde{\varphi}_i(y)\big)\varphi_i(y) \overset{(A1)}{=} \varphi_i\big(t\widetilde{\varphi}_i(x\widetilde{\varphi}_i(y))\big)\varphi_i(\varphi_i(x)y) \overset{(A1)}{=}$$
$$\varphi_i\Big(t\varphi_i E\big(\varphi_i(\varphi_i(x)y)E\varphi_i(y)\big)\Big)\varphi_i(\varphi_i(x)y).$$

Взяв обратный в последнем выражении, придём к равенству (1.11).

Из (A1) для $x = e_1$ и произвольного $y \in B_i$ с учётом (A0):

$$e_i y = e_i. \tag{1.12}$$

С учётом (1.11) тождество (1.12) будет справедливо и для $x \in \overline{B_i}$. Действительно, подставим в (1.11) $t = e_1$, тогда:

$$\varphi_i(\varphi_i(e_i x)y) = \varphi_i(y).$$

Следовательно, элемент $e_i \in \overline{A_i}$ является левым нулём в $\mathbb{B}_n$. □

Лемма 4. *В n-псевдополе для произвольных φ_i, $i = 2, \dots, n$ и $y \in B_i$ справедливо тождество:*

$$\varphi_i E \varphi_i(y) = E \varphi_i E(y). \tag{1.13}$$

Доказательство. Для произвольного $y \in B_i$ и $x = E\varphi_i E(y)$ правая часть выражения (A1) примет вид:

$$\varphi_i(E\varphi_i E(y)\varphi_i(y^{-1}))y = \varphi_i(e_1)y = e_i y = e_i.$$

Левая часть:

$$\varphi_i(\varphi_i E \varphi_i E(y)\varphi_i(y)).$$

Действуя на обе части полученного равенства

$$\varphi_i(\varphi_i E \varphi_i E(y)\varphi_i(y)) = e_i$$

инволюцией φ_i придём к равенству

$$\varphi_i E \varphi_i E(y)\varphi_i(y) = e_1.$$

Если обе его части умножить справа на $E\varphi_i(y)$, а затем применить операцию φ_i, то получим (1.13). □

1.3. Построение групп ограниченно точно n-транзитивных

В классе $K\mathbb{B}_2$ 2-псевдополей рассмотрим подкласс 2-псевдополей $K\mathbb{B}_2^*$, для которых выполняется условие 2) леммы 2:

(A5) Для произвольных $x \in \overline{B_2}$ и $y \in B_2$ справедливо $xy \in B_2$.

Определение 5. *Группа преобразований $G(B)$ действует точно на множестве B, если всякий не единичный элемент действует не тождественно.*

Для 2-псевдополя $\mathbb{B}_2 \in K\mathbb{B}_2^*$ определим множество

$$N = \{(x, y) \in B^2 | \varphi_2(x \cdot y^{-1}) \in B_1 \text{ или } \varphi_2(\varphi_2(x) \cdot E\varphi_2(y)) \in B_1\} \tag{1.14}$$

и функцию $f : B \times N \to B$:

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{cases} \varphi_2\big(x\varphi_2(y_1 y_2^{-1})\big)y_2, & \text{при } y_2 \in B_1, \\ \varphi_2\Big(\varphi_2\Big(\varphi_2(x)\varphi_2\big(\varphi_2(y_1)E\varphi_2(y_2)\big)\Big)\varphi_2(y_2)\Big), & \text{при } y_2 \in \overline{A_2}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Лемма 5. *Алгебраическая система $\langle N; \circ\rangle$ с операцией определённой равенством*

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)),$$

построенной при помощи функции f, определённой в виде (1.15), является N-ограниченно точно 2-транзитивной группой, действующей на $\mathbb{B}_2 \in K\mathbb{B}_2^*$.

Доказательство. В 2-псевдополе $\mathbb{B}_2$ имеется группа преобразований $B_1(B)$, задаваемая правыми сдвигами. При помощи группы $B_1(B)$ и инволюции φ_2 построим группу преобразований $G_2(B)$, действующую точно на B. Группа $G_2 = \text{гр}(B_1, \varphi_2)$ порождается группой $\langle B_1, \bullet\rangle$ и инволюцией φ_2. Для элемента $g \in B_1$ равный ему элемент из подгруппы G_1 будем записывать в виде $[g] \in G_1$.

Покажем, что для $x \in B_2$ справедливо

$$\varphi_2[x]\varphi_2 = [\widetilde{\varphi_2}(x)]\varphi_2[\varphi_2(x)]. \tag{1.16}$$

В самом деле, действуя на произвольный элемент $t \in B$ левой частью равенства (1.16), получим выражение

$$t \cdot \varphi_2[x]\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_2(t)x).$$

После его преобразования при помощи равенства (A1) и (A0) получим выражение

$$\varphi_2(\varphi_2(t)x) = \varphi_2(t\widetilde{\varphi_2}(x))\varphi_2(x). \tag{1.17}$$

Правую часть равенства (1.17) перепишем в виде:

$$\varphi_2(t\widetilde{\varphi_2}(x))\varphi_2(x) = t \cdot [\widetilde{\varphi_2}(x)]\varphi_2[\varphi_2(x)].$$

Группа $G_1 \simeq B_1$ задаёт группу преобразований множества B_1, действуя на B_1 правыми сдвигами. Следовательно, такое действие является точным. Отсюда получаем (1.16).

Аналогично, но уже воспользовавшись выражением (1.11), убедимся в справедливости равенства

$$\varphi_2[x]\varphi_2[y] = [\varphi_2\big(\varphi_2(y)E\varphi_2(\varphi_2(x)y)\big)]\varphi_2[\varphi_2(\varphi_2(x)y)]\varphi_2, \tag{1.18}$$

для $x \in \overline{B_2}$, $y \in B_2$. Покажем, что (1.18) справедливо и при $y \in B_1$. Действительно, если $x \in \overline{B_2}$, то в силу (A5) и леммы 2: $\varphi_2(x)y \in \overline{A_2}$, а $\varphi_2(\varphi_2(x)y) \in \overline{B_2}$. Распишем выражение $\varphi_2[x]\varphi_2[yz^{-1}][z]$ при $y \in \overline{B_2}$, $z \in B_2$, воспользовавшись (A5) и дважды применяя (1.18):

$$\begin{aligned}\varphi_2[x]\varphi_2[yz^{-1}][z] &\overset{(1.18)}{=} [\varphi_2(\varphi_2(yz^{-1})E\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1}))]\varphi_2[\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1})]\varphi_2[z]\\ &\overset{(1.18),(A0)}{=} [\varphi_2(\varphi_2(yz^{-1})E\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1}))\varphi_2(\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y))]\varphi_2[\varphi_2(\varphi_2(x)y)]\varphi_2.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Тогда, с учётом (A1)

$$\widetilde{\varphi_2}\left(\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1})\widetilde{\varphi_2}(z)\right) = \varphi_2\left(\varphi_2(z)E\varphi_2\left(\varphi_2(x)y\right)\right) \in B_2.$$

Следовательно,

$$\varphi_2\Big(\varphi_2\big(\varphi_2(yz^{-1})E\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1})\big)\varphi_2\big(\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y)\big)\Big)$$
$$\overset{(A1)}{=} \varphi_2\Big(\varphi_2(yz^{-1})E\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1})\varphi_2\big(\varphi_2(\varphi_2(x)y)E\varphi_2(z)\big)\Big)\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y)$$
$$\overset{(A0),(A1)}{=} \varphi_2(\varphi_2(yz^{-1})\varphi_2E\varphi_2(z))\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y) \overset{(A0),(A1)}{=} \varphi_2\,(y)\,E\varphi_2(\varphi_2(x)y).$$

Подставляя полученное выражение в (1.19), получим требуемое утверждение.

Таким образом, произвольную последовательность $[x_1]\varphi_2[x_2]\ldots\varphi_2[x_k] \in G_2$ для $x_i \in B_1, i = 1, \ldots, k$, при помощи преобразований (1.16), (1.18) можно свести к виду $[g_1]\varphi_2[g_2]\varphi_2$, где $g_1 \in B_1, g_2 \in \overline{B_2}$.

Определим множество $H_2 = B_1 \cup \overline{A_2} = B \setminus A_2$, которому взаимно однозначно сопоставляется множество $[H_2] = G_1 \cup \{[t]\varphi_2 | t \in \overline{B_2}\} \subset G_2$. Элементу $x \in B_1$ сопоставляется элемент $[x] \in G_1$, а элементу $y \in \overline{A_2}$ сопоставляется элемент $[y] = [\varphi_2(y)]\varphi_2 \in G_2 \setminus G_1$. Тогда, в этих обозначениях произвольный элемент $g \in G_2$ запишется в виде пары $(g_1, g_2) \in G_1 \times [H_2]$, так что $g = [g_1]\varphi_2[g_2]$.

Будем называть двухэлементным кортежем следующую пару:

$$[\varphi_k\big(\varphi_2(g_1)\varphi_k(g_2)\big), g_2] = [g_1]\varphi_2[g_2],\ \text{где } k = \begin{cases} 1, & \text{при } g_2 \in B_1, \\ 2, & \text{при } g_2 \in \overline{A_2}. \end{cases}$$

Обозначая $x = \varphi_k\big(\varphi_2(g_1)\varphi_k(g_2)\big)$, $y = g_2$, перепишем данный кортеж в виде

$$[x, y] = [\varphi_2(\varphi_k(x)E\varphi_k(y))]\,\varphi_2[\varphi_k(y)]\varphi_k. \tag{1.20}$$

При этом получается, что для произвольного $k \in \{1, 2\}$ всегда выполнено $\varphi_2\big(\varphi_k(x)E\varphi_k(y)\big) \in B_1$ и для произвольного кортежа $[x, y] \in G_2$ тогда и только тогда, когда пара $(x, y) \in N$. По построению, действие кортежа $[y_1, y_2] \in G_2$ на элемент $x \in B$ определяется равенством:

$$x \cdot [y_1, y_2] = f(x, y_1, y_2),$$

где функция f определена в (1.15).

Из (1.20) для $y, z \in B_1$ получаем

$$[\varphi_2\big(xz(yz)^{-1}\big)]\varphi_2[yz] = [\varphi_2\big(xy^{-1}\big)]\varphi_2[y][z].$$

Переписав это равенство, используя кортежи, получим

$$[xz, yz] = [x, y][z]. \tag{1.21}$$

Если $y \in \overline{A_2}$, $z \in B_1$, получим

$$[x,y][z] \overset{(1.20),(1.18)}{=} [\varphi_2(\varphi_2(x)E\varphi_2(y))]\,[\varphi_2(\varphi_2(z)E\varphi_2(yz))]\varphi_2[\varphi_2(yz)]\varphi_2$$
$$\overset{(A1)}{=} \big[\varphi_2(xy^{-1})\widetilde{\varphi_2}(y)\varphi_2E(y)\widetilde{\varphi_2}(yz)\big]\,\varphi_2[\varphi_2(yz)]\varphi_2 \overset{(A1),(1.20)}{=} [xz, yz].$$

Таким образом, (1.21) справедливо для произвольных $[x, y] \in G_2$, $z \in B_1$.

Покажем, что для φ_2 и произвольного $[x, y] \in G_2$ справедливо равенство

$$[x, y]\varphi_2 = [\varphi_2(x), \varphi_2(y)]. \tag{1.22}$$

Действительно, если $y \in B_2$, то левую часть этого равенства можно переписать в виде:

$$[x,y]\varphi_2 \overset{(1.20)}{=} [\varphi_2(xy^{-1})]\varphi_2[y]\varphi_2 \overset{(1.16)}{=} [\varphi_2(xy^{-1})][\widetilde{\varphi_2}(y)]\varphi_2[\varphi_2(y)]$$
$$\overset{(1.21)}{=} [\varphi_2(xy^{-1})E\varphi_2E(y)]\varphi_2[\varphi_2(y)]$$
$$\overset{(A1)}{=} [\varphi_2(\varphi_2(x)E\varphi_2(y))]\varphi_2[\varphi_2(y)] = [\varphi_2(x), \varphi_2(y)],$$

т. е. в этом случае равенство (1.22) справедливо.

Если $y \in \overline{A_2}$, то учитывая (1.20) и (A0) преобразуем левую часть:

$$[x,y]\varphi_2 \overset{(1.20)}{=} [\varphi_2(\varphi_2(x)E\varphi_2(y))]\,\varphi_2[\varphi_2(y)]\varphi_2\varphi_2 \overset{(1.20)}{=} [\varphi_2(x), \varphi_2(y)].$$

Если $y \in \overline{B_2}$, то

$$[x,y]\varphi_2 = [\varphi_2\Big(\varphi_2\big(\varphi_2(x)\big)E\varphi_2\big(\varphi_2(y)\big)\Big)]\varphi_2[\varphi_2\left(\varphi_2(y)\right)]\varphi_2 = [\varphi_2(x), \varphi_2(y)].$$

Таким образом, равенство (1.22) установлено.

Последовательное преобразование множества B при помощи двух кортежей $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in G_2$ эквивалентно преобразованию множества B некоторым кортежем $[z_1, z_2] \in G_2$. Следовательно, определено умножение кортежей $[z_1, z_2] = [x_1, x_2] \circ [y_1, y_2]$. Из (1.21) и (1.22), с учётом определения кортежа (1.20), это умножение запишется в виде

$$[x_1, x_2] \circ [y_1, y_2] = [x_1 \cdot [y_1, y_2], x_2 \cdot [y_1, y_2]]. \tag{1.23}$$

Из определения кортежей (1.20) для $e_2 = \varphi_2(e_1)$ имеем равенство:

$$e_1 \cdot [x, y] = x,\ \ e_2 \cdot [x, y] = y.$$

Следовательно, кортеж

$$[e_1, e_2] = [\varphi_2(\varphi_2(e_1)E\varphi_2(e_2))]\,\varphi_2[\varphi_2(e_2)]\varphi_2$$
$$= [\varphi_2(e_2E(e_1))]\,\varphi_2[e_1]\varphi_2 = [e_1]\varphi_2[e_1]\varphi_2 = \varphi_2\varphi_2 = [e_1]$$

является нейтральным элементом группы G_2.

Для произвольного кортежа $[x_1, x_2]$ обратный к нему: $[x_1, x_2]^{-1}$, а с учётом (1.16) и (1.18) он также будет кортежем. Осталось проверить ассоциативность умножения (1.23):

$$\big([x_1, x_2] \circ [y_1, y_2]\big) \circ [z_1, z_2] = [x_1 \cdot [y_1, y_2], x_2 \cdot [y_1, y_2]] \circ [z_1, z_2]$$
$$= [\big(x_1 \cdot [y_1, y_2]\big) \cdot [z_1, z_2], \big(x_2 \cdot [y_1, y_2]\big) \cdot [z_1, z_2]]$$
$$= [x_1 \cdot \big([y_1, y_2] \circ [z_1, z_2]\big), x_2 \cdot \big([y_1, y_2] \circ [z_1, z_2]\big)] = [x_1, x_2] \circ \big([y_1, y_2] \circ [z_1, z_2]\big).$$

Таким образом, G_2 — группа и при действии на множестве N является точно транзитивной. Следовательно, при действии на множестве B некоторого 2-псевдополя $\mathbb{B}_2^*$, группа G_2 является N-ограниченно точно 2-транзитивной. □

Следствие 2. *Кортеж* $[e_2, e_1] = [\varphi_2(e_2E(e_1))]\,\varphi_2[e_1] = [\varphi_2(e_2)]\,\varphi_2[e_1] = \varphi_2$.

Следствие 3. *Если кортеж* $[x_1, x_2] \in G_2$, *то* $[e_2, e_1] \circ [x_1, x_2] = [x_2, x_1] \in G_2$.

Следствие 4. *Для произвольных* $[y_1, y_2] \in G_2$, $x \in H_2$ *выполнено, по крайней мере, одно из условий:* $[x, y_2] \in G_2$ *или* $[y_1, x] \in G_2$.

Доказательство. Из определения кортежа (1.20) следует, что выполнено

$$\varphi_2\big(\varphi_k(x)E\varphi_k(y)\big) \in B_1 \text{ для } k = 1, 2 \text{ и } y \in H_2.$$

Пусть $[x, y_2] \notin G_2$, следовательно:

$$xy_2^{-1} \in \overline{B_2} \ \Big(\text{или } \ \varphi_2(x)E\varphi_2(y_2) \in \overline{B_2}\Big).$$

Тогда из (A5) и леммы 2 следует, что возможны два случая:

1) $x, y_2 \in \overline{B_2}$ (или $x, y_2 \in \overline{A_2}$),

2) $x, y_2 \in B_2$.

Рассмотрим случай 1). Тогда должно выполняться $y_1 \in B_2$, в противном случае $[y_1, y_2] \notin G_2$. Следовательно, по (A5) имеем $xy_1^{-1} \in B_2$ и $[x, y_1] \in G_2$.

Пусть имеет место случай 2). Тогда, если $y_1 \in \overline{A_2}$, то $y_1x^{-1} \in \overline{A_2}$, а если $y_1 \in \overline{B_2}$, то $xy_1 \in B_2$. Следовательно, $[y_1, x] \in G_2$. Если $y_1 \in B_2$, то $y_2y_1^{-1} \in B_2$. Следовательно,

$$xy_1^{-1} = xy_2^{-1}y_2y_1^{-1} \in B_2 \Rightarrow [y_1, x] \in G_2.$$

Если теперь $[y_1, x] \notin G_2$, то аналогичными рассуждениями получим, что $[x, y_2]$ лежит в G_2. □

Следствие 5. *Если* $A = \overline{A_2} = \{e_2\}$, *то группа* $G_2(B)$, *построенная в лемме* 5, *является точно 2-транзитивной.*

Предложение 1. *Если имеются два 2-псевдополя* (B_1, A, φ_2) *и* (B_1', A', φ_2') *из* $K\mathbb{B}_2^*$, *т. е. удовлетворяющих условию леммы* 5, *то их прямое произведение*

$$(B_1 \times B_1', A \times B' \cup B_1 \times A', \varphi_2 \times \varphi_2'),$$

будет 2-псевдополем из $K\mathbb{B}_2$, *но оно не лежит в* $K\mathbb{B}_2^*$.

Доказательство. Действительно, для произвольного $(x,y)\in B_2\times B_2'$ найдётся $(e_1,y^{-1})\in \overline{B_2}\times B_2'$, для которого будет выполнено

$$(x,y)(e_1,y^{-1})=(x,e_1')\notin B_2\times B_2'.$$

Таким образом построенное 2-псевдополе не удовлетворяет условию (A5), следовательно, не лежит в $K\mathbb{B}_2^*$. $\square$

Для n-псевдополя $\mathbb{B}_n\in K\mathbb{B}_n^*$ определим множество N_n и функцию $f_n : B\times N_n\to B$ индукцией по n. Множество N_2 и функция f_2 определены ранее в (1.14), (1.15) для леммы 5. Пусть определено множество N_{n-1} для $(n-1)$-псевдополя. Тогда определим множество N_n:

$$N_n=\{(x_1,\dots,x_n)\in B^n|\big(\varphi_n(x_1x_n^{-1}),\dots,\varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})\big)\in N_{n-1}, x_n\in B_1\}\cup \\ \cup_{k=2}^{n}\Big\{(x_1,\dots,x_n)\in B^n|\Big(\varphi_n\big(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)\big),\dots \\ \dots,\varphi_n\big(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n)\big)\Big)\in N_{n-1}, x_n\in\overline{A_k}\Big\}.$$

Пусть определена функция f_{n-1} для $(n-1)$-псевдополя. Тогда определим функцию f_n:

$$f_n(x,y_1,\dots,y_n)=\varphi_k\Big(\varphi_n\Big(f_{n-1}\Big(\varphi_n\big(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)\big),\dots, \\ \dots,\varphi_n\big(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n)\big)\Big)\Big)\varphi_k(y_n)\Big),\ \text{где } k=\begin{cases}1, \text{ если } y_n\in B_1,\\ m, \text{ если } y_n\in\overline{A_m}.\end{cases} \tag{1.24}$$

Введём подкласс n-псевдополей $K\mathbb{B}_n^*\subseteq K\mathbb{B}_n$ такой, что для произвольного n-псевдополя $\langle B;\cdot,^{-1},\varphi_2,\dots,\varphi_n\rangle\in K\mathbb{B}_n^*$ соответствующее ему 2-псевдополе: $\langle B;\cdot,^{-1},\varphi_2\rangle$ лежит в $K\mathbb{B}_2^*$.

Теорема 3. *Алгебраическая система $\langle G_n;\circ\rangle$, $n=3,\dots,n$ с операцией определённой равенством:*

$$(x_1,\dots,x_n)\circ(y_1,\dots,y_n)=(f_n(x_1,y_1,\dots,y_n),\dots,f_n(x_n,y_1,\dots,y_n)),$$

где f_n определена в (1.24), является N_n-ограниченно точно n-транзитивной группой, действующей на $\mathbb{B}_n\in K\mathbb{B}_n^*$.

Доказательство. Используя группу, построенную в лемме 5, построим группу $G_n = \text{гр}(G_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$, действующую точно на множестве B.

Аналогично тому, как это сделано в лемме 5 из равенств (A1), (A3) получим следующее равенство:

$$\sigma_i[y]\sigma_i = [\sigma_i(y)],\ y \in B_1,$$

справедливое в группе G_n. Если теперь определить отображения $\sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j$, то полученное тождество справедливо и для них, т. е.

$$\sigma_{ij}[x]\sigma_{ij} = [\sigma_{ij}(x)],\ x \in B_1.$$

Выражения (1.16), (1.18) справедливы не только для φ_2, но и для произвольного φ_i. Действительно, если $x \in B_i$, то

$$\begin{aligned}\varphi_i[x]\varphi_i = \sigma_i\varphi_2\sigma_i[x]\sigma_i\varphi_2\sigma_i = \sigma_i\varphi_2[\sigma_i(x)]\varphi_2\sigma_i = \sigma_i[\widetilde{\varphi_2}\sigma_i(x)]\varphi_2[\varphi_2\sigma_i(x)]\sigma_i \\ = [\sigma_i\widetilde{\varphi_2}\sigma_i(x)]\varphi_i[\sigma_i\varphi_2\sigma_i(x)] = [\widetilde{\varphi}_i(x)]\varphi_i[\varphi_i(x)].\end{aligned}$$

Если $x \in \overline{B_i}$, то имеем

$$\begin{aligned}\varphi_i[x]\varphi_i[y] = \sigma_i\varphi_2\sigma_i[x]\sigma_i\varphi_2\sigma_i[y] = \sigma_i\varphi_2[\sigma_i(x)]\varphi_2[\sigma_i(y)]\sigma_i \\ = \sigma_i[\varphi_2(\varphi_2\sigma_i(y)E\varphi_2(\varphi_2\sigma_i(x)\sigma_i(y)))]\varphi_2[\varphi_2(\varphi_2\sigma_i(x)\sigma_i(y))]\varphi_2\sigma_i \\ = [\varphi_i(\varphi_i(y)E\varphi_i(\varphi_i(x)y))]\varphi_i[\varphi_i(\varphi_i(x)y)]\varphi_i.\end{aligned}$$

Построим группу G_n по индукции. Пусть построена группа G_{n-1}, являющаяся N_{n-1}-ограниченно точно $(n-1)$-транзитивной, состоящей из кортежей $[x_1, \dots, x_{n-1}] \in G_{n-1}$ длины $n-1$ и нейтральным элементом $[e_1, \dots, e_{n-1}]$, где $e_i = \varphi_i(e_1) = \sigma_i(e_2) \in \overline{A_i}$ так, что для произвольного $[x_1, \dots, x_{n-1}] \in G_{n-1}$ выполнено

$$e_i \cdot [x_1, \dots, x_{n-1}] = x_i.$$

По множеству $H_n = H_{n-1} \cup \overline{A_n}$ построим множество

$$[H_n] = [H_{n-1}] \cup \{[t]\varphi_n | t \in \overline{B_n}\},$$

ставя в соответствие элементу $x \in \overline{A_n}$ элемент $[x] = [\varphi_n(x)]\varphi_n$.

Выделим подмножество $G_n^* \subseteq G_n$, элементы $g \in G_n^*$ которого можно записать в виде равенства

$$g = [g_1, \ldots, g_{n-1}]\varphi_n[g_n], \text{ где } [g_1, \ldots, g_{n-1}] \in G_{n-1},\ g_n \in H_n.$$

Определим кортеж из n элементов в виде

$$[\varphi_k(\varphi_n(g_1)\varphi_k(g_n)), \ldots \varphi_k(\varphi_n(g_{n-1})\varphi_k(g_n)), g_n] \\ = [g_1, \ldots, g_{n-1}]\varphi_n[g_n], \text{ где } k = \begin{cases} 1, \text{ при } g_n \in B_1, \\ m, \text{ при } g_n \in \overline{A_m}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Произведя в (1.25) замену $x_i = \varphi_k(\varphi_n(g_i)\varphi_k(g_n))$, $x_n = g_n$, запишем n элементный кортеж в новых обозначениях:

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \ldots \\ \ldots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_n[\varphi_k(x_n)]\varphi_k, \text{ где } k = \begin{cases} 1, \text{ при } x_n \in B_1, \\ m, \text{ при } x_n \in \overline{A_m}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Из данного определения следует, что

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, e_n] = [x_1, \ldots, x_{n-1}]; \\ [e_n, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_1] = \varphi_n; [e_1, \ldots, e_n] = [e_1], \quad (1.27)$$

а действие кортежа на элементы e_i с учётом действия кортежей из G_{n-1} и условия (A4), запишутся в виде

$$e_i \cdot [x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = x_i. \quad (1.28)$$

Из построения, действие кортежа $[y_1, \ldots, y_n] \in G_n^*$ на $x \in B$:

$$x \cdot [y_1, \ldots, y_n] = f_n(x, y_1, \ldots, y_n),$$

где функция f_n определена в (1.24).

Покажем, что для кортежа (1.26) справедливо равенство

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n][y] = [x_1 y, \ldots, x_{n-1} y, x_n y]. \tag{1.29}$$

Оно очевидно для $x_n \in B_1$. Рассмотрим случай $x_n \in \overline{A_n}$:

$$\begin{aligned}
&[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n][y] \\
&\quad = [\varphi_n(\varphi_n(x_1)E\varphi_n(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_n(x_{n-1})E\varphi_n(x_n))]\varphi_n[\varphi_n(x_n)]\varphi_n[y] \\
&\qquad = [\varphi_n(\varphi_n(x_1)E\varphi_n(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_n(x_{n-1})E\varphi_n(x_n))] \\
&\qquad\quad \times [\varphi_n(\varphi_n(y)E\varphi_n(x_n y))]\varphi_n[\varphi_n(x_n y)]\varphi_n \\
&\quad = [\varphi_n(x_1 x_n^{-1})\widetilde{\varphi_n}(x_n), \ldots, \varphi_n(x_{n-1} x_n^{-1})\widetilde{\varphi_n}(x_n)][\varphi_n E(x_n)\widetilde{\varphi_n}(x_n y)] \\
&\qquad \times \varphi_n[\varphi_n(x_n y)]\varphi_n \\
&\quad = [\varphi_n(x_1 x_n^{-1})\widetilde{\varphi_n}(x_n y), \ldots, \varphi_n(x_{n-1} x_n^{-1})\widetilde{\varphi_n}(x_n y)]\varphi_n[\varphi_n(x_n y)]\varphi_n \\
&\quad = [\varphi_n(\varphi_n(x_1 y)E\varphi_n(x_n y)), \ldots, \varphi_n(\varphi_n(x_{n-1} y)E\varphi_n(x_n y))]\varphi_n[\varphi_n(x_n y)]\varphi_n \\
&\qquad = [x_1 y, \ldots, x_{n-1} y, x_n y].
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $x_n \in \overline{A_k}$, когда $k \in \{2, \ldots, n-1\}$:

$$
\begin{aligned}
&[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n][y] \\
&\quad = [\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_n\varphi_k\varphi_k[\varphi_k(x_n)]\varphi_k[y] \\
&\quad = [\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_k\sigma_{kn} \\
&\qquad \times [\varphi_k(\varphi_k(y)E\varphi_k(x_n y))]\sigma_{kn}\varphi_k\varphi_n[\varphi_k(x_n y)]\varphi_k \\
&\quad = [\sigma_{kn}\varphi_k(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \ldots, \sigma_k\varphi_k(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))] \\
&\qquad \times [\sigma_{kn}\varphi_k(\varphi_k(y)E\varphi_k(x_n y))]\varphi_k\varphi_n[\varphi_k(x_n y)]\varphi_k \\
&\quad = [\sigma_{kn}\varphi_k(x_1 x_n^{-1})\sigma_{kn}\widetilde{\varphi_k}(x_n), \ldots, \sigma_{kn}\varphi_k(x_{n-1}x_n^{-1})\sigma_{kn}\widetilde{\varphi_k}(x_n)] \\
&\qquad \times [\sigma_{kn}\varphi_k E(x_n)\sigma_{kn}\widetilde{\varphi_k}(x_n y)]\varphi_k\varphi_n[\varphi_k(x_n y)]\varphi_k \\
&\quad = [\sigma_{kn}\varphi_k(x_1 x_n^{-1})\sigma_{kn}\widetilde{\varphi_k}(x_n y), \ldots, \sigma_{kn}\varphi_k(x_{n-1}x_n^{-1})\sigma_{kn}\widetilde{\varphi_k}(x_n y)] \\
&\qquad \times \varphi_k\varphi_n[\varphi_k(x_n y)]\varphi_k \\
&\quad = [\sigma_{kn}\varphi_k(\varphi_k(x_1 y)E\varphi_k(x_n y)), \ldots, \sigma_{kn}\varphi_k(\varphi_k(x_{n-1}y)E\varphi_k(x_n y))] \\
&\qquad \times \varphi_k\varphi_n[\varphi_k(x_n y)]\varphi_k \\
&\quad = [\varphi_n(\varphi_k(x_1 y)E\varphi_k(x_n y)), \ldots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1}y)E\varphi_k(x_n y))]\varphi_n[\varphi_k(x_n y)]\varphi_k \\
&\qquad = [x_1 y, \ldots, x_n y].
\end{aligned}
$$

Таким образом, равенство (1.29) установлено.

Покажем теперь, что для произвольного $\varphi_i \in \{\varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ выполняется

$$
[x_1, \ldots, x_n]\varphi_i = [\varphi_i(x_1), \ldots, \varphi_i(x_n)]. \tag{1.30}
$$

Согласно определению кортежа (1.26) для $x_n \in \overline{A_i}$ и $x_n \in \overline{B_i}$, утверждение очевидно. Действительно, пусть, например, $x_n \in \overline{B_i}$:

$$
\begin{aligned}
[x_1, \ldots, x_n]\varphi_i &= [\varphi_n(\varphi_i\varphi_i(x_1)E\varphi_i\varphi_i(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_i\varphi_i(x_{n-1})E\varphi_i\varphi_i(x_n))] \\
&\quad \times \varphi_n[\varphi_i\varphi_i(x_n)]\varphi_i = [\varphi_i(x_1), \ldots, \varphi_i(x_n)].
\end{aligned}
$$

Рассмотрим случай $x_n \in B_1$. Сначала будем считать, что x_n лежит в некотором B_i при $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]\varphi_i &= [\varphi_n(x_1 x_n^{-1}), \dots, \varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})]\varphi_n\varphi_i[\widetilde{\varphi}_i(x_n)]\varphi_i[\varphi_i(x_n)] \\
&= [\varphi_n(x_1 x_n^{-1}), \dots, \varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})]\varphi_i[\sigma_{in}\widetilde{\varphi}_i(x_n)]\sigma_{in}\varphi_i[\varphi_i(x_n)] \\
&= [\varphi_i\varphi_n(x_1 x_n^{-1})\sigma_{in}\widetilde{\varphi}_i(x_n), \dots, \varphi_i\varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})\sigma_{in}\widetilde{\varphi}_i(x_n)]\varphi_i\varphi_n[\varphi_i(x_n)] \\
&= [\sigma_{in}\left(\varphi_i(x_1 x_n^{-1})\widetilde{\varphi}_i(x_n)\right), \dots, \sigma_{in}\left(\varphi_i(x_{n-1}x_n^{-1})\widetilde{\varphi}_i(x_n)\right)]\varphi_i\varphi_n[\varphi_i(x_n)] \\
&= [\varphi_n\varphi_i\left(\varphi_i(x_1 x_n^{-1})\widetilde{\varphi}_i(x_n)\right), \dots, \varphi_n\varphi_i\left(\varphi_i(x_{n-1}x_n^{-1})\widetilde{\varphi}_i(x_n)\right)]\varphi_n[\varphi_i(x_n)] \\
&= [\varphi_n\left(\varphi_i(x_1)E\varphi_i(x_n)\right), \dots, \varphi_n\left(\varphi_i(x_{n-1})E\varphi_i(x_n)\right)]\varphi_n[\varphi_i(x_n)] \\
&= [\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_n)].
\end{aligned}
$$

При $i = n$ имеем

$$
\begin{aligned}
&[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]\varphi_n \\
&= [\varphi_n(x_1 x_n^{-1})\widetilde{\varphi_n}(x_n), \varphi_n(x_{n-1}x_n^{-1})\widetilde{\varphi_n}(x_n)]\varphi_n[\varphi_n(x_n)] \\
&= [\varphi_n(\varphi_n(x_1)E\varphi_n(x_n)), \dots, \varphi_n(\varphi_n(x_{n-1})E\varphi_n(x_n))]\varphi_n[\varphi_n(x_n)] \\
&= [\varphi_n(x_1), \dots, \varphi_n(x_{n-1}), \varphi_n(x_n)],
\end{aligned}
$$

Рассмотрим теперь $x_n \in A$.

Рассмотрим случай $x_n \in A \setminus \left(\underset{k}{\cup}\overline{A_k}\right)$. Предположим вначале, что $\varphi_i, \varphi_k, \varphi_n$ попарно различны. Тогда

$$
\begin{aligned}
&[x_1, \dots, x_n]\varphi_i \\
&= [\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \dots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_n[\varphi_k(x_n)]\varphi_k\varphi_i \\
&= [\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \dots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_n[\varphi_k(x_n)]\varepsilon_{ki}\varphi_k \\
&= [\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \dots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_n\varepsilon_{ki}[\varepsilon_{ki}\varphi_k(x_n)]\varphi_k \\
&\overset{(1.10)}{=} [\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \dots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\sigma_{ki}\varphi_n[\varphi_k\varphi_i(x_n)]\varphi_k \\
&= [\sigma_{ki}\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \dots, \sigma_{ki}\varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_n[\varphi_k\varphi_i(x_n)]\varphi_k \\
&= [\varphi_n(\varphi_k\varphi_i(x_1)E\varphi_k\varphi_i(x_n)), \dots, \varphi_n(\varphi_k\varphi_i(x_{n-1})E\varphi_k\varphi_i(x_n))] \\
&\quad \times \varphi_n[\varphi_k\varphi_i(x_n)]\varphi_k = [\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_{n-1}), \varphi_i(x_n)].
\end{aligned}
$$

Если $\varphi_k = \varphi_n$, то

$$
\begin{aligned}
&[x_1, \ldots, x_n]\varphi_i \\
&\quad = [\varphi_i\varphi_n(\varphi_n(x_1)E\varphi_n(x_n)), \ldots, \varphi_i\varphi_n(\varphi_n(x_{n-1})E\varphi_n(x_n))]\varphi_n[\varphi_n\varphi_i(x_n)]\varphi_n \\
&\quad = [\varphi_n(\varepsilon_{in}\varphi_n(x_1)E\varepsilon_{in}\varphi_n(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varepsilon_{in}\varphi_n(x_{n-1})E\varepsilon_{in}\varphi_n(x_n))] \\
&\qquad \times \varphi_n[\varphi_n\varphi_i(x_n)]\varphi_n \\
&\quad = [\varphi_n(\varphi_n\varphi_i(x_1)E\varphi_n\varphi_i(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_n\varphi_i(x_{n-1})E\varphi_n\varphi_i(x_n))] \\
&\qquad \times \varphi_n[\varphi_n\varphi_i(x_n)]\varphi_n = [\varphi_i(x_1), \ldots, \varphi_i(x_{n-1}), \varphi_i(x_n)].
\end{aligned}
$$

Осталось рассмотреть последний случай $\varphi_i = \varphi_n$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&[x_1, \ldots, x_n]\varphi_n \\
&\quad = [\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_k\varphi_n[\varphi_k\varphi_n(x_n)]\varphi_k \\
&\quad = [\varphi_k\varphi_n(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \varphi_k\varphi_n(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))]\varphi_n[\varphi_k\varphi_n(x_n)]\varphi_k \\
&\quad = \varphi_n[\sigma_{kn}(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_n)), \ldots, \varphi_n\sigma_{kn}(\varphi_k(x_{n-1})E\varphi_k(x_n))] \\
&\qquad \times \varphi_n[\varphi_k\varphi_n(x_n)]\varphi_k \\
&\quad = [\varphi_n(\sigma_{kn}\varphi_k(x_1)E\sigma_{kn}\varphi_k(x_n)), \ldots, \varphi_n(\sigma_{kn}\varphi_k(x_{n-1})E\sigma_{kn}\varphi_k(x_n))] \\
&\qquad \times \varphi_n[\varphi_k\varphi_n(x_n)]\varphi_k \\
&\quad = [\varphi_n(\varphi_k\varphi_n(x_1)E\varphi_k\varphi_n(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_k\varphi_n(x_{n-1})E\varphi_k\varphi_n(x_n))] \\
&\qquad \times \varphi_n[\varphi_k\varphi_n(x_n)]\varphi_k = [\varphi_n\left(x_1\right), \ldots, \varphi_n\left(x_n\right)].
\end{aligned}
$$

Таким образом равенство (1.30) установлено.

Произвольный кортеж $[x_1, \ldots, x_n] \in G_n^*$ с учётом определения (1.26) можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
[x_1, \ldots, x_n] &= [\varphi_n(\varphi_{k_1}(x_1)E\varphi_{k_1}(x_n)), \ldots, \varphi_n(\varphi_{k_1}(x_{n-1})E\varphi_{k_1}(x_n))]\varphi_n[\varphi_{k_1}(x_n)]\varphi_{k_1} \\
&= [x_1^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}]\varphi_n[\varphi_{k_1}(x_n)]\varphi_{k_1} \\
&= [x_1^{(2)}, \ldots, x_{n-2}^{(2)}]\varphi_{n-1}[\varphi_{k_2}(x_{n-1})]\varphi_{k_2}\varphi_n[\varphi_{k_1}(x_n)]\varphi_{k_1} = \ldots \\
&= [x_1^{(n-1)}]\varphi_2[\varphi_{k_{n-1}}(x_2^{(n-2)})]\varphi_{k_{n-1}}\varphi_3[\varphi_{k_{n-2}}(x_3^{(n-3)})]\varphi_{k_{n-2}} \ldots \varphi_n[\varphi_{k_1}(x_n)]\varphi_{k_1}, \quad (1.31)
\end{aligned}
$$

так, что $x_1^{(n-1)} \in B_1, x_n \in H_n, x_i^{(n-i)} \in H_i$ при $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Тогда для произвольных $m \in B$ и $[x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n] \in G_n^*$ следует, что на множестве G_n^* определена ассоциативная операция умножения кортежей:

$$\begin{aligned}(m \cdot [x_1, \ldots, x_2]) \cdot [y_1, \ldots, y_2] \\ = \left(m \cdot ([x_1^{(n-1)}]\varphi_2 \ldots \varphi_n[\varphi_{k_1}(x_n)]\varphi_{k_1})\right) \cdot ([y_1^{(n-1)}]\varphi_2 \ldots \varphi_n[\varphi_{k_1}(y_n)]\varphi_{k_1}) \\ m \cdot \left(([x_1^{(n-1)}]\varphi_2 \ldots \varphi_n[\varphi_{k_1}(x_n)]\varphi_{k_1}) \cdot ([y_1^{(n-1)}]\varphi_2 \ldots \varphi_n[\varphi_{k_1}(y_n)]\varphi_{k_1})\right) \\ = m \cdot ([x_1, \ldots, x_2] \circ [y_1, \ldots, y_2]).\end{aligned}$$

Следовательно, с учётом (1.29), (1.30) умножение кортежей запишется в виде

$$[x_1, \ldots, x_n] \circ [y_1, \ldots, y_n] = [x_1 \cdot [y_1, \ldots, y_n], \ldots, x_n \cdot [y_1, \ldots, y_n]]. \tag{1.32}$$

Таким образом умножение кортежей из G_n^* замкнуто.

Так как для произвольного $x \in \overline{A_n}$ с учётом (1.26), (1.27) и (A4) справедливо $[\varphi_n(x)] = \varphi_n[e_1, \ldots, e_{n-1}, x]\varphi_n \in G_n^*$, следовательно $G_n = G_n^*$. Если $[x_1, \ldots, x_n] \in G_n$, то из (1.29), (1.30), с учётом разложения (1.31), обратный ему кортеж $[x_1, \ldots, x_n]^{-1} \in G_n$.

Таким образом, G_n — группа и при действии на множестве N_n является точно транзитивной. Следовательно, при действии на множестве B некоторого n-псевдополя $\mathbb{B}_n$ из условия теоремы, группа G_n является N_n-ограниченно точно n-транзитивной. □

Для группы преобразований $G(X)$ множества X определяется стабилизатор $St_G(x)$ элемента $x \in X$. Определим стабилизатор $St_G(x_1, \ldots, x_k)$ упорядоченного набора $(x_1, \ldots, x_k) \in X^k$ равенством

$$St_G(x_1, \ldots, x_k) = St_{St_G(x_2, \ldots, x_k)}(x_1), k \geq 2.$$

Тогда из теоремы 3 имеем

Следствие 6. *Стабилизатор упорядоченных элементов $(e_3, \ldots, e_n)$:*

$$St_{G_n}(e_n) = G_{n-1}, \ldots, St_{G_n}(e_3, \ldots, e_n) = G_2.$$

1.4. Построение n-псевдополя по группе

Рассмотрим N-ограниченно точно n-транзитивную группу $G_n(B)$. Фиксируем произвольный $(e_1, \dots, e_n) \in N \subseteq B^n$. По множеству N построим множество кортежей $\widetilde{G_n} = \{[g_1, \dots, g_n] \big| (g_1, \dots, g_n) \in N\}$. Построим соответствие $\psi : G_n \to \widetilde{G_n}$ по правилу:

$$g \mapsto [g_1, \dots, g_n], \text{ где } g_i = e_i \cdot g. \tag{1.33}$$

Если определить на $\widetilde{G_n}$ произведение в виде:

$$[g_1, \dots, g_n] \circ [h_1, \dots, h_n] = [g_1 \cdot [h_1, \dots, h_n], \dots, g_n \cdot [h_1, \dots, h_n]], \tag{1.34}$$

тогда справедлива следующая

Лемма 6. *Соответствие ψ задаёт изоморфизм групп $\langle G_n; \cdot \rangle$ и $\langle \widetilde{G_n}; \circ \rangle$.*

Доказательство. Определим действие $\widetilde{G_n}$ на множество B по правилу:

$$b \cdot [g_1, \dots, g_n] = b \cdot g. \tag{1.35}$$

Тогда можно определить действие $\widetilde{G_n}$ на N по правилу

$$(b_1, \dots, b_n) \cdot [g_1, \dots, g_n] = (b_1, \dots, b_n) \cdot g = (b_1 \cdot g, \dots, b_n \cdot g).$$

В частности, если $(b_1, \dots, b_n) = (e_1, \dots, e_n)$, то

$$(e_1, \dots, e_n) \cdot [g_1, \dots, g_n] = (g_1, \dots, g_n).$$

Для произвольных $g, h \in G_n$ построим кортежи $[g_1, \dots, g_n] = \psi(g)$, $[h_1, \dots, h_n] = \psi(h)$. Подействуем на набор $(e_1, \dots, e_n)$ последовательно этими кортежами. Тогда, с одной стороны:

$$\big((e_1, \dots, e_n) \cdot [g_1, \dots, g_n]\big) \cdot [h_1, \dots, h_n] = \big((e_1, \dots, e_n) \cdot g\big) \cdot h = (g_1 \cdot h, \dots, g_n \cdot h). \tag{1.36}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}(e_1, \ldots, e_n) \cdot \big([g_1, \ldots, g_n] \circ [h_1, \ldots, h_n]\big) \\ = (e_1, \ldots, e_n) \cdot [g_1 \cdot [h_1, \ldots, h_n], \ldots, g_n \cdot [h_1, \ldots, h_n]] \\ = (g_1 \cdot [h_1, \ldots, h_n], \ldots, g_n \cdot [h_1, \ldots, h_n]) = (g_1 \cdot h, \ldots, g_n \cdot h).\end{aligned} \quad (1.37)$$

Из равенства правых частей в (1.36) и (1.37) приходим к равенству левых частей. Кроме того, из этих равенств так же следует, что $\psi(g \cdot h) = \psi(g) \circ \psi(h)$.

Нейтральный элемент группы G_n под действием отображения ψ перейдёт в кортеж $[e_1, \ldots, e_n] \in \widetilde{G_n}$, который будет нейтральным в операции (1.34).

Для кортежа $[g_1, \ldots, g_n]$, в силу определения действия (1.35), естественным образом определён и обратный кортеж $[g_1, \ldots, g_n]^{-1} = \psi(g^{-1})$.

Из точности действия группы G_n на множестве N следует, что отображение ψ биекция, следовательно, $\psi : G_n \to \widetilde{G_n}$ задаёт изоморфизм групп. $\square$

Для произвольного множества B рассмотрим его декартово произведение B^n и определим операции проектирования $\mathrm{Pr}_i : B^n \to B$ так, что если $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n$, то $\mathrm{Pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

Для произвольного $X = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n$ определим X_{ij}, который получается из X перестановкой i-й и j-й компонент.

Далее будем рассматривать N-ограниченно точно n-транзитивные группы с дополнительным условием:

(T1) если $X \in N$, то $X_{ij} \in N$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Тогда для произвольного кортежа $g = [g_1, \ldots, g_n] \in \widetilde{G_n}$ кортеж g_{ij}, который получается из g перестановкой i-й и j-й компонент, так же будет принадлежать группе $\widetilde{G_n}$. Кортеж E_{ij}, получающийся из нейтрального элемента $E = [e_1, \ldots, e_n]$ перестановкой i-й и j-й компонент, принадлежит группе $\widetilde{G_n}$. Из (1.33) и (1.34) следует, что $E_{ij} \circ X = X_{ij}$.

Заметим, что $E_{ij}^2 = E$ и $E_{ik} \circ E_{kj} \circ E_{ik} = E_{jk} \circ E_{ik} \circ E_{jk}$ для попарно неравных $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Далее, в качестве N-ограниченно точно n-транзитивной группы $G_n(B)$, будем рассматривать изоморфную группу $\widetilde{G_n}(B)$.

Дополнительно в классе KT_2, групп ограниченно точно 2-транзитивных, рассмотрим такой подкласс KT_2^*, что в произвольной группе $G_2 \in KT_2^*$ выполнено условие:

(T2) для любых $(y_1, y_2) \in N$ и $x \in \operatorname{Pr}_1(N)$ справедливо, по крайней мере, одно из условий $(x, y_2) \in N$ или $(y_1, x) \in N$.

Лемма 7. *Если группа $G_2(B) \in KT_2^*$, то на множестве B индуцировано 2-псевдополе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, e_1 \rangle \in K\mathbb{B}_2^*$, где $\phi_2(x) = x \cdot [e_2, e_1]$.*

Доказательство. При помощи элемента $e_2 \in \operatorname{Pr}_1(N)$ определим группу $B_1 = \langle B_1; \cdot \rangle$, проектируя стабилизатор $G_{e_2} = St_{G_2}(e_2) = \{[x_1, x_2] \in G_2 | x_2 = e_2\}$ так, что $\langle B_1; \cdot \rangle \cong \operatorname{Pr}_1(St_{G_2}(e_2))$.

Продолжим операцию умножения до частичной операции:

$$(\cdot) : B \times B_1 \to B,$$

доопределив её для $x \in B$ правилом: $x \cdot y = x \cdot [y, e_2]$. Тогда группа B_1 будет действовать на множестве $M = B \setminus B_1$.

Элемент $E_{12} = [e_2, e_1]$ группы G_2 является инволюцией, так как, с учётом (1.33), (1.35), справедливо:

$$[e_2, e_1] \circ [e_2, e_1] = [e_2 \cdot [e_2, e_1], e_1 \cdot [e_2, e_1]] = [e_1, e_2].$$

Определим отображение $\phi_2 : B \to B$ правилом $\phi_2(x) = x \cdot [e_2, e_1]$. Тогда

$$[e_2, e_1] \circ [x_2, x_1] = [x_1, x_2] = [\phi_2(x_1), \phi_2(x_2)][e_2, e_1]. \tag{1.38}$$

При помощи инволюции ϕ_2, как и ранее, определим подмножества $M_2 \subseteq M$ и $B_2 \subseteq B_1$ инвариантные относительно ϕ_2, т.е. $M_2^{\phi_2} \subseteq M_2$, $B_2^{\phi_2} \subseteq B_2$. Обозначим $\overline{M_2}$, $\overline{B_2}$ дополнения соответствующих подмножеств $\overline{M_2} = M \setminus M_2$, $\overline{B_2} = B_1 \setminus B_2$.

Если $x \in B_2$, то $[x_2, e_2], [\phi_2(x), e_2] \in G_{e_2}$. Следовательно,

$$[e_2, e_1] \circ [\phi_2(x), e_2] \circ [e_2, e_1] = [e_1, x] \in G_2.$$

В силу того, что $[e_1, x], [x, e_2] \in G_2$, имеем

$$[e_1, x] \circ [x, e_2]^{-1} = [e_1, x] \circ [x^{-1}, e_2] = [x^{-1}, e_1] \in G_2.$$

Таким образом, для произвольного $x \in B_2$ и соответствующего $[e_1, x] \in G_2$, с одной стороны, имеется следующее равенство:

$$[e_1, x] = [x^{-1}, e_1][x, e_2] = [\phi_2(x^{-1}), e_2][e_2, e_1][x, e_2].$$

С другой стороны, с учётом (1.38):

$$[e_1, x] = [e_2, e_1][\phi_2(x), e_2][e_2, e_1].$$

Левые части последних двух выражений совпадают. Следовательно, действуя правыми частями на произвольный $t \in B$, получим равенство

$$\phi_2(\phi_2(t)\phi_2(x)) = \phi_2(t\phi_2(x^{-1}))x. \tag{1.39}$$

Следовательно, аксиома (A1) выполнена.

Из определения множества B_1 следует, что

$$\{[x, e_2] \in B^2 | x \in M\} \nsubseteq G_2.$$

Из чего, с учётом (1.38) следует, что

$$\{[x, e_1] \in B^2 | x \in \overline{N_2} \cup M_2\} \nsubseteq N.$$

Так как для произвольного $x \in \overline{N_2}$ элемент $[x, e_1] \notin N$, а $e_1 \in \mathrm{Pr}_1(N)$, то из условия (T2) следует, что для произвольных $x, y \in \overline{N_2}$ справедливо $[x, y] \notin N$.

Из (T2) и того, что для произвольных $x \in B_2, y \in \overline{B_2}$ выполнено равенство

$$[x, e_1] \circ [y, e_2] = [xy, y],$$

заключаем, что $xy \in B_2$. Следовательно, выполнена аксиома (A5), а построенная алгебраическая система $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi, e_1 \rangle$ является 2-псевдополем из $K\mathbb{B}_2^*$. $\square$

Итак, для произвольной группы $G_2(B) \in KT_2^*$ построили соответствие

$$F_A : G_2(B) \mapsto \left\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, e_1 \right\rangle .$$

Вспоминая теперь, что в лемме 7 вместо группы G_2 рассматривалась $\widetilde{G_2}$, следовательно, для произвольной группы $G_2(B) \in KT_2^*$ соответствие $F : KT_2^* \to K\mathbb{B}_2^*$ является суперпозицией двух отображений $F = F_A \circ \psi$ таких, что

$$G_2(B) \overset{\psi}{\mapsto} \widetilde{G_2}(B) \overset{F_A}{\mapsto} \left\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, e_1 \right\rangle .$$

Рассмотрим случай $n > 2$. Определим класс $KT_n^* \subseteq KT_n$ состоящий из ограниченно точно n-транзитивных групп $G_n(B)$, стабилизаторы $St_{G_n(B)}(e_3, \ldots, e_n)$ которых лежат в классе KT_2^*.

Теорема 4. *Если группа $G_n(B) \in KT_n^*$, то на множестве B можно определить n-псевдополе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n, e_1 \rangle \in K\mathbb{B}_n^*$, где $\phi_i(x) = x \cdot E_{1i}$.*

Доказательство. Для стабилизатора $G_2(B) = St_{G_n(B)}(e_3, \ldots, e_n)$ выполнено условие леммы 7, следовательно, на B можно построить алгебраическую систему $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, e_1 \rangle$, которая является 2-псевдополем из класса KT_2^*.

Если определить функции $\phi_i : B \to B$ при $i > 1$ по правилу $\phi_i(x) = x \cdot E_{1i}$, то для них выполнены аксиомы (A2) и (A4). Определим $\varepsilon_i : B \to B$ в виде

$$\varepsilon_i(x) = x \cdot E_{2i} = x \cdot E_{12}E_{1i}E_{12} = \phi_2\phi_i\phi_2(x).$$

Тогда для произвольных $x \in B, y \in B_1$ справедливо

$$x \cdot [y, e_2, \ldots, e_n]E_{2i} = x \cdot E_{2i}E_{2i}[y, e_2, \ldots, e_n]E_{2i} = x \cdot E_{2i}[\varepsilon_i(y), e_2, \ldots, e_n],$$

следовательно, $\varepsilon_i(xy) = \varepsilon_i(x)\varepsilon_i(y)$. Таким образом, аксиома (A3) выполнена. В результате для алгебраической системы $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n, e_1 \rangle$ выполняются все аксиомы n-псевдополя и $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, e_1 \rangle \in K\mathbb{B}_2^*$, следовательно, $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n, e_1 \rangle \in K\mathbb{B}_n^*$ □

В теореме 4 построено соответствие $F_2 : KT_n \to K\mathbb{B}_n^*$, где $F_2 = F_A \circ \psi$ и

$$G_n(B) \overset{\psi}{\mapsto} \widetilde{G_n}(B) \overset{F_A}{\mapsto} \left\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n, e_1 \right\rangle .$$

1.5. Примеры n-псевдополей

Используя конструкцию предыдущего параграфа, укажем конкретные примеры n-псевдополей.

Пример 2. *Воспользовавшись теоремой 4 построим n-псевдополе для группы $GL_n(F)$ над полем F. Как было отмечено в примере 1, группа $GL_n(F)$ является ограниченно точно n-транзитивной.*

Выберем в качестве элементов $e_i \in B = F^n$ соответствующие строки единичной матрицы $E \in GL_n(F)$, так как $(e_1, \dots, e_n) \in N_n$. Группа $B_1 = F^* \leftthreetimes F^{n-1} \simeq St_{GL_n(F)}(e_2, \dots, e_n)$ с групповым умножением:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\,(y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$= (x_1y_1, x_1y_2 + x_2, \dots, x_1y_n + x_n),\ x_1, y_1 \in F^*, (x_2, \dots, x_n), (y_2, \dots, y_n) \in F^{n-1}.$$

Стабилизатор $St_{GL_n(F)}(e_2, \dots, e_n)$ состоит из матриц в которых только первая строка отлична от строки $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ единичной матрицы E, остальные строки совпадают со строками $e_i, i > 1$ единичной матрицы. Множество $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n | x_1 = 0\}$. Функция $\varphi_i : F^n \to F^n$, $i = 2, \dots, n$ переставляет первую и i-тую компоненту вектора, оставляя остальные компоненты на месте, т. е.

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_2, \dots, x_1).$$

Таким образом, n-псевдополе: $\langle F^n; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \dots, \varphi_n, e_1\rangle$.

Пример 3. *По группе из теоремы 1 для группы N-ограниченно точно 2 транзитивной, действующей на правом почти-кольце K, построим 2-псевдополе. В качестве мультипликативной группы B_1 рассмотрим мультипликативную группу правого почти-кольца K^*. Множество $A = K \setminus K^*$. Выделенные элементы $e_1 = 1, e_2 = 0$, тогда $\varphi_2(x) = x(-1) + 1$. В результате 2-псевдополе: $\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, e_1\rangle$.*

С точно 5-транзитивной группой Матъё M_{12} связано 5-псевдополе.

Пример 4. *В качестве группы B_1 возьмём группу кватернионов $\mathbb{H} = \{1, -1, i, -i,\ j, -j,\ k, -k\}$. Положим $e_1 = 1$. Множества $A = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ и $B = \mathbb{H} \cup A$. Операции φ_i, $i = 2, \ldots, 5$ определим при помощи перестановок:*

$$\varphi_2 = (1, e_2)(i, -j)(-i, k)(j, -k), \quad \varphi_3 = (1, e_3)(i, -k)(k, j)(-i, -j),$$

$$\varphi_4 = (1, e_4)\,(i, k)(j, -i)(-j, -k), \quad \varphi_5 = (1, e_5)\,(i, j)(k, -j)(-i, -k).$$

Таким образом, 5-псевдополе: $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_5, e_1\rangle$.

1.6. Построение категорной эквивалентности

Определение 6. *Для любого класса алгебр $K\mathfrak{A}$ через $\mathcal{C}\mathfrak{A}$ обозначим категорию, объектами которой являются алгебры из $K\mathfrak{A}$, а морфизмами — гомоморфизмы алгебр.*

Определение 7 ([10, §4.4.]). *Функтор $\mathcal{F}_2 : \mathcal{C}\mathfrak{A}_1 \to \mathcal{C}\mathfrak{A}_2$ называется эквивалентностью категорий $\mathcal{C}\mathfrak{A}_1$ и $\mathcal{C}\mathfrak{A}_2$, а категории $\mathcal{C}K\mathfrak{A}_1$ и $\mathcal{C}K\mathfrak{A}_2$ являются эквивалентными, если существует функтор $\mathcal{F}_1 : \mathcal{C}K\mathfrak{A}_2 \to \mathcal{C}K\mathfrak{A}_1$ такой, что имеют место изоморфизмы: $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2(\mathcal{C}K\mathfrak{A}_1) \cong \mathcal{C}K\mathfrak{A}_1$ и $\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(\mathcal{C}K\mathfrak{A}_2) \cong \mathcal{C}K\mathfrak{A}_2$.*

Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Категории n-псевдополей $\mathcal{C}\mathbb{B}_n^*$ и ограниченно точно n-транзитивных групп $\mathcal{C}T_n(B)^*$ категорно эквивалентны.*

Доказательство. В теоремах 3 и 4 построены отображения F_1 и F_2, которые для функторов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ задают отображения соответствующих объектов категорий $\mathcal{C}\mathbb{B}_n^*$, $\mathcal{C}T_n(B)^*$. Построим теперь отображения морфизмов данных категорий.

Для произвольного морфизма[1] $h \in \mathtt{mor}(\mathcal{C}\mathbb{B}_n^*)$ по соответствующим алгебрам $\mathtt{dom}(h) = \langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, e_1\rangle$ и $\mathtt{cod}(h) = \langle B^h; \cdot^h, ^{-1^h}, \varphi_2^h, \ldots, \varphi_n^h, e_1^h\rangle$,

[1] Для стрелки h её начало это — $\mathrm{dom}(h)$, а конец — $\mathrm{cod}(h)$.

при помощи F_1, построим их образы $G_n(B)$ и $G_n^h(B^h)$. С учётом построения (1.32) группы G_n при помощи функции $f : B \times N \to B$ получим, что в категории $\mathcal{C}KT_n(B)^*$ морфизм $\mathcal{F}_1(h)$ определяется в виде пары морфизмов $(h^n, h) : (G_n, B) \to (G_n^h, B^h)$. Так, что $[x_1, \ldots, x_n] \in G_n$ при отображении h^n перейдёт в $h^n([x_1, \ldots, x_n]) = [x_1^h, \ldots, x_n^h] \in G_n^h$. Таким образом, если определён морфизм h, то определён морфизм $\mathcal{F}_1(h) = (h^n, h)$. Единичный морфизм при таком отображении перейдёт в единичный: $\mathcal{F}_1 : id_{\mathbb{B}_n} \mapsto id_{\mathcal{F}_1(\mathbb{B}_n)}$. Для произвольных $f, h \in \mathtt{mor}(\mathcal{C}\mathbb{B}_n^*)$, для которых определена композиция $f \circ h$, также определена композиция $\mathcal{F}_1(f \circ h) = \mathcal{F}_1(f) \circ \mathcal{F}_1(h)$.

Рассмотрим теперь функтор $\mathcal{F}_2$. Гомоморфизм групп преобразований задаётся парой $(\mu, \lambda) : (G_n, B) \to (G_n^\mu, B^\lambda)$. С учётом леммы 6 построения группы $\widetilde{G_n}(B)$ изоморфной $G_n(B)$, приходим к тому, что преобразования μ и λ согласованы. Иными словами, найдутся такие попарно различные элементы $e_1, \ldots, e_n \in B$ и такое преобразование $\eta(\mu, \lambda) : B \to B^\lambda$, что $\eta(e_i) \neq \eta(e_j) \in B^\lambda$ для $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$. При этом диаграмма

$$\begin{array}{lcl}
(G_n, B) & \stackrel{F_2}{\to} & \langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, e_1\rangle \\
\downarrow (\eta^n, \eta) & & \qquad\quad \downarrow \eta \\
(G_n^\eta, B^\eta) & \stackrel{F_2}{\to} & \langle B^\eta; \cdot^\eta, ^{-1^\eta}, \varphi_2^\eta, \ldots, \varphi_n^\eta, e_1^\eta\rangle
\end{array}$$

будет коммутативной. Морфизм $\eta = \mathcal{F}_2(\eta^n, \eta)$ задаёт морфизм соответствующих алгебр. Единичный морфизм при таком отображении перейдёт в единичный, т. е., $\mathcal{F}_2 : id_{G_n(B)} \mapsto id_{\mathcal{F}_2(G_n(B))}$, а для произвольных $(f_1, f_2), (h_1, h_2) \in \mathtt{mor}(\mathcal{C}T_n^*)$, для которых определена композиция $(f_1, f_2) \circ (h_1, h_2)$, определена композиция

$$\mathcal{F}_2((f_1, f_2) \circ (h_1, h_2)) = \mathcal{F}_2(f_1, f_2) \circ \mathcal{F}_2(h_1, h_2).$$

Для суперпозиции отображений F_1, F_2:

$$\begin{aligned}
F_2 \circ F_1(\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, e_1\rangle) &= F_2(\langle B; G_n, {}^{-1}, [e_1, \ldots, e_n]\rangle) \\
&= \langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n, e_1\rangle
\end{aligned}$$

и

$$F_1 \circ F_2\big(G_n(B)\big) = F_1(\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \ldots, \phi_n, e_1\rangle) = G_n(B),$$

имеется естественный изоморфизм $F_1 \circ F_2 \cong id$ и $F_2 \circ F_1 \cong id$. $\square$

Глава 2

Псевдоматричное умножение

В первом параграфе данной главы, состоящем из нескольких подпараграфов, строится пример псевдоматричного умножения. В частности, в §2.1.1 при помощи выделенных матриц строится операция умножения и выясняется, когда алгебраическая система над матрицами с таким умножением и обычным сложением матриц будет кольцом. В §2.1.2 выясняется, при каких условиях алгебраическая система с введённой операцией будет изоморфна группе Михайличенко. Доказывается, что группа Михайличенко $G_n(\mathbb{R})$ вложима в группу $GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

В §2.2 даётся строгое определение псевдоматричного умножения и изучаются его общие свойства. В заключении параграфа показана связь между псевдоматричными и ограниченно точно транзитивными группами.

2.1. Построение примера псевдоматричного умножения

В теории алгебраических систем строятся системы, в которых новые операции конструируются из стандартных. Например, по всякому ассоциативному кольцу K можно построить лиево кольцо $L(K)$, определив умножение равенством $a*b = ab-ba$, и йорданово кольцо $J(K)$, определив умножение равенством $a \circ b = ab + ba$. Рассматривая конечномерную алгебру, мы можем определить новую операцию умножения, написав таблицу умножения базисных элементов и изучать вопрос о том, когда это умножение ассоциативно (см. [16, § 1.5]). Аналогичным образом, в группе G можно определить новую бинарную операцию $*$, положив $a * b = v(a, b)$, где $v = v(x, y)$ – групповое слово от двух переменных и изучать вопрос о том, когда алгебраическая система $\langle G, *\rangle$ является группой и как она связана с исходной группой G (см. [5] вопрос 6.47).

Кольцо квадратных матриц $M_n(R)$ над кольцом R естественным образом появляется как кольцо эндоморфизмов модуля над R. Умножение матриц строится при помощи функции $f : R^{2n} \to R$:

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = xy^t, \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ — строки, а y^t — столбец. Множество всех обратимых матриц из $M_n(R)$ образуют группу $GL_n(R)$.

Для произвольной матрицы $A \in M_n(R)$ произведение матриц $X, Y \in M_n(R)$, определённое при помощи функции

$$f^*(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_i = xAy^t, \tag{2.2}$$

будем называть псевдоматричным умножением:

$$X \cdot_{f^*} Y = XAY. \tag{2.3}$$

Аналогично, среди всех квадратных матриц $M_n(R)$ можно рассмотреть и множество матриц $GL_n^{f^*}(R)$, образующих группу относительно псевдоматричного умножения (2.2).

Предложение 2. *Если матрица $A \in GL_n(R)$, то группы $GL_n(R)$ и $GL_n^{f^*}(R)$, построенные при помощи функций (2.1) и (2.2) изоморфны.*

Доказательство. Умножение матриц X и Y, построенное при помощи функции (2.2), записывается при помощи умножения (2.1) в виде (2.3). Тогда изоморфизм задаётся отображением $X \mapsto XA^{-1}$. □

Если функции (2.1) и (2.2) задают одну и ту же матричную группу $GL_n(R)$, то возникает естественный

Вопрос 1. *Можно ли построить функцию $f^* : R^n \times R^n \to R$, задающую умножение матриц с матричной группой, отличной от $GL_n(R)$?*

Иными словами, необходимо найти такую функцию f^*, описывающую умножение строки первой матрицы X и столбца второй матрицы Y, при помощи которой можно построить псевдоматричное умножение матриц $X \cdot_f Y$.

Положительный ответ на вопрос 1 получим в настоящем параграфе.

2.1.1. Кольцо матриц с нестандартным произведением

Пусть $M_n(P)$, $n \geq 2$ – множество квадратных матриц порядка n над полем P. Стандартное умножение матриц $X = (x_{ij})$ и $Y = (y_{ij})$ из $M_n(P)$ определяется формулой

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj},$$

где $Z = (z_{ij}) = XY$. Известно, что относительно обычных операций сложения и умножения $M_n(P)$ является ассоциативным кольцом с единицей. Определим на множестве $M_n(P)$ операцию умножения правилом

$$X \odot Y = XAY + XB + CY + D, \tag{2.4}$$

где A, B, C, D – фиксированные матрицы из $M_n(P)$. Хотим понять, когда алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, + \rangle$ является ассоциативным кольцом. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 6. *Алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, + \rangle$ является ассоциативным кольцом тогда и только тогда, когда B, C, D нулевые матрицы*

Доказательство этой теоремы разобъём на несколько лемм. Вначале рассмотрим вопрос о том, когда умножение $\odot$ ассоциативно.

Лемма 8. *Умножение, определенное на $M_n(P)$ равенством (2.4) ассоциативно тогда и только тогда, когда матрицы A, B, C, D удовлетворяют следую-*

щей системе

$$\begin{cases} AC = BA, \\ CD = DB, \\ B^2 - B = AD, \\ C^2 - C = DA. \end{cases}$$

Если матрица A невырождена, то эта система равносильна такой:

$$\begin{cases} C = A^{-1}BA, \\ D = A^{-1}(B^2 - B). \end{cases}$$

Доказательство. Мы должны найти условия, при которых для любых матриц $X, Y, Z \in M_n(P)$ справедливо равенство

$$(X \odot Y) \odot Z = X \odot (Y \odot Z).$$

Расписывая левую часть этого равенства, получим

$$(X \odot Y) \odot Z = XAYAZ + XBAZ + CYAZXAYB+ \\ + DAZ + XB^2 + CYB + CZ + DB + D,$$

расписывая правую —

$$X \odot (Y \odot Z) = XAYAZ + XAYB + XACZ + CYAZ \\ + XAD + XB + CYB + C^2Z + CD + D.$$

Приравнивая эти выражения и учитывая, что полученное равенство должно выполняться для произвольных матриц X, Y, Z приходим к системе из формулировки леммы.

Если матрица A невырождена, то $C = A^{-1}BA$ и система примет вид

$$\begin{cases} (AD)B = B(AD), \\ B^2 - AD - B = 0, \\ C^2 - DA - C = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что

$$C^2 - DA - C = A^{-1}(B^2 - AD - B)A,$$

последнее равенство следует из второго и его можно отбросить. Переписав второе равенство в виде

$$AD = B^2 - B,$$

легко заметить, что из него следует первое равенство и мы приходим к нужной системе. □

Из леммы 8 получаем, что если матрица A невырождена, то произведение квадратных матриц, определенное равенством

$$X \odot Y = XAY + XB + (A^{-1}BA)Y + A^{-1}(B^2 - B)$$

ассоциативно.

Выясним, когда умножение $\odot$ дистрибутивно, т. е., когда выполняются равенства

$$(X_1 + X_2) \odot Y = X_1 \odot Y + X_2 \odot Y, \tag{2.5}$$

$$X \odot (Y_1 + Y_2) = X \odot Y_1 + X \odot Y_2. \tag{2.6}$$

Расписывая левую часть равенства (2.5), получим

$$(X_1 + X_2) \odot Y = (X_1 + X_2)AY + (X_1 + X_2)B + CY + D =$$
$$X_1AY + X_2AY + X_1B + X_2B + CY + D.$$

Расписывая правую —

$$X_1 \odot Y + X_2 \odot Y = X_1AY + X_2AY + X_1B + X_2B + 2CY + 2D.$$

Чтобы выполнялось равенство (2.5), необходимо, чтобы выполнялось

$$CY + D = \mathbf{0},$$

но, учитывая, что Y – произвольная матрица, видим, что $C = D = \mathbf{0}$.

Аналогичным образом, рассматривая равенство (2.6), приходим к равенствам $B = D = \mathbf{0}$. Таким образом, справедлива

Лемма 9. *Умножение* $\odot$ *дистрибутивно тогда и только тогда, когда* $B = C = D = \mathbf{0}$.

Доказательство теоремы 6. Для того, чтобы алгебраическая система $\langle M_n(P); +, \odot\rangle$ являлась ассоциативным кольцом, необходимо, чтобы алгебраическая система $\langle M_n(P); +\rangle$ являлась абелевой группой, выполнялись аксиомы дистрибутивности и операция $\odot$ являлась ассоциативной. Очевидно, что первое из этих условий выполнено. Из леммы 9 следует, что для дистрибутивности необходимы условия $B = C = D = \mathbf{0}$, но тогда из леммы 8 вытекает, что при этих условиях операция $\odot$ ассоциативна. □

Известно, что множество матриц $M_n(P)$ является не только кольцом, но и алгеброй над полем P. Эта алгебра имеет размерность n^2, и в качестве базы можно выбрать матрицы $E_{ij} \in M_n(P)$, у которых на месте (i, j) стоит единица, а на всех остальных местах – нули. Как следует из теоремы 6, алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, +\rangle$ является ассоциативным кольцом, если операция $\odot$ определена правилом $X \odot Y = XAY$. Полагая $\alpha X = (\alpha x_{ij})$ для произвольного скаляра $\alpha \in P$, получим алгебру над P, которую будем обозначать через $M_n^A(P)$. В частности, $M_n^E(P)$ – обычная алгебра матриц. Очевидно, что алгебра $M_n^A(P)$ имеет размерность n^2 и в качестве базы можно взять матричные единицы E_{ij}, $1 \le i, j \le n$.

Будем считать, что операция $\odot$ ассоциативна. Хотим выбрать такое подмножество $G \subseteq M_n(P)$, что алгебраическая система $\langle G; \odot\rangle$ является группой. Выясним вопрос о существовании единичного элемента. Если I – единичный элемент этой группы, то для любого элемента $X \in G$ должны выполняться равенства

$$I \odot X = IAX + IB + CX + D = X, \tag{2.7}$$

$$X \odot I = XAI + XB + CI + D = X. \tag{2.8}$$

Из равенства (2.7) получим

$$(IA + C - E)X = -IB - D.$$

Учитывая, что X произвольно, имеем

$$\begin{cases} IA + C = E, \\ IB = -D. \end{cases}$$

Аналогично, рассматривая равенство (2.8), приходим к системе

$$\begin{cases} AI + B = E, \\ CI = -D. \end{cases}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 10. *Элемент $I \in M_n(P)$ является единичным относительно умножения $\odot$, если выполнена следующая система равенств:*

$$\begin{cases} IA = E - C, \\ AI = E - B, \\ IB = D. \end{cases}$$

В частности, если операция $\odot$ ассоциативна и $\det A \neq 0$, то эта система равносильна системе

$$\begin{cases} I = (E - C)A^{-1}, \\ B = ACA^{-1}. \end{cases}$$

Стандартному произведению матриц из $M_n(P)$ соответствует билинейная форма

$$f(x, y) = xEy^t,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in P^n$, а символ t означает транспонирование. Аналогично, матричному произведению $\odot$, определенному равенством (2.4) соответствует n^2 функций:

$$z_{ij} = z_{ij}(X_i, Y^j) = X_iAY^j + X_iB^j + C_iY^j + d_{ij},$$

где для квадратной матрицы M символ M_i означает ее i-ю строку, а символ M^j – j-й столбец, d_{ij} – элемент, стоящий на месте (i, j) в матрице D. В частности, произведение $\odot$ определяет n различных действий $\odot_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы Y из $M_n(P)$ на векторном пространстве P^n:

$$v \odot_i Y = v(AY) + vB + C_iY + D_i, \quad v \in P^n.$$

Заметим, что это действие можно рассматривать как аффинное преобразование векторного пространства P^n:

$$v \odot_i Y = v(AY + B) + C_iY + D_i,$$

которое будем записывать как пару

$$(AY + B,\, C_iY + D_i).$$

При этом матрица $AY + B$ определяет линейное преобразование векторного пространства P^n, а вектор $C_iY + D_i$ определяет сдвиг.

Полугруппа $\mathcal{L}(P^n)$ линейных преобразований векторного пространства P^n изоморфна полугруппе матриц $M_n(P)$. Аналогично, полугруппа аффинных преобразований $A\mathcal{L}(P^n)$ изоморфна множеству пар $(M_n(P), P^n)$. Из приведенных выше рассуждений легко следует

Предложение 3. *Если операция $\odot$ ассоциативна, то мы имеем n гомоморфизмов φ_i*

$$\varphi_i(Y) = (AY + B,\; C_iY + D_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

полугруппы линейных преобразований $\langle M_n(P), \cdot\rangle$ векторного пространства P^n в полугруппу аффинных преобразований $\langle (M_n(P), P^n), \odot_i\rangle$ векторного пространства P^n.

2.1.2. Группа Михайличенко

Рассмотрим множество матриц с произведением типа (2.4) и покажем, что оно является группой, которая при $P = \mathbb{R}$ изоморфна группе Михайличенко.

Рассмотрим следующее матричное произведение

$$X \circledast Y = XVY + XU + U^t Y, \quad X, Y \in M_n(P), \tag{2.9}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(P),$$

– матрица порядка n, у которой все элементы, за исключением элементов последней строки, нулевые,

$$V = (E_n - U)(E_n - U^t) = \left(\begin{array}{c|c} & -1 \\ E_{n-1} & \vdots \\ & -1 \\ \hline -1 \dots -1 & n-1 \end{array}\right),$$

где E_k – единичная матрица порядка k. Далее символом E будем обозначать единичную матрицу порядка n.

Можно заметить, что произведение (2.9) определяет единственную функцию строк и столбцов:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)(y_i - y_n) + x_n + y_n.$$

Или в матричном виде

$$f(x, y) = xVy^t + x_n + y_n.$$

Легко заметить, что $\det(E - U) = \det(E - U^t) = 0$, а потому $\det V = 0$.

Определим также матрицу

$$I = I_n = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ E_{n-1} & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0 \dots 0 & 0 \end{array}\right) \in M_n(P).$$

Следующая лемма устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 11. *Для определённых выше матриц порядка $n \geq 2$ справедливы соотношения*

1) $U = U^2$*;*

2) $UV = VU^t = \mathbf{0}$*;*

3) $U^t I = IU = \mathbf{0}$*;*

4) $VI + U = E$*.*

С помощью этих равенств легко проверяется

Лемма 12. *Матричное умножение (2.9) является ассоциативным.*

Доказательство. В силу леммы 8 достаточно убедиться, что справедлива следующая система равенств

$$\begin{cases} VU^t = UV, \\ U^2 - U = 0, \\ (U^t)^2 - U^t = 0. \end{cases}$$

Первое и второе равенства непосредственно следуют из пунктов 2 и 1 леммы 11. Третье равенство вытекает из второго, а потому также выполняется. □

Рассмотрим алгебраическую систему $\langle M_n(P); \circledast, + \rangle$. Нетрудно убедиться, что она не является кольцом, так как не выполняется дистрибутивность. Также нетрудно проверить, что произведение $\mathbf{0} \circledast X$, где $\mathbf{0}$ – нулевая матрица из $M_n(P)$ не всегда равно $\mathbf{0}$.

Возникает естественный вопрос: можно ли вложить множество $M_n(P)$ в множество матриц большего размера так, чтобы операция $\circledast$ индуцировалась обычным матричным умножением?

Для ответа на этот вопрос определим множество матриц

$$G_n(P) = \{Y \in M_n(P) \mid \det(VY + U) \neq 0\}.$$

Целью параграфа 2.1.2 является доказательство следующего утверждения.

Теорема 7. *Множество* $G_n(P)$, $n \geq 2$ *является группой относительно операции* $\circledast$.

При $P = \mathbb{R}$ эта группа изоморфна группе Михайличенко, определенной в [11]. Для доказательства теоремы 7 докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 13. *Определитель* $\det(VX+U)$ *выражается через элементы матрицы* X *следующим образом:*

$$\det(VX+U) = -\left|\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \vdots & & X & \\ 1 & & & \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \hline 1 & x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{array}\right|. \tag{2.10}$$

При этом справедливо равенство $\det(VX+U) = \det(XV+U^T)$.

Доказательство. Для того, чтобы вычислить определитель матрицы

$$VX+U = \begin{pmatrix} x_{11}-x_{n1} & \cdots & x_{1n}-x_{nn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n-1,1}-x_{n1} & \cdots & x_{n-1,n}-x_{nn} \\ 1+nx_{n1}-x_{11}-\ldots-x_{n1} & \cdots & 1+nx_{nn}-x_{1n}-\ldots-x_{nn} \end{pmatrix},$$

перейдём к матрице большего размера:

$$\det(VX+U) =$$

$$\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ \hline & & & \\ 0 & x_{11}-x_{n1} & \cdots & x_{1n}-x_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1,1}-x_{n1} & \cdots & x_{n-1,n}-x_{nn} \\ 0 & 1+nx_{n1}-x_{11}-\ldots-x_{n1} & \cdots & 1+nx_{nn}-x_{1n}-\ldots-x_{nn} \end{array}\right|.$$

Прибавим все строки этого определителя, начиная со 2-й и заканчивая n-й к последней строке, а затем прибавим первую строку полученного определителя ко 2-й, 3-й и т. д. до n-й. Получим

$$\det(VX+U) = \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ \hline \\ 0 & x_{11}-x_{n1} & \cdots & x_{1n}-x_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1,1}-x_{n1} & \cdots & x_{n-1,n}-x_{nn} \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ \hline \\ 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right|.$$

Поменяв местами 1-ю и последнюю строки, получим требуемое равенство (2.10).

Чтобы доказать второе равенство леммы, рассмотрим матрицу

$$XV+U^T = \begin{pmatrix} x_{11}-x_{1n} & \cdots & 1+nx_{1n}-x_{11}-\cdots-x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}-x_{nn} & \cdots & 1+nx_{nn}-x_{n1}-\cdots-x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выполняя те же преобразования, что и для определителя $\det(VX+U)$, видим, что определитель $\det(VX+U^T)$ при помощи аналогичных преобразований, но уже столбцов, также можно привести к виду (2.10). □

Убедимся теперь, что справедлива

Лемма 14. *Множество $G_n(P)$ замкнуто относительно операции $\circledast$.*

Доказательство. Пусть $X, Y \in G_n(P)$. Надо показать, что матрица $X \circledast Y$ также лежит в $G_n(P)$. Используя определение операции $\circledast$ и соотношения из леммы 11, легко можно установить справедливость равенства

$$V(X\circledast Y)+U = (VX+U)(VY+U).$$

Из этого равенства следует, что

$$\det\left(V(X\circledast Y)+U\right) = \det(VX+U)\cdot\det(VY+U).$$

Учитывая, что $\det(VX + U) \neq 0$, $\det(VY + U) \neq 0$, заключаем, что и

$$\det\left(V(X \circledast Y) + U\right) \neq 0.$$

Следовательно, $X \circledast Y \in G_n(P)$. □

Лемма 15. *В множестве $G_n(P)$ для всякого элемента $X \in G_n(P)$ найдется обратный, т. е. такой элемент $\overline{X} \in G_n(P)$, для которого справедливы равенства*

$$X \circledast \overline{X} = \overline{X} \circledast X = I.$$

Доказательство. Докажем вначале, что для матрицы $X \in G_n(P)$ найдется правый обратный, т. е. такой элемент $\overline{X}_R \in G_n(P)$, для которого справедливо равенство

$$X \circledast \overline{X}_R = I.$$

Действительно, по определению, операции $\circledast$

$$X \circledast \overline{X}_R = XV\overline{X}_R + XU + U^t\overline{X}_R.$$

Учитывая, что

$$XV\overline{X}_R + XU + U^t\overline{X}_R = I,$$

приходим к равенству

$$(XV + U^t)\overline{X}_R = I - XU.$$

Так как $X \in G_n(P)$, то $\det(VX + U) \neq 0$. Как было установлено в лемме 13

$$\det(VX + U) = \det(XV + U^t),$$

а потому $\det(XV + U^t) \neq 0$. Следовательно, в качестве правого обратного можно взять матрицу

$$\overline{X}_R = (XV + U^t)^{-1}(I - XU).$$

Аналогичным образом, из равенства

$$\overline{X}_L \circledast X = I$$

находим левый обратный, который равен

$$\overline{X}_L = (I - U^t X)(VX + U)^{-1}.$$

Покажем теперь, что справедливо равенство $\overline{X}_R = \overline{X}_L$. Подставив найденные выражения, получим

$$(XV + U^t)^{-1}(I - XU) = (I - U^t X)(VX + U)^{-1}$$

или

$$(I - XU)(VX + U) = (XV + U^t)(I - U^t X).$$

Раскрыв скобки, приходим к равенству

$$IVX + IU - XUVX - XU^2 = XVI - XVU^t X + U^t I - (U^t)^2 X.$$

С учетом соотношений из леммы 11, перепишем его в таком виде

$$IVX - XU^2 = XVI - (U^t)^2 X.$$

Выносия X, получим

$$(IV + (U^t)^2)X = X(VI + U^2),$$

но так как $IV + (U^t)^2 = VI + U^2 = E$, то это не что иное, как определение единичной матрицы при обычном умножении. $\square$

Доказательство теоремы 7. То, что операция $\circledast$ ассоциативна следует из установленной ранее леммы. Из равенства $VI + U = E$ (см. лемму 10) следует, что $I \in G_n(P)$.

Как установлено в лемме 10, чтобы матрица I являлась единичным элементом должна выполняться система равенств

$$\begin{cases} VI + U = E, \\ U^t I = \mathbf{0}, \\ IV + U^T = E, \\ IU = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Справедливость этих равенств следует из леммы 11. $\square$

2.1.3. Вложение группы $G_n(P)$ в группу $GL_{n+1}(P)$

Покажем, что группа $G_n(P)$ линейна. Более точно, справедлива

Теорема 8. *Группа $G_n(P) = \langle G_n(P), \circledast\rangle$ изоморфна некоторой подгруппе группы $GL_{n+1}(P)$.*

Вначале докажем следующее утверждение

Лемма 16. *Композиция двух аффинных преобразований векторного пространства соответствует произведению $\circledast$ матриц.*

Доказательство. Пусть $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ – две матрицы из $GL_n(P)$. Тогда произведение $Z = X \circledast Y$ определяется равенством

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1}(x_{ik} - x_{in})(y_{kj} - y_{nj}) + x_{in} + y_{nj}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

где $Z = (z_{ij})$. Как было установлено ранее, определенное таким образом умножение ассоциативно, а роль единичного элемента играет матрица

$$I_n = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ E_{n-1} & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0\ldots0 & 0 \end{array}\right) \in M_n(P).$$

Обратной для матрицы X будет матрица

$$\overline{X} = (XV + U^t)^{-1}(I - XU).$$

Известно, что каждая матрица $X \in GL_n(P)$ соответствует линейному преобразованию векторного пространства P^n:

$$vX = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k x_{k1}, \sum_{k=1}^{n} v_k x_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} v_k x_{kn}\right), \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in P^n.$$

Если же рассматривать умножение $\circledast$, то получим такое преобразование векторного пространства P^n

$$v \circledast X = \Big(\sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_n)(x_{k1} - x_{n1}) + v_n + x_{n1},$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_n)(x_{k2} - x_{n2}) + v_n + x_{n2}, \dots, \sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_n)(x_{kn} - x_{nn}) + v_n + x_{nn}\Big) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k(x_{k1} - x_{n1}) + v_n\Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{n1} - x_{k1})\Big),\right.$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k(x_{k2} - x_{n2}) + v_n\Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{n2} - x_{k2})\Big), \dots,$$
$$\left.\sum_{k=1}^{n-1} v_k(x_{kn} - x_{nn}) + v_n\Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{nn} - x_{kn})\Big)\right) + (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}).$$

Видим, что это аффинное преобразование с матрицей

$$A_X = \begin{pmatrix} x_{11} - x_{n1} & x_{12} - x_{n2} & \cdots & x_{1n} - x_{nn} \\ x_{21} - x_{n1} & x_{22} - x_{n2} & \cdots & x_{2n} - x_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n-1,1} - x_{n1} & x_{n-1,2} - x_{n2} & \cdots & x_{n-1,n} - x_{nn} \\ 1 + nx_{n1} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} & 1 + nx_{n2} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i2} & \cdots & 1 + nx_{nn} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_{in} \end{pmatrix}$$

и вектором сдвига $(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})$, т. е.

$$v \circledast X = vA_X + (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}).$$

В классическом случае композиции линейных преобразований соответствует произведение матриц. Покажем, что и в случае действия $\circledast$, композиции двух аффинных преобразований соответствует произведение матриц $\circledast$. Действительно, пусть

$$X = (x_{ij}), \quad Y = (y_{ij}) \in M_n(P), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in P^n.$$

Обозначим

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) = u \circledast X, \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_n) = v \circledast Y.$$

Тогда координаты вектора v определяются равенствами

$$v_1 = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{k1} - x_{n1}) + u_n(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{n1} - x_{k1})) + x_{n1},$$

$$\dots$$

$$v_i = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{ki} - x_{ni}) + u_n(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{ni} - x_{ki})) + x_{ni},$$

$$\dots$$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{kn} - x_{nn}) + u_n(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{nn} - x_{kn})) + x_{nn},$$

а координаты вектора w – равенствами

$$w_1 = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(y_{k1} - y_{n1}) + v_n(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(y_{n1} - y_{k1})) + y_{n1},$$

$$\dots$$

$$w_i = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(y_{ki} - y_{ni}) + v_n(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(y_{ni} - y_{ki})) + y_{ni},$$

$$\dots$$

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(y_{kn} - y_{nn}) + v_n(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(y_{nn} - y_{kn})) + y_{nn}.$$

Рассмотрим композицию этих преобразований:

$$(u \circledast X) \circledast Y = w.$$

Тогда j-я компонента вектора w имеет вид

$$w_j = \sum_{i=1}^{n-1} v_i(y_{ij} - y_{nj}) + v_n\Big(1 + \sum_{i=1}^{n-1}(y_{nj} - y_{ij})\Big) + y_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя выражения для v_i и v_n, получим

$$w_j = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{ki} - x_{ni}) + u_n(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{ni} - x_{ki})) + x_{ni} \right) (y_{ij} - y_{nj})$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{kn} - x_{nn}) + u_n(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{nn} - x_{kn})) + x_{nn} \right)$$
$$\cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1}(y_{nj} - y_{ij}) \right) + y_{nj}.$$

После несложных преобразований приходим к равенству

$$w_j = \sum_{k=1}^{n-1} u_k \Big(\sum_{i=1}^{n-1} (y_{ij} - y_{nj})(x_{ki} - x_{ni} - x_{kn} + x_{nn}) + x_{kn} - x_{nn} \Big) \\ + u_n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{nn} - x_{kn}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (y_{ij} - y_{nj})(x_{ni} - x_{ki} - x_{nn} + x_{kn}) \Big) \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (y_{ij} - y_{nj})(x_{ni} - x_{nn}) + x_{nn} + y_{nj}.$$

Теперь рассмотрим произведение $Z = X \circledast Y$. Как известно, элементы матрицы Z определяются равенствами

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{ik} - x_{in})(y_{kj} - y_{nj}) + x_{in} + y_{nj}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Действуя матрицей Z на вектор u, получим

$$u \circledast Z = \Bigg(\sum_{k=1}^{n-1} u_k (z_{k1} - z_{n1}) + u_n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (z_{n1} - z_{k1}) \Big) + z_{n1}, \ldots, \\ \sum_{k=1}^{n-1} u_k (z_{kj} - z_{nj}) + u_n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (z_{nj} - z_{kj}) \Big) + z_{nj}, \ldots, \\ \sum_{k=1}^{n-1} u_k (z_{kn} - z_{nn}) + u_n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (z_{nn} - z_{kn}) \Big) + z_{nn} \Bigg).$$

Рассматривая j-ю компоненту этого вектора и, подставляя выражения для элементов матрицы Z, приходим к равенству

$$(u \circledast Z)_j = \sum_{k=1}^{n-1} u_k \Big(\sum_{i=1}^{n-1} (x_{ki} - x_{kn})(y_{ij} - y_{nj}) + x_{kn} - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{ni} - x_{nn})(y_{ij} - y_{nj}) - x_{nn} \Big)$$

$$+ u_n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\sum_{i=1}^{n-1} (x_{ni} - x_{nn})(y_{ij} - y_{nj}) + x_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{ki} - x_{kn})(y_{ij} - y_{nj}) - x_{kn} \Big) \Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (x_{ni} - x_{nn})(y_{ij} - y_{nj}) + x_{nn} + y_{nj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} u_k \Big(\sum_{i=1}^{n-1} (y_{ij} - y_{nj})(x_{ki} - x_{kn} - x_{ni} + x_{nn}) + x_{kn} - x_{nn} \Big)$$

$$+ u_n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{ij} - y_{nj})(x_{ni} - x_{nn} - x_{ki} + x_{kn}) + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{nn} - x_{kn}) \Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (x_{ni} - x_{nn})(y_{ij} - y_{nj}) + x_{nn} + y_{nj}.$$

Сравнивая это выражение с компонентой w_j, видим что справедливо равенство

$$(u \circledast X) \circledast Y = u \circledast (X \circledast Y),$$

т. е. композиция двух аффинных преобразований векторного пространства соответствует произведению $\circledast$. $\square$

Доказательство теоремы 8. Группа аффинных преобразований $\mathrm{Aff}(P^n)$ векторного пространства P^n состоит из отображений

$$\varphi : v \longmapsto vA + a, \quad A \in GL_n(P), \quad a \in P^n,$$

т. е. каждое аффинное преобразование определяется парой

$$\varphi = (A, a).$$

Если есть другое аффинное преобразование

$$\psi = (B, b), \ \text{где } B \in GL_n(P), b \in P^n,$$

то их композиция

$$\varphi\psi : v \longmapsto (vA + a)B + b = v(AB) + aB + b,$$

т. е. $\varphi\psi = (AB, aB + b)$.

Группа $\mathrm{Aff}(P^n)$ вкладывается в $GL_{n+1}(P)$ по правилу

$$(A, a) \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline a & 1 \end{array}\right).$$

Тогда композиции аффинных преобразований (A, a) и (B, b) будет отвечать произведение матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline a & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline b & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline aB + b & 1 \end{array}\right).$$

Мы сопоставили произвольной матрице $X = (x_{ij}) \in M_n(P)$ аффинное преобразование

$$v \circledast X = vA_X + (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}), \quad v \in P^n,$$

где

$$A_X = \begin{pmatrix} x_{11} - x_{n1} & x_{12} - x_{n2} & \cdots & x_{1n} - x_{nn} \\ x_{21} - x_{n1} & x_{22} - x_{n2} & \cdots & x_{2n} - x_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n-1,1} - x_{n1} & x_{n-1,2} - x_{n2} & \cdots & x_{n-1,n} - x_{nn} \\ 1 + nx_{n1} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} & 1 + nx_{n2} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i2} & \cdots & 1 + nx_{nn} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_{in} \end{pmatrix}.$$

При этом матрица A_X представима в виде $A_X = VX + U$, а потому матрица X принадлежит группе $G_n(P)$ тогда и только тогда, когда $\det(VX + U) \neq 0$.

Как известно, группа аффинных преобразований $\mathrm{Aff}(P^n)$ изоморфна полупрямому произведению $GL_n(P) \leftthreetimes P^n$, при этом подгруппа P^n будет нормальной.

Полупрямое произведение $GL_n(P) \leftthreetimes P^n$ вкладывается в группу $GL_{n+1}(P)$. Таким образом, группа $G_n(P)$ вкладывается в $GL_{n+1}(P)$ по правилу

$$X \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & VX+U & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline x_{n1} & \dots & x_{nn} & 1 \end{array}\right).$$

Если обозначить $y_{ij} = x_{ij} - x_{nj}$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$, то получим матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \cdots & y_{n-1,n} \\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_{i1} & 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_{i2} & \cdots & 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_{in} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Определим теперь в группе $GL_{n+1}(P)$ подгруппу $H_{n+1}(P)$, состоящую из матриц

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & Y & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 1 \end{array}\right),$$

где Y принадлежит $GL_n(P)$ и имеет вид (2.11), а все a_i лежат в P. Очевидно, что $G_n(P)$ изоморфна $H_{n+1}(P)$.

Сопряжем группу $H_{n+1}(P)$ элементом

$$g = t_{n,n-1}(-1)t_{n,n-2}(-1)\dots t_{n,1}(-1).$$

Для этого рассмотрим произвольную матрицу

$$\widetilde{Y} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & Y & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 1 \end{array}\right) \in H_{n+1}(P)$$

и заметим, что если её умножить слева на элемент

$$g^{-1} = t_{n,1}(1)t_{n,2}(1)\dots t_{n,n-1}(1),$$

то это соответствует тому, что 1-я, 2-я, …, $n-1$-я строки прибавляются к n-й строке. В результате получим

$$g^{-1}\widetilde{Y} = \left(\begin{array}{cccc|c} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \dots & y_{n-1,n} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \hline a_1 & a_2 & \dots & a_n & 1 \end{array}\right).$$

Если эту матрицу умножить справа на элемент g, то это равносильно тому, что мы умножим n-й столбец на -1 и прибавим к 1-му, 2-му, …, $n-1$-му столбцам (вычитаем n-й столбец из 1-го, 2-го, …, $n-1$-го). Получим матрицу

$$g^{-1}\widetilde{Y}g = \left(\begin{array}{ccccc|c} y_{11}-y_{1n} & y_{12}-y_{1n} & \dots & y_{1,n-1}-y_{1n} & y_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1,1}-y_{n-1,n} & y_{n-1,2}-y_{n-1,n} & \dots & y_{n-1,n-1}-y_{n-1,n} & y_{n-1,n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_1-a_n & a_2-a_n & \dots & a_{n-1}-a_n & a_n & 1 \end{array}\right).$$

Введем обозначения

$$z_{ij} = y_{ij} - y_{in},\ c_i = y_{in}, \quad 1 \le i, j \le n-1.$$

В этих обозначениях наша матрица примет вид

$$g^{-1}\widetilde{Y}g = \left(\begin{array}{cccc|c|c} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1,n-1} & c_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n-1,1} & z_{n-1,2} & \dots & z_{n-1,n-1} & c_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно, группа $g^{-1}H_{n+1}(P)g$ с обычным матричным умножением изоморфна группе $\langle G_n(P); \circledast\rangle$. $\square$

Из теоремы 8, в частности следует, что группа Михайличенко $G_n(\mathbb{R})$ изоморфна некоторой подгруппе из $GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

2.2. Определение псевдоматричного умножения и его свойства

Получив положительный ответ на вопрос 1 и имея две функции (2.1) и

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_n)(y_i - y_n) + x_n + y_n, \qquad (2.12)$$

приводящие к построению неизоморфных псевдоматричных групп, возникает новый

Вопрос 2. *Исчерпываются ли функциями (2.1) и (2.12) виды всех возможных функций, с точностью до эквивалентных преобразований, приводящих к построению над множеством вещественных чисел* $\mathbb{R}$ *всех неизоморфных псевдоматричных групп* $GL_n^f(\mathbb{R})$*?*

Ответ на данный вопрос получим в заключительной главе.

В феноменологически симметричных геометриях на двух множествах (далее ФСГ) рассматриваются (см. [12] и [15, §1]) такие невырожденные отображения $f : \mathbb{R}^{km} \times \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^k$, для которых найдётся пара групп преобразований

$$\chi_{a_1,\ldots,a_{kmn}} : \mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^{km}, \quad \theta_{a_1,\ldots,a_{kmn}} : \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^{kn},$$

зависящих от kmn параметров $a_1, \ldots, a_{kmn} \in \mathbb{R}$, что выполнено равенство

$$f(x_1, \ldots, x_{km}, y_1, \ldots, y_{kn}) = f(\chi\,(x_1, \ldots, x_{km})\,, \theta\,(y_1, \ldots, y_{kn})).$$

Два отображения f и f' считаются эквивалентными, если найдутся три гомеоморфных отображения

$$\lambda : \mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^{km}, \quad \rho : \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^{kn}, \quad \sigma : \mathbb{R}^{k} \to \mathbb{R}^{k},$$

для которых справедливо равенство

$$f'(x_1, \ldots, x_{km}, y_1, \ldots, y_{kn}) = \sigma\big(f(\lambda\left(x_1, \ldots, x_{km}\right), \rho\left(y_1, \ldots, y_{kn}\right))\big).$$

В зависимости от ранга ФСГ (параметры m и n) и рассматриваемого множества $\mathbb{R}^k$, может иметься несколько неэквивалентных функций f. Далее будем приводить такие функции к функциям псевдоматричного умножения.

Определим псевдоматричную алгебраическую систему и соответствующую категорию. Рассмотрим вопросы эквивалентности псевдоматричных алгебраических систем и дополнительные примеры.

Рассмотрим прямоугольные матрицы $A, B \in M_{m,n}$ размера $m \times n$, где m — число строк, n — число столбцов матрицы с элементами из множества R. На множестве R может быть задана структура поля, кольца, почти–кольца и т.д. Псевдоматричным умножением двух матриц A и B является матрица C, построенная при помощи функции

$$f : R^n \times R^m \to R.$$

Элемент c_{ij} матрицы C есть функция f от n элементов i–ой строки матрицы A и m элементов j–го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj}). \tag{2.13}$$

Если $A \in M_{m,n}(R)$, то символом A_i будем обозначать i–ю строку, а символом A^j — j–й столбец. В этих обозначениях выражение (2.13) можно записать в виде функции произведения строки на столбец:

$$c_{ij} = f\left(A_i, B^j\right) = A_i \cdot_f B^j.$$

Псевдоматричное умножение матриц A и B, построенное при помощи функции f, также запишем в виде $A \cdot_f B = C$. Это же обозначение оставим для умножения строки A_i на матрицу B — $A_i \cdot_f B$ и умножения матрицы B на столбец C^j — $B \cdot_f C^j$.

Для того, чтобы различать в написании множество строк и множество столбцов будем записывать множество столбцов в виде R^m, а множество строк в виде ${}^nR$. Произвольную матрицу можно представить как в виде строки столбцов, так и в виде столбца строк так, что $M_{m,n}(R) = {}^n(R^m) = ({}^nR)^m$.

Введём несколько определений.

Для произвольного подмножества матриц $G \subseteq M_{m,n}(R)$ определим связанное с ним *подмножество строк*

$$\Omega_R = \{A_i \in {}^nR | i = 1, \ldots, m;\ A \in G\}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

и *подмножество столбцов*

$$\Sigma_R = \{A^j \in R^m | j = 1, \ldots, n;\ A \in G\}, \text{ где } A = (A^1, \ldots, A^n).$$

Будем говорить, что отображение $f : \Omega_R \times \Sigma_R \to R$ задаёт *псевдоматричное умножение* на множестве G, а трёхсортную алгебраическую систему $\langle \Omega_R, \Sigma_R, R; f \rangle$ будем называть *псевдоматричной алгебраической системой*, если выполнены аксиомы:

AM1. Для произвольных матрицы $A \in G$ и столбца $C^j \in \Sigma_R$ существует единственный столбец $B^j \in \Sigma_R$, для которого справедливо равенство $A \cdot_f B^j = C^j$;

AM2. Для произвольных матрицы $B \in G$ и строки $C_i \in \Omega_R$ существует единственная строка $A_i \in \Omega_R$, для которой справедливо равенство $A_i \cdot_f B = C_i$;

AM3. Умножение матриц ассоциативно. Иными словами, для произвольных $A, B, C \in G$ справедливо равенство $(A \cdot_f B) \cdot_f C = A \cdot_f (B \cdot_f C)$.

Рассмотрим предварительно

Определение 8. *Подмножество матриц G максимально в $M_{m,n}(R)$, если для произвольных $A \in G$ и $B, C \in M_{m,n}(R)$ из того, что $A \cdot_f B \in G$ и $C \cdot_f A \in G$, следует, что $B, C \in G$.*

Тогда справедлива

Лемма 17. *Если подмножество G в псевдоматричной алгебраической системе $\langle \Omega_R, \Sigma_R, R; f\rangle$ максимально, то $\langle G; \cdot_f\rangle$ — группа.*

Доказательство. Из аксиом псевдоматричного умножения, с учётом максимальности множества G, следует, что для произвольных матриц

$$A \in (\Omega_R)^m \setminus G,\ D \in {}^n(\Sigma_R) \setminus G,\ B, C \in G,$$

справедливо $AB \notin G$ и $CD \notin G$. В этом случае из аксиом AM1 и AM2 можно построить левое и правое деление для матриц из G так, что $\langle G; \cdot_f, \diagdown, \diagup\rangle$ — квазигруппа. С учётом AM3 данная квазигруппа будет ассоциативной, а значит является группой. От записи группы с сигнатурой $\{\cdot_f, \diagdown, \diagup\}$ можно перейти к сигнатуре $\{\cdot_f, {}^{-1}, e\}$, поскольку для произвольного $x \in G$ можно записать $e = x \diagup x$ и $x^{-1} = e \diagup x$. $\square$

Определение 9 ([17, Гл. 1, § 3]). *Три отображения $\chi : \Omega_R \to \Omega_P$, $\lambda : \Sigma_R \to \Sigma_P$, $\psi : R \to P$ задают гомоморфизм трёхсортной алгебраической системы $\langle \Omega_R, \Sigma_R, R; f\rangle$ в $\langle \Omega_P, \Sigma_P, P; g\rangle$, если диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_R \times \Sigma_R & \xrightarrow{f} & R \\ {\scriptstyle \chi\times\lambda}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi} \\ \Omega_P \times \Sigma_P & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

коммутативна. Если в тройке (ψ, χ, λ) все отображения биективны, то они задают изоморфизм трёхсортных алгебраических систем.

Рассмотрим несколько дополнительных примеров псевдоматричных групп.

Пример 5. *В качестве главного примера псевдоматричного умножения рассмотрим обычное умножение матриц, например, над полем $\mathbb{R}$. В этом случае соответствующая псевдоматричная алгебраическая система $\langle \Omega_{\mathbb{R}}, \Sigma_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}; f\rangle$ с функцией f в виде (2.4) строится на подмножестве матриц $G = \{x \in R^{n^2} | \det(x) \neq 0\}$ и состоит из всех невырожденных матриц из $GL_n(\mathbb{R})$. Множество строк $\Omega_{\mathbb{R}} = {}^n\mathbb{R} \setminus \{(0,\dots,0)\}$ состоит из всех строк ${}^n\mathbb{R}$, за исключением нулевой строки. Аналогичная ситуация для множества столбцов $\Sigma_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)^t\}$.*

Пример 6. *Для псевдоматричной алгебраической системы $\langle \Omega_{\mathbb{R}}, \Sigma_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}; f\rangle$ с функцией*

$$f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_n)(y_i - y_n) + x_n + y_n,$$

максимальное множество $G_n(\mathbb{R})$ определено в теореме 7, а множества $\Omega_{\mathbb{R}} = {}^n\mathbb{R}$ и $\Sigma_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$.

В параграфе 2.1 показано, что группа Михайличенко $G_n(\mathbb{R})$ изоморфна группе с обычным умножением матриц, но построенной над матрицами большей размерности следующего вида:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \cdots & x_{(n-1)(n-1)} & x_{(n-1)n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x_{n1} & \cdots & x_{n(n-1)} & x_{nn} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. *Из примера 6 можно получить псевдоматричное умножение - для прямоугольных матриц размера $(n, n-1)$, если в функции f предыдущего примера положить $x_n = 0$, тогда*

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i(y_i - y_n) + y_n.$$

Функция f будет задавать псевдоматричную группу $\langle G; \cdot_f \rangle$, в которой умножение двух прямоугольных матриц $A, B \in G \subset M_{n,(n-1)}(\mathbb{R})$ приводит к прямоугольной матрице $A \cdot_f B = C \in G$ того же размера. Псевдоматричная группа $\langle G; \cdot_f \rangle$ изоморфна аффинной группе $Aff(\mathbb{R}^{n-1})$.

Кроме того, каждая N-ограниченно точно n-транзитивная группа G_n может являться примером псевдоматричной группы.

Пример 8. *Воспользуемся леммой 6 и для произвольной N-ограниченно точно n-транзитивной группы G_n построим изоморфизм $\psi : G_n \to \widetilde{G_n}$. Элементами группы $\langle \widetilde{G_n}; \cdot \rangle$ являются кортежи, а умножение произвольных кортежей $[g_1, \ldots, g_n], [h_1, \ldots, h_n] \in \widetilde{G_n}$ запишется в виде (1.34):*

$$[g_1, \ldots, g_n] \circ [h_1, \ldots, h_n] = [g_1 \cdot [h_1, \ldots, h_n], \ldots, g_n \cdot [h_1, \ldots, h_n]].$$

Преобразование множества B можно записать при помощи функции $f_n : B \times \widetilde{G_n} \to B$ определённой в виде (1.24), построенной над n-псевдополем.

В этом случае псевдоматричная группа $\langle \widetilde{G_n}; \cdot_{f_n} \rangle$ совпадает с группой $\langle G_n; \cdot_f \rangle$, а псевдоматричной алгебраической системой является следующая трёхсортная алгебраическая система: $\langle B, G_n, G_n; f_n \rangle$.

Далее покажем, что не только произвольная N-ограниченно точно n-транзитивная группа G_n может являться примером псевдоматричной группы, но и наоборот, т.е. произвольная псевдоматричная группа является некоторой N-ограниченно точно n-транзитивной группой.

Произвольную матрицу $A \in M_{m,n}$ представим в виде столбца строк $A = (A_1, \ldots, A_m)^t$, а для псевдоматричного умножения матриц $A, B \in G \subseteq M_{m,n}$ введём функцию

$$f^m : \Omega_R \times G \to \Omega_R,$$

описывающую умножение строки на матрицу. Иными словами,

$$A_i \cdot_f B = f^m(A_i, B_1, \ldots, B_m).$$

Аналогично, для строки столбцов $A = (A^1, \ldots, A^n)$ определим функцию

$$f^n : G \times \Sigma_R \to \Sigma_R,$$

при помощи которой запишется умножение матрицы на столбец

$$A \cdot_f B^j = f^n(A^1, \ldots, A^n, B^j).$$

Теорема 9. *Псевдоматричное умножение для матриц размера $m \times n$ можно записать при помощи псевдоматричного умножения матриц–столбцов с функцией f^m или псевдоматричного умножения матриц–строк с функцией f^n.*

Доказательство. Если определена псевдоматричная алгебраическая система $\mathfrak{A}_1 = \langle \Omega_R, \Sigma_R, R; f\rangle$ с подмножеством матриц $G \subseteq M_{m,n}(R)$, то проверим выполнение аксиом для псевдоматричной алгебраической системы $\mathfrak{A}_2 = \langle \Omega_R, G, \Omega_R; f^m\rangle$.

Аксиома AM1. для матриц–столбцов из $\mathfrak{A}_2$ выполнено в силу того, что они совпадают с матрицами из $\mathfrak{A}_1$.

Аксиома AM2. выполнена в силу того, что строка $A_i \in \Omega_R$ в алгебре $\mathfrak{A}_1$ совпадает с элементом $A_i \in \Omega_R$ в алгебре $\mathfrak{A}_2$.

Аксиома AM3. выполнена автоматически так как множество G для обеих алгебраических систем совпадает.

Таким образом, пришли к выводу, что если определена алгебраическая система $\mathfrak{A}_1$, то определена и алгебраическая система $\mathfrak{A}_2$ столбцов над строками. Ситуация и для алгебры строк над столбцами аналогична. □

При помощи данной теоремы и примера 8 устанавливается связь между N-ограниченно точно n-транзитивными группами и псевдоматричными группами.

Глава 3

Алгебраические системы феноменологически симметричных геометрий

В первом параграфе настоящей главы даётся общее определение алгебраической системы феноменологически симметричных геометрий, определяется гомоморфизм и изоморфизм. Показывается связь таких алгебраических систем с псевдоматричными алгебраическими системами. Даётся доказательство вложимости алгебраических систем феноменологически симметричных геометрий произвольного ранга в алгебраические системы минимального ранга. Во втором параграфе вводятся категории алгебраических систем феноменологически симметричных геометрий и псевдоматричных алгебраических систем, доказывается их эквивалентность.

3.1. Определение алгебраической системы феноменологически симметричной геометрии и её свойства

Ю.И. Кулаков, изучая физические законы рассматривал [6; 7] трёхсортные алгебраические системы $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}; f, \Phi \rangle$. В диссертации мы формализуем это понятие и дадим строгое определение.

Алгебраическая система Кулакова. Трёхсортную алгебраическую систему $\langle M, N, B; f, g \rangle$ с операциями $f : M \times N \to B$, $g : B^{n+mn+m} \to B$, определенными на множествах $M \times N, B$ будем называть *алгебраической системой феноменологически симметричных геометрий ранга* (m, n) (или кратко алгебраической системой ФСГ ранга (m, n)), если на подмножествах $\Sigma_M \subseteq M^m$, $\Sigma_B \subseteq B^m$, $\Omega_N \subseteq N^n$, $\Omega_B \subseteq B^n$ выполнены аксиомы:

АК1. Для любых $(i_1,\dots,i_m)\in\Sigma_M$, $(b_1,\dots,b_m)\in\Sigma_B$ найдётся единственный $\alpha\in N$, для которого справедливо равенство $f(i_j,\alpha)=b_j$, $j=1,\dots,m$;

АК2. Для любых $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Omega_N$, $(b_1,\dots,b_n)\in\Omega_B$ найдётся единственный $i\in M$, для которого справедливо равенство $f(i,\alpha_j)=b_j$, $j=1,\dots,n$;

АК3. Для любых $(i_0,i_1,\dots,i_m)\in M\times\Sigma_M$, $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in N\times\Omega_N$ справедливо равенство $f(i_0,\alpha_0)=g\,(f(i_0,\alpha_1),\dots,f(i_m,\alpha_n))$. В последнем равенстве функция g от $n+mn+m$ переменных рассматривается над элементами $f(i_j,\alpha_k)\in B$, построенными над всеми парами (i_j,α_k), за исключением (i_0,α_0). Элементы $f(i_j,\alpha_k)\in B$ упорядочены в g по индексам j,k лексикографически.

Определение 10. *Алгебраическая система $\langle M',N',B';f',g'\rangle$ называется гомоморфным образом алгебраической системы $\langle M,N,B;f,g\rangle$, если существует такая тройка отображений $\lambda:M\to M'$, $\chi:N\to N'$, $\psi:B\to B'$ для которых диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} M\times N & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle(\lambda\times\chi)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ M'\times N' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B^{n+mn+m} & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle\psi^{n+mn+m}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ (B')^{n+mn+m} & \xrightarrow{g'} & B' \end{array}$$

коммутативны. Если гомоморфизмы λ,χ,ψ биективны, то алгебраические системы $\langle M,N,B;f,g\rangle$ и *$\langle M',N',B';f',g'\rangle$ называются изоморфными.*

Далее для *алгебраической системы ФСГ ранга (m,n)* будем использовать сокращение $\mathcal{A}K_{mn}$. Если ранг алгебраической системы не важен, то будем писать кратко — АК.

Покажем теперь, что между рассматриваемыми ранее псевдоматричными алгебраическими системами и алгебраическими системами ФСГ существует связь. В частности, справедлива следующая

Лемма 18. *Если на подмножестве матриц $G\subseteq B^{mn}$ определена псевдоматричная группа $\langle G;\cdot_f\rangle$, то функция $f:\Omega_B\times\Sigma_B\to B$ псевдоматричного умножения задёт алгебраическую систему ФСГ $\langle\Omega_B,\Sigma_B,B;f,g\rangle$ ранга (n,m) с* *функцией* $g : B^{m+mn+n} \to B$, *заданной в виде:*

$$g\left(X_i, Y, Z^j\right) = X_i \cdot_f Y^{-1} \cdot_f Z^j \quad \textit{для} \quad X_i \in \Omega_B, Y \in G, Z^j \in \Sigma_B.$$

Доказательство. Действительно, положим $M = \Omega_B, N = \Sigma_B$, $\Sigma_M = \Omega_N = G$. Тогда справедливость аксиом АК1 и АК2 для $\mathcal{A}K_{mn}$ следует из аксиом АМ1 и АМ2 соответственно.

Проверяя выполнение АК3 легко убедиться, что для произвольных $(A_0, A_1, \ldots, A_n) \in \Omega_B \times G$ и $(C^0, C^1, \ldots, C^m) \in \Sigma_B \times G$ справедливо равенство

$$A_0 \cdot_f C^0 = (A_0 \cdot_f C) \cdot_f (A \cdot_f C)^{-1} \cdot_f (A \cdot_f C^0). \tag{3.1}$$

Строки A_i для $i = 1, \ldots, n$ составляют матрицу $A \in G$, а столбцы C^j для $i = 1, \ldots, m$ — матрицу $C \in G$. Результатом умножения строки на матрицу $A_0 \cdot_f C$ будет строка, а результатом умножения матрицы на столбец $A \cdot_f C^0$ — столбец. Следовательно, аксиомы алгебраической системы ФСГ выполнены и функция f псевдоматричного умножения задаёт $\mathcal{A}K_{mn}$. □

Рассмотрим простейший случай $\mathcal{A}K_{mn}$ для $m = n = 1$, обобщив утверждение, доказанное в [3].

Теорема 10 (теорема Ионина)**.** *Алгебраическая система* $\langle M, N, B; f, g\rangle$*, где* $\Sigma_M = M$*,* $\Sigma_B = B$*,* $\Omega_N = N$*,* $\Omega_B = B$ *изоморфна такой алгебраической системе* $\langle B, B, B; f', g'\rangle$*, что на множестве* B *определена группа* $\left\langle B; \cdot, ^{-1}, e\right\rangle$*, а отображения* f' *и* g' *можно записать при помощи групповых операций:*

$$f'(x, u) = x \cdot u,$$

$$g'(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z. \tag{3.2}$$

Для полноты изложения дадим доказательство этого утверждения.

Доказательство. Для произвольных $k \in M, \gamma \in N$, определим отображения

$$f_k : N \to B,\ f_\gamma : M \to B$$

по формулам

$$f_k(\alpha) = f(k, \alpha) \;\text{ и }\; f_\gamma(i) = f(i, \gamma).$$

Ввиду аксиом АК1 и АК2 эти отображения являются биекциями. Тройка отображений (f_γ, f_k, id) задаёт изоморфизм алгебраических систем:

$$(f_\gamma, f_k, id) : \langle M, N, B; f, g\rangle \to \langle B, B, B; f''', g\rangle\,,$$

где

$$f'''(x, y) = f(f_\gamma^{-1}(x), f_k^{-1}(y)).$$

При помощи произвольного $e \in B$ и отображения $f_1(x) = f'''(x, e)$, вновь перейдём к изоморфной алгебраической системе

$$(f_1, id, id) : \langle B, B, B; f''', g'''\rangle \to \langle B, B, B; f'', g''\rangle$$

с операцией $f''(x, y) = f'''(f_1^{-1}(x), y)$. В этой алгебраической системе выполнено

$$f''(x, e) = f'''(f_1^{-1}(x), e) = f_1(f_1^{-1}(x)) = x.$$

Аналогично, при помощи $f_2(x) = f''(e, x)$ перейдём к изоморфной алгебраической системе

$$(id, f_2, id) : \langle B, B, B; f'', g''\rangle \to \langle B, B, B; f', g'\rangle$$

с операцией

$$f'(x, y) = f''(x, f_2^{-1}(y)).$$

На множестве B определим операцию $(\cdot) : B\times B \to B$ равенством $x\cdot y = f'(x, y)$. Для неё справедливо соотношение

$$x \cdot e = e \cdot x = x,$$

т. е. с учётом АК1 и АК2, алгебраическая система $\langle B; \cdot, e\rangle$ — лупа.

Из АК3 для произвольных пар $(x, y), (u, v) \in B^2$ справедливо равенство

$$x \cdot u = g'(x \cdot v, y \cdot v, y \cdot u). \tag{3.3}$$

Тогда для пар (x, e) и $(y \cdot z, y)$, с одной стороны, выполнено

$$x \cdot (y \cdot z) = g'(x \cdot y, e \cdot y, e \cdot (y \cdot z)) = g(x \cdot y, y, y \cdot z),$$

а с другой стороны, для пар $(x \cdot y, y)$ и (z, e):

$$(x \cdot y) \cdot z = g'((x \cdot y) \cdot e, y \cdot e, y \cdot z) = g(x \cdot y, y, y \cdot z).$$

Следовательно, из равенства правых частей двух последних выражений приходим к равенству левых частей, т. е. определённая выше операция будет ассоциативной. Ассоциативная лупа является группой, значит $\left\langle B; \cdot, ^{-1}, e \right\rangle$ – группа.

Осталось построить операцию g', удовлетворяющую равенству (3.3). Положим в этом равенстве $x = a \cdot b^{-1}, y = e, u = c, v = b$. Тогда

$$(a \cdot b^{-1}) \cdot c = g'((a \cdot b^{-1}) \cdot b, b, c) = g'(a, b, c).$$

Следовательно, равенство (3.2) выполнено. □

В дальнейшем, для алгебраической системы ФСГ нам потребуется понятие подсистемы. Дадим его

Определение 11. *Алгебраическая система $\langle M, N, B; f, g \rangle$ ранга (m, n) называется подсистемой алгебраической системы $\langle M', N', B'; f', g' \rangle$ ранга (m', n') когда $M \subseteq M'$, $N \subseteq N'$, $B \subseteq B'$, а для операций справедливы выражения: $f = f'\Big|_{M \times N}$, $g = g'\Big|_{B^{n+mn+m}}$.*

Ю.И. Кулаков в [8] сформулировал гипотезу:

Гипотеза 1. *Всякая алгебраическая система $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}; f, g \rangle$ ранга (m, n) вложима в некоторую алгебраическую систему $\left\langle \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g} \right\rangle$ ранга (1,1), но построенную над матрицами $\mathbb{R}^{mn}$.*

Докажем данную гипотезу для произвольной алгебраической системы ФСГ $\langle M, N, B; f, g \rangle$ ранга (m, n), т. е. для произвольных множеств M, N, B.

Теорема 11. *Алгебраическая система ФСГ* $\langle M, N, B; f, g\rangle$ *ранга* (m, n) *вложима в некоторую алгебраическую систему* $\left\langle M^m, N^n, B^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g}\right\rangle$ *ранга (1,1).*

Доказательство. Рассмотрим алгебраическую систему ФСГ $\mathcal{A}K_{mn} = \langle M, N, B; f, g$ ранга (m, n), для которой выполнено $M = \Omega_B, N = \Sigma_B$ и справедливо равенство $G = \Omega_{\Sigma_B} = \Sigma_{\Omega_B} \subseteq B^{mn}$, где

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} f(i_1, \alpha_1) & \cdots & f(i_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(i_m, \alpha_1) & \cdots & f(i_m, \alpha_n) \end{array} \right) \middle| \left(\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{array} \right) \in \Sigma_{\Omega_B}, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Omega_{\Sigma_B} \right\}.$$

Покажем, что $\mathcal{A}K_{mn}$ вложима в алгебраическую систему $\mathcal{A}K_{11} = \langle G, G, G; \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle$ ранга $(1, 1)$.

Для $\mathcal{A}K_{mn}$ запишем операцию $g : B^{n+mn+m} \to B$ в виде $g : \Omega_B \times G \times \Sigma_B \to B$, изменив порядок записи аргументов, группируя их в виде строки, матрицы и столбца. Тогда

$$b = g\left((b_{01}, \ldots, b_{0n}), \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} b_{10} \\ \vdots \\ b_{m0} \end{array} \right) \right). \tag{3.4}$$

Определим требуемую алгебраическую систему $\mathcal{A}K_{11}$, взяв в качестве множеств M, N, B множество $G = M = N = B$. Определим $\widetilde{g} : G \times G \times G \to G$ для $\mathcal{A}K_{11}$ при помощи mn функций (3.4). В таком случае для произвольных $A, C, D \in G$ справедливо

$$\widetilde{g}(A, C, D) = \left(\begin{array}{ccc} g(A_1, C, D^1) & \cdots & g(A_1, C, D^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(A_m, C, D^1) & \cdots & g(A_m, C, D^n) \end{array} \right).$$

В качестве $\widetilde{f} : \Sigma_{\Omega_B} \times \Omega_{\Sigma_B} \to G$ возьмём mn отображений f так, что

$$\widetilde{f}\left(\left(\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{array} \right), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \right) = \left(\begin{array}{ccc} f(i_1, \alpha_1) & \cdots & f(i_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(i_m, \alpha_1) & \cdots & f(i_m, \alpha_n) \end{array} \right).$$

Проверим выполнение аксиом алгебраической системы ФСГ для $\mathcal{A}K_{11}$. Аксиома *AK1*. Для любых

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} \in \Sigma_{\Omega_B}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in G$$

найдётся единственная строка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Omega_{\Sigma_B}$, для которой справедливо равенство

$$f^{mn}\left(\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix}, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Это следует из покомпонентного выполнения аксиомы AK1 для $\mathcal{A}K_{mn}$. Действительно, в $\mathcal{A}K_{mn}$ аксиома AK1 выполняется, т. е. для любых

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} \in \Sigma_{\Omega_B}, \begin{pmatrix} b_{1u} \\ \vdots \\ b_{mu} \end{pmatrix} \in \Sigma_B$$

существует единственный элемент $\alpha_u \in \Sigma_B$, для которого справедливо равенство

$$f(i_k, \alpha_u) = b_{ku}, \text{ где } k = 1, \ldots, m.$$

То, что строка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ лежит в Ω_{Σ_B} следует из определения множества G.

Аналогичным образом проверяется и аксиома AK2.

Аксиома AK3 для $\widetilde{g}$ в $\mathcal{A}K_{11}$ выполнена вследствие выполнения AK3 для mn операций g в $\mathcal{A}K_{mn}$, так как $\widetilde{g}$ определена при помощи mn операций g. $\square$

Таким образом, в теореме 11 построили отображение $F_{mn} : \mathcal{A}K_{mn} \mapsto \mathcal{A}K_{11}$.

Следствие 7. *Из построения* $\mathcal{A}K_{11}$ *по* $\mathcal{A}K_{mn}$ *следует, что отображение* F_{mn} *инъективное, т. е. если* $F_{mn}(\mathcal{A}K_{mn}) \cong F_{mn}(\mathcal{A}K'_{mn})$, *то* $\mathcal{A}K_{mn} \cong \mathcal{A}K'_{mn}$

3.2. Эквивалентность категорий

Определим категорию $\mathcal{C}K_{mn}$ алгебраических систем ФСГ, в которой объектами выступают алгебраические системы ранга (m, n), а морфизмами категории — гомоморфизмы алгебраических систем. Определим подкатегорию $\mathcal{C}K^*_{mn}$ категории $\mathcal{C}K_{mn}$, для объектов которой справедливо равенство $M = \Omega_B$, $N = \Sigma_B, \Sigma_M = \Omega_N$.

Напомним, что в категории псевдоматричных алгебраических систем $\mathcal{C}M_{mn}$ определена подкатегория $\mathcal{C}M^*_{mn}$. Для объектов $\mathcal{C}M^*_{mn}$ справедливо утверждение о максимальности множества G.

Тогда, с учётом определений 6 и 7 эквивалентности категорий справедлива

Теорема 12. *Категории $\mathcal{C}K^*_{mn}$ и $\mathcal{C}M^*_{mn}$ категорно эквивалентны.*

Доказательство. Для произвольной $\mathcal{A}K_{mn} \in Ob_{\mathcal{C}K^*_{mn}}$, с учётом теоремы 11, построим вложение в $\mathcal{A}K_{11}$. Далее, воспользовавшись равенством $\Sigma_{\Omega_B} = \Omega_{\Sigma_B} = G$, видим, что выполнено условие леммы 10. Следовательно, алгебраическая система $\langle G; \widetilde{f}\rangle$ будет группой.

Итак, построили отображение $F_1 : \mathcal{A}K_{mn} \mapsto \mathcal{A}M_{mn}$, сопоставляющее алгебраической системе ФСГ $\mathcal{A}K_{mn}$ псевдоматричную алгебраическую систему $\mathcal{A}M_{mn}$.

Для произвольного морфизма $h \in \mathtt{mor}(\mathcal{C}K_{mn})$, отображение алгебраических систем $\mathtt{dom}\ h = \langle \Omega_B, \Sigma_B, B; f, g\rangle$ в $\mathtt{cod}\ h = \langle \Omega^h_B, \Sigma^h_B, B^h; f^h, g^h\rangle$ задаётся тройкой $h = (h_1, h_2, h_3)$, где $h_1 : \Omega_B \to \Omega^h_B, h_2 : \Sigma_B \to \Sigma^h_B, h_3 : B \to B^h$. Найдём их образы и построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\langle \Omega_B, \Sigma_B, B; f, g\rangle \arrow[r, "F_{mn}"] \arrow[d, "{(h_1,h_2,h_3)}"'] & \langle G, G, G; \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle \arrow[r, "F_g"] \arrow[d, "{(h'_1,h'_2,h'_3)}"'] & \langle G, G, G; \widetilde{f}\rangle \arrow[d, "{(h'_1,h'_2,h'_3)}"'] \\
\langle \Omega^h_B, \Sigma^h_B, B^h; f^h, g^h\rangle \arrow[r, "F'_{mn}"] & \langle G^h, G^h, G^h; \widetilde{f}^h, \widetilde{g}^h\rangle \arrow[r, "F'_g"] & \langle G^h, G^h, G^h; \widetilde{f}^h\rangle
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Суперпозиция отображений

$$F'_{mn} \circ (h_1, h_2, h_3) = (h'_1, h'_2, h'_3) \circ F_{mn}$$

с учётом следствия 7 коммутативна. Отображение F_g приводит к обеднению алгебры за счёт уменьшения числа операций. Следовательно, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\langle \Omega_B, \Sigma_B, B; f, g\rangle \arrow[r, "F_g \circ F_{mn}"] \arrow[d, "(h_1,h_2,h_3)"'] & \langle G, G, G; \widetilde{f}\rangle \arrow[d, "(h'_1,h'_2,h'_3)"'] \\
\langle \Omega_B^h, \Sigma_B^h, B^h; f^h, g^h\rangle \arrow[r, "F'_g \circ F'_{mn}"] & \langle G^h, G^h, G^h; \widetilde{f}^h\rangle
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. о. построили отображение $\mathcal{F}_1 : (h_1, h_2, h_3) \mapsto (h'_1, h'_2, h'_3)$. Очевидно, что единичный морфизм при таком отображении перейдёт в единичный, т.е. $\mathcal{F}_1 : id_A \mapsto id_{\mathcal{F}_1(A)}$. Для произвольных $\tau, h \in \mathtt{mor}(\mathcal{C}K_{mn})$, для которых определена композиция $\tau \circ h$, определено и

$$\mathcal{F}_1(\tau \circ h) = \mathcal{F}_1(\tau) \circ \mathcal{F}_1(h).$$

Таким образом, построили ковариантный функтор

$$\mathcal{F}_1 : \mathcal{C}K_{mn} \to \mathcal{C}M_{mn}$$

из категории алгебраических систем ФСГ в категорию псевдоматричных алгебраических систем.

Рассмотрим отображение $F_2 : \mathcal{C}M_{mn} \to \mathcal{C}K_{mn}$, построенное в лемме 18, которое заключается в обогащении алгебры $\langle \Omega_B, \Sigma_B, B; f\rangle$ дополнительной операцией g. По этой причине любой морфизм $h \in \mathtt{mor}(\mathcal{C}M_{mn})$, задаваемый тройкой $h = (h_1, h_2, h_3)$, будет морфизмом и в категории $\mathcal{C}K_{mn}$, причём $\mathcal{F}_2(h) = h$. Значит, для произвольных $\tau, h \in \mathtt{mor}(\mathcal{C}M_{mn})$, для которых определена композиция $\tau \circ h$, определено

$$\mathcal{F}_2(\tau \circ h) = \mathcal{F}_2(\tau) \circ \mathcal{F}_2(h) = \tau \circ h,$$

а для единичного морфизма — $\mathcal{F}_2 : id_A \mapsto id_{\mathcal{F}_2(A)}$.

Осталось найти суперпозицию построенных функторов. Из построений видно, что $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 = id$. Рассмотрим теперь композицию $\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$. Для произвольной алгебры имеем

$$\langle \Omega_B, \Sigma_B, B; f, g\rangle \xrightarrow{F_1} \langle G, G, G; \widetilde{f}\rangle \xrightarrow{F_2} \langle G, G, G; \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle.$$

С учётом (3.5) $F_2F_1 \cong id$. Морфизм

$$\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\left(h_1, h_2, h_3\right) = \mathcal{F}_2\left(h_1', h_2', h_3'\right) = \left(h_1', h_2', h_3'\right),$$

следовательно, с учётом (3.5) диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \langle \Omega_B, \Sigma_B, B; f, g \rangle & \xrightarrow{\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1} & \langle G, G, G; \widetilde{f}, \widetilde{g} \rangle \\ {\scriptstyle h}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(h)} \\ \langle \Omega_B^h, \Sigma_B^h, B^h; f^h, g^h \rangle & \xrightarrow{\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1} & \langle G^h, G^h, G^h; \widetilde{f}^h, \widetilde{g}^h \rangle \end{array}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $\mathcal{F}_2$, в соответствии с определением 7, является эквивалентностью категорий, а категории эквивалентны. □

Рассмотренная в данном параграфе категорная эквивалентность алгебраических систем ФСГ и псевдоматричной алгебраической системы, позволяет записать решения ФСГ в виде псевдоматричных групп. Теперь можно ответить на вопрос 2. Ответ, с учётом теоремы 12 и [11], будет положительный: с точностью до локального изоморфизма имеется только две локально неизоморфные группы, порождаемые функциями (2.1) и (2.12).

Заключение

В диссертации исследовалась алгебраическая система ФСГ и её связь с другими известными алгебраическими системами. Установлены следующие результаты:

1. Введены классы групп ограниченно точно n-транзитивных и n-псевдополей, установлена их категорная эквивалентность. Категорная эквивалентность доказана для категорий, когда морфизмами категорий являются гомоморфизмы соответствующих алгебраических систем. Поля степени n являются частным случаем n-псевдополей, отсюда получается категорная эквивалентность точно n-транзитивных групп и полей степени.

2. Построена псевдоматричная алгебраическая система, расширяющая матричное умножение. Построены примеры псевдоматричного умножения для квадратных и прямоугольных матриц. Установлено, что произвольная ограниченно точно n-транзитивная группа задаёт псевдоматричное умножение, равно как и произвольное псевдоматричное умножение является ограниченно точно n-транзитивной группой.

3. Установлена категорная эквивалентность алгебраических систем ФСГ и псевдоматричных алгебраических систем.

4. Доказана гипотеза вложимости ФСГ произвольного ранга в ФСГ минимального ранга.

В дальнейшем интерес представляют следующие направления:

— для локальных групп Ли рассмотреть локальные точно n транзитивные группы и локальные n-псевдополя, установить их связь;

— рассмотреть алгебраические системы ФСГ большей размерности и большего ранга, опираясь на их связь с группами ограниченно точно n транзитивными и n-псевдополями;

— показать, что все псевдоматричные группы являются линейными или найти контр-пример.

Список литературы

1. Артамонов, В. А. Общая алгебра. Т. 2 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков и др. – М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991 – 480 с.
2. Витяев, Е.Е. Числовое, алгебраическое и конструктивное представления одной физической структуры. / Е.Е. Витяев // Логико-математические основы проблемы МОЗ. Новосибирск, 1985. Вып. 107: Вычислительные системы. – С. 40–51.
3. Ионин, В.К. Абстрактные группы как физические структуры. / В.К. Ионин // Системология и методологические проблемы информационно–логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. – С. 40–43.
4. Кон, П.М. Свободные кольца и их связи. / П.М. Кон – Москва, Мир, 1975, – 334–336 с.
5. Коуровская тетрадь. Издание 18–е дополненное, включающее Архив решённых задач. Новосибирск. 2014.
6. Кулаков, Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. / Ю.И. Кулаков // ДАН СССР, 193 – 1970, 1, – С. 72–75.
7. Кулаков, Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур / Ю.И. Кулаков // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12, № 5 – С. 1142–1145.
8. Кулаков, Ю.И. Новая формулировка теории физических структур / Ю.И. Кулаков // Методологические и технологические проблемы информационно–логических систем, Вычислительные системы, № 125, 1988 – С. 3–32.
9. Мазуров, В.Д. О точно дважды транзитивных группах. / В.Д. Мазуров // Вопросы алгебры и логики. (Труды Института математики СО РАН, Т. 30). Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996 — С. 114–118.
10. Маклейн, С. Категории для работающего математика / С. Маклейн – М., Физматлит, 2004 – 352 с.
11. Михайличенко, Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физи-

ческих структур / Г.Г. Михайличенко // ДАН СССР, 1972, т. 206, 5 – С. 1056–1058.

12. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физ. структур) / Г.Г. Михайличенко // ДАН СССР, 1985, т. 284, № 1, стр. 39–41.
13. Михайличенко, Г.Г. Двуметрические физические структуры и комплексные числа / Г.Г. Михайличенко // ДАН СССР, 321, 1991, 4 – С. 677–680.
14. Михайличенко, Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2) / Г.Г. Михайличенко // Сиб. матем. журн., 34:3, 1993 – С. 132–143.
15. Михайличенко, Г.Г. Групповая симметрия физических структур / Г.Г. Михайличенко – Барнаул: БГПУ, 2003 – 204 с.
16. Пирс, Р. Ассоциативные алгебры / Р. Пирс – М.: Мир, 1986 – 543 с.
17. Плоткин, Б.И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных / Б.И. Плоткин – М.: Наука, 1991 – 448 с.
18. Созутов, А.И. О некоторых почти-областях и точно дважды транзитивных группах / А.И. Созутов, Е.Б. Дураков, Е.В. Бугаева // Тр. ИММ УрО РАН, 20, № 2, 2014 – С. 277–283.
19. Hall, M. On a theorem of Jordan / M. Hall // Pacific J. Math. 4:2, 1954 – P. 219–226.
20. Jordan, C. Recherches sur les substitutions / C. Jordan // J. Math. Pures Appl. (2) 17, 1872 – P. 351–363.
21. Karzel, H. Inzidenzgruppen / H. Karzel // I. Lecture Notes by Pieper, I. and Sorensen, K., University of Hamburg (1965), 123–135.
22. Kerby, W. Uber eine scharf 3–fach transitiven Gruppen zugeordnete algebraische Struktur / W. Kerby, H. Wefelscheid // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37, 1972 – P. 225–235.
23. Krantz, D.H. Foundations of measurement. V.1 / D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes, A. Tversky – New York and London: Academic Press, 1971 – 576 p.
24. Leissner, W. Ein Stufenaufbau der Fasthereiche, Fastkorper und Korper aus

ihrer multiplikativen Gruppe / W. Leissner // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 46, 1977 – P. 55–89.

25. Leissner, W. On sharply n–ply transitive groups / W. Leissner // The Eighteenth International Symposium on Functional Equations, August 26–September 6, 1980, Waterloo and Scarborough, Ontario, Canada.
26. Cara, P A categorical approach to loops, neardomains and nearfields / P. Cara, R. Kieboom, T. Vervloet // Bulletin of the Belgian Mathematical Society — Simon Stevin, V. 19, № 5, 2012 – P. 845–857.
27. Rips, E. A sharply 2-transitive group without a non-trivial abelian normal subgroup / E. Rips, Y. Segev, K. Tent // arXiv:1406.0382v3, 2014 – P. 14.
28. Tent, K. Sharply 2-transitive groups / K. Tent, M. Ziegler // Adv. Geom., 16, no. 1, 2016 – P. 131–134.
29. Tits, J. Sur les groupes doublement transitif continus / J. Tits // Comment. Math, Helv. 26, 1952 – P. 203–224.

    Sur les groupes doublement transitif continus: correction et complements, Comment. Math, Helv. 30, 1956 – P. 234–240.
30. Wilke, F.W. Pseudo–fields and doubly transitive groups / F.W. Wilke // Bull. Austral. math. soc. V. 7, 1972 – P. 163–168.
31. Zassenhaus, H. Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen / H. Zassenhaus // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11, 1936 – P. 17–40
32. Zemmer, J.L. Near–fields, planar and non–planar / J.L. Zemmer // Math. Stud., 31, 1964 – P. 145–150.

Работы автора по теме диссертации

33. Симонов, А.А. Псевдоматричные группы и физические структуры / А.А. Симонов // Сиб. матем. журн., 56:1, 2015 – С. 211–226.
34. Симонов, А.А. Обобщение точно транзитивных групп / А.А. Симонов // Изв. РАН. Сер. матем., 78:6, 2014 – С. 153–178.
35. Бардаков, В.Г. Кольца и группы матриц с нестандартным произведением / В.Г. Бардаков, А.А. Симонов // Сиб. Матем. журнал, 2013, т. 54, №3 – С. 504–519.
36. Симонов, А.А. О соответствии между почтиобластями и группами / А.А. Симонов // Алгебра и Логика. 2006, 45, 2 – С. 239–251
37. Simonov, A.A. On an algebraic definition of laws / A.A. Simonov, Y.I. Kulakov, E.E. Vityaev // Journal of Mathematical Psychology, 58, 2014 – P. 13–20.
38. Simonov, A.A. The generalization of matrix multiplication / A.A. Simonov // MDA 2012 – «Mathematics of Distances and Applications», 02-05.07.2012, Varna, Bulgaria, Abstracts – P. 52.
39. Симонов, А.А. Физические законы и обобщение матричного умножения / А.А. Симонов // Всероссийская конференция Знания – Онтологии – Теории, 14–16 сентября 2007 г., Новосибирск, Т. 1 – С. 104–113.
40. Симонов, А.А. Алгебраическая теория биформ. Случай ранга (n+1,2) / А.А. Симонов, И.А. Фирдман – Препринт № ВМ07-02, Омского государственного технического университета, 2007 – 35 с.
41. Симонов, А.А. О группах близких к точно транзитивным / А.А. Симонов // Тезисы Мальцевские чтения, 2007, Новосибирск.
42. Симонов, А.А. Построение групп Матье M_{11} и M_{12} / А.А. Симонов // Тезисы Мальцевские чтения, 2005, Новосибирск.
43. Симонов, А.А. Обобщённое матричное умножение / А.А. Симонов // Тезисы Мальцевские чтения, 2002, Новосибирск.