Теория физических структур (обзор)

Симонов Андрей Артёмович

Andrey.Simonoff@gmail.com

Новосибирск
ЗОНТ – 2011

Примеры физических структур

1. Евклидова плоскость,
2. Закон Ома.

Аксиомы физических структур

1. Алгебраическая система аксиом,
2. Аксиомы физических структур на гладких многообразиях,
3. Групповое определение физических структур.

Решения физических структур

1. Физические структуры на двух множествах:
   а) Однометрические физические структуры,
   б) Полиметрические физические структуры,
   в) Физические структуры на произвольных множествах,
2. Физические структуры на одном множестве:
   а) плоские геометрии,
   б) трёхмерные геометрии.

Примеры физических структур

1. Евклидова плоскость,
2. Закон Ома.

Аксиомы физических структур

1. Алгебраическая система аксиом,
2. Аксиомы физических структур на гладких многообразиях,
3. Групповое определение физических структур.

Решения физических структур

1. Физические структуры на двух множествах:
   а) Однометрические физические структуры,
   б) Полиметрические физические структуры,
   в) Физические структуры на произвольных множествах,
2. Физические структуры на одном множестве:
   а) плоские геометрии,
   б) трёхмерные геометрии.

Примеры физических структур

1. Евклидова плоскость,
2. Закон Ома.

Аксиомы физических структур

1. Алгебраическая система аксиом,
2. Аксиомы физических структур на гладких многообразиях,
3. Групповое определение физических структур.

Решения физических структур

1. Физические структуры на двух множествах:
   а) Однометрические физические структуры,
   б) Полиметрические физические структуры,
   в) Физические структуры на произвольных множествах,
2. Физические структуры на одном множестве:
   а) плоские геометрии,
   б) трёхмерные геометрии.

Евклидова плоскость

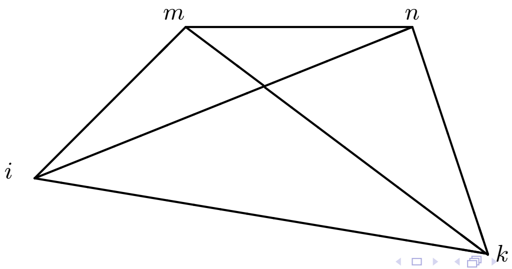
Произвольным точкам плоскости $i, k \in \mathfrak{M}$ сопоставим их взаимное расстояние $\ell_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$. Точкам $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathfrak{M}$, аналогично, сопоставим набор опытных данных, характеризующих данное множество $\mathfrak{M}$, который можно представить в виде матрицы:

	i_1	i_2	i_3	$\ldots$	i_n
i_1	0	ℓ_{12}	ℓ_{13}	$\ldots$	ℓ_{1n}
i_2	ℓ_{12}	0	ℓ_{23}	$\ldots$	ℓ_{2n}
i_3	ℓ_{13}	ℓ_{23}	0	$\ldots$	ℓ_{3n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
i_n	ℓ_{1n}	ℓ_{2n}	ℓ_{3n}	$\ldots$	0

Объём симплекса

Для любых четырёх точек $i, k, m, n \in \mathfrak{M}$ двумерной евклидовой плоскости $\mathfrak{M}$ существует функциональная связь между их взаимными расстояниями, вид которой не зависит от выбора этих точек:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 \\ 1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 \\ 1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 \\ 1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

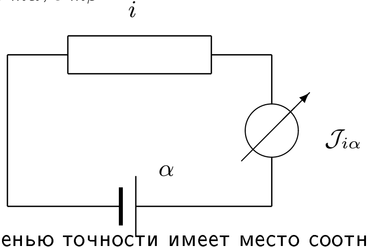


Определитель Келли-Менгера

Для любых восьми точек $i, j, k, m, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{M}$ двумерной евклидовой плоскости $\mathfrak{M}$ существует функциональная связь между их взаимными расстояниями, вид которой не зависит от выбора этих точек:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \ell^2_{i\alpha} & \ell^2_{i\beta} & \ell^2_{i\gamma} & \ell^2_{i\delta} \\ 1 & \ell^2_{j\alpha} & \ell^2_{j\beta} & \ell^2_{j\gamma} & \ell^2_{j\delta} \\ 1 & \ell^2_{k\alpha} & \ell^2_{k\beta} & \ell^2_{k\gamma} & \ell^2_{k\delta} \\ 1 & \ell^2_{m\alpha} & \ell^2_{m\beta} & \ell^2_{k\gamma} & \ell^2_{m\delta} \end{vmatrix} = 0.$$

Возьмём три произвольных проводника $i, k, m \in \mathfrak{M}$ и два произвольных источника тока $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$. Измерим *шесть* показаний амперметра $\mathcal{J}_{i\alpha}, \mathcal{J}_{i\beta}, \mathcal{J}_{k\alpha}, \mathcal{J}_{k\beta}, \mathcal{J}_{m\alpha}, \mathcal{J}_{m\beta}$ по схеме:



С достаточной степенью точности имеет место соотношение:

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathcal{J}_{i\alpha}^{-1} & \mathcal{J}_{i\beta}^{-1} \\ 1 & \mathcal{J}_{k\alpha}^{-1} & \mathcal{J}_{k\beta}^{-1} \\ 1 & \mathcal{J}_{m\alpha}^{-1} & \mathcal{J}_{m\beta}^{-1} \end{vmatrix} = 0,$$

из которого, используя эталонные точки $k, m \in \mathfrak{M}, \beta \in \mathfrak{N}$ легко получить хорошо известный Закон Ома для всей цепи

$$\mathcal{J}_{i\alpha} = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + r_\alpha},$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ – ЭДС, r_α, R_i – сопротивление источника тока α и проводника i.

Если в многосортной алгебраической системе $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B, f, g)$ на множествах $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B, \mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}, \mathfrak{S}_g \subseteq B^{n+nm+m}$ выполнены аксиомы:
Аксиома I. *Для отображений* $f\colon \mathfrak{S}_{\mathfrak{f}} \to B,\ \ g\colon \mathfrak{S}_g \to B$, *на произвольных кортежах* $\langle i_0 i_1 \dots i_n| \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{S}_{\mathfrak{M}^n} \subseteq \mathfrak{M}^{n+1}$ *и* $|\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_m\rangle \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}^m} \subseteq \mathfrak{N}^{m+1}$ *справедливо тождество*

$$\langle i_0|\alpha_0\rangle = g\begin{pmatrix} & \langle i_0|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_0|\alpha_m\rangle \\ \langle i_1|\alpha_0\rangle & \langle i_1|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_1|\alpha_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle i_n|\alpha_0\rangle & \langle i_n|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_n|\alpha_m\rangle \end{pmatrix},$$

Аксиома II. *Для произвольного кортежа* $\langle i_1 i_2 \dots i_n| \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{M}^n}$ *и произвольных упорядоченных* n *элементов* $(b_1 b_2 \dots b_n) \in \mathfrak{S}_{B^n}$ *найдётся единственный элемент* $\alpha \in \mathfrak{N}$, *для которого справедливы равенства* $\langle i_k|\alpha\rangle = b_k,\ k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Аксиома III. $(\forall\ |\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m\rangle \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}^m}), (\forall (b_1 b_2 \dots b_m) \in \mathfrak{S}_{B^m}), (\exists!\ i \in \mathfrak{M}) : \langle i|\alpha_k\rangle = b_k,\ k \in \{1, 2, \dots, m\}$.
тогда такую алгебраическую систему будем называть *физической структурой* ранга $(n+1, m+1)$.

Система аксиом для ФС на гладких многообразиях

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся m–мерным и n–мерным многообразиями и функция $f : \mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, сопоставляющая каждой паре $i \times \alpha \in \mathfrak{S}_f$ вещественное число $f(i\alpha) \in \mathbb{R}$. Обозначим через $U(i)$ и $U(\alpha)$ окрестности точек $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, через $U(i\alpha)$ – окрестность пары $i \times \alpha \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.
Для некоторых кортежей $\langle k_1 \dots k_n| \in \mathfrak{M}^n$ и $|\gamma_1 \dots \gamma_m\rangle \in \mathfrak{N}^m$ введем функции $f^n = f[k_1 \dots k_n]$ и $f^m = f[\gamma_1 \dots \gamma_m]$, сопоставляя точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ точки $(f(k_1\alpha), \dots, f(k_n\alpha)) \in \mathbb{R}^n$ и $(f(i\gamma_1), \dots, f(i\gamma_m)) \in \mathbb{R}^m$, если пары $k_1 \times \alpha, \dots, k_n \times \alpha$ и $i \times \gamma_1, \dots, i \times \gamma_m$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$.

Система аксиом для ФС на гладких многообразиях

Будем говорить, что функция f задает на m–мерном и n–мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *физическую структуру ранга* $(n+1, m+1)$, если:

Аксиома I. *Существует плотное в* $\mathfrak{S}_F$ *множество такое, что для каждого прямого произведения кортежей* $\langle ijk\dots v| \times |\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$ *длины* $m+n+2$ *и некоторой его окрестности* $U(\langle ijk\dots v| \times |\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle)$ *найдётся такая достаточно гладкая функция* $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, *определённая в некоторой области* $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$, *содержащей кортеж* $\langle ijk\dots v|\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$, *что множество* $U(\langle ijk\dots v|\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle)$ *является подмножеством множества нулей функции* Φ

$$\Phi(\langle ijk\dots v|\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle) = 0$$

для всех кортежей из окресности $U(\langle ijk\dots v|\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle)$.

Аксиома II. *Область определения* $\mathfrak{S}_f$ *функции* f *есть открытое и плотное в* $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ *множество.*

Аксиома III. *Функция* f *в области своего определения есть достаточно гладкая функция.*

Аксиома IV. *В* $\mathfrak{M}^n$ *и* $\mathfrak{N}^m$ *плотны множества таких кортов длины* n *и* m, *для которых функции* f^n *и* f^m *имеют максимальные ранги, равные* n *и* m, *в точках плотных в* $\mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{M}$ *множеств соответственно.*

Под локальным движением ФС на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем понимать такую пару взаимно однозначных гладких отображений:

$$\lambda : U \to U' \text{ и } \sigma : V \to V',$$

где $U, U' \subset \mathfrak{M}$ и $V, V' \subset \mathfrak{N}$ – открытые области, при которых функция f сохраняется. Последнее означает, что для каждой пары $i \times \alpha \ \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i \in U,\ \alpha \in V$ и $i' \times \alpha' \ \in \mathfrak{S}_f$, где $i' = \lambda(i) \in U'$, $\alpha' = \sigma(\alpha) \in V'$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i, \alpha).$$

Определение Будем говорить, что функция f, удовлетворяющая аксиомам II, III, IV, задаёт на многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ ФС, если выполняется аксиома: **Аксиома I$'$**. Существуют открытые и плотные в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия mn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, такие, что действия её в окрестностях $U(i), U(j)$ и $U(\alpha), U(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$ и что **функция f является двухточечным инвариантом**.

Физическая структура ранга $(2, 2)$

Решение физической структуры ранга $(2, 2)$ можно записать в аддитивной $\langle i|\alpha\rangle = x_i + \xi_\alpha$ или мультипликативной форме $\langle i|\alpha\rangle = x_i \cdot \xi_\alpha$, для которых соответствующие функции записываются в виде

$$\Phi\left(\langle ij|\alpha\beta\rangle\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \langle i|\alpha\rangle & \langle i|\beta\rangle \\ 1 & \langle j|\alpha\rangle & \langle j|\beta\rangle \end{vmatrix} = 0, \quad \Phi\left(\langle ij|\alpha\beta\rangle\right) = \begin{vmatrix} \langle i|\alpha\rangle & \langle i|\beta\rangle \\ \langle j|\alpha\rangle & \langle j|\beta\rangle \end{vmatrix} = 0.$$

Физическая структура ранга $(m+1, m+1)$

$m = n \geq 1$:

$$\begin{cases} \langle i|\alpha\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_{m-1}\xi_{m-1} + x_m\xi_m, \\ \Phi_1\left(\langle i_1 \ldots i_{m+1}|\alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle\right) = \begin{vmatrix} \langle i_1|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_1|\alpha_{m+1}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle i_{m+1}|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_{m+1}|\alpha_{m+1}\rangle \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle i|\alpha\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_{m-1}\xi_{m-1} + x_m + \xi_m, \\ \Phi_2\left(\langle i_1 \ldots i_{m+1}|\alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \langle i_1|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_1|\alpha_{m+1}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \langle i_{m+1}|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_{m+1}|\alpha_{m+1}\rangle \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

Физическая структура ранга $(m+1, n+1)$

$m = 1, n = 3$:

$$\begin{cases} \langle i|\alpha\rangle = (x_1\xi_1 + \xi_2)/(x_1 + \xi_3), \\ \Phi\left(\langle ij|\alpha\beta\gamma\delta\rangle\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \langle i|\alpha\rangle & \langle i|\beta\rangle & \langle i|\gamma\rangle & \langle i|\delta\rangle \\ \langle j|\alpha\rangle & \langle j|\beta\rangle & \langle j|\gamma\rangle & \langle j|\delta\rangle \\ \langle i|\alpha\rangle\langle j|\alpha\rangle & \langle i|\beta\rangle\langle j|\beta\rangle & \langle i|\gamma\rangle\langle j|\gamma\rangle & \langle i|\delta\rangle\langle j|\delta\rangle \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

$m = n - 1 \geq 2$:

$$\begin{cases} \langle i|\alpha\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_m\xi_m + \xi_{m+1}, \\ \Phi\left(\langle i_1 \ldots i_{m+2}|\alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle\right) = \begin{vmatrix} 1 & \langle i_1|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_1|\alpha_{m+1}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \langle i_{m+2}|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_{m+2}|\alpha_{m+1}\rangle \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$

Расширение понятия ФС на полиметрические ФС вполне оправданно, когда каждой паре $i \times \alpha \in \mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется совокупность s вещественных чисел $\langle i|\alpha\rangle = f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in \mathbb{R}^s$.

для $n=1$, то есть ФС ранга $(2,2)$:

$$f^1 = x_1 + \xi_1, \;\; f^2 = x_2 + \xi_2;$$

$$f^1 = (x_1 + \xi_2)x_2, \;\; f^2 = (x_1 + \xi_1)\xi_2;$$

для $n=2$, то есть ФС ранга $(3,2)$:

$$f^1 = x_1\xi_1 + \varepsilon x_2\xi_2 + \xi_3, \;\; f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1 + \xi_4, \;\; \varepsilon = 0, \pm 1;$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + \xi_3, \;\; f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1^c + \xi_4, \; c \neq 1;$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + \xi_3, \;\; f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1^2 + x_1^2\xi_1^2 \ln|\xi_1| + \xi_4;$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_3, \;\; f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_4;$$

Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$

Расширение понятия ФС на полиметрические ФС вполне оправданно, когда каждой паре $i \times \alpha \in \mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется совокупность s вещественных чисел $\langle i|\alpha\rangle = f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \dots, f^s(i\alpha)) \in \mathbb{R}^s$.

для $n = 1$, то есть ФС ранга $(2, 2)$:

$$f^1 = x_1 + \xi_1, \ f^2 = x_2 + \xi_2;$$
$$f^1 = (x_1 + \xi_2)x_2, \ f^2 = (x_1 + \xi_1)\xi_2;$$

для $n = 2$, то есть ФС ранга $(3, 2)$:

$$f^1 = x_1\xi_1 + \varepsilon x_2\xi_2 + \xi_3, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1 + \xi_4, \ \varepsilon = 0, \pm 1;$$
$$f^1 = x_1\xi_1 + \xi_3, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1^c + \xi_4, \ c \neq 1;$$
$$f^1 = x_1\xi_1 + \xi_3, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1^2 + x_1^2\xi_1^2 \ln|\xi_1| + \xi_4;$$
$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_3, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_4;$$

Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$

Расширение понятия ФС на полиметрические ФС вполне оправданно, когда каждой паре $i \times \alpha \in \mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется совокупность s вещественных чисел $\langle i|\alpha\rangle = f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in \mathbb{R}^s$.

для $n = 1$, то есть ФС ранга $(2, 2)$:

$$f^1 = x_1 + \xi_1, \;\; f^2 = x_2 + \xi_2;$$
$$f^1 = (x_1 + \xi_2)x_2, \;\; f^2 = (x_1 + \xi_1)\xi_2;$$

для $n = 2$, то есть ФС ранга $(3, 2)$:

$$f^1 = x_1\xi_1 + \varepsilon x_2\xi_2 + \xi_3, \;\; f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1 + \xi_4, \;\; \varepsilon = 0, \pm 1;$$
$$f^1 = x_1\xi_1 + \xi_3, \;\; f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1^c + \xi_4, \; c \neq 1;$$
$$f^1 = x_1\xi_1 + \xi_3, \;\; f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1^2 + x_1^2\xi_1^2 \ln|\xi_1| + \xi_4;$$
$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_3, \;\; f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_4;$$

Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$

для $n = 3$, то есть ФС ранга $(4, 2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^1 = \frac{(x_1\xi_1+\varepsilon x_2\xi_2+\xi_3)(x_1+\xi_5)-\varepsilon(x_1\xi_2+x_2\xi_1+\xi_4)(x_2+\xi_6)}{(x_1+\xi_5)^2-\varepsilon(x_2+\xi_6)^2} \\ \\ f^2 = \frac{(x_1\xi_1+\varepsilon x_2\xi_2+\xi_3)(x_2+\xi_6)-(x_1\xi_2+x_2\xi_1+\xi_4)(x_1+\xi_5)}{(x_1+\xi_5)^2-\varepsilon(x_2+\xi_6)^2} \end{array} \right. ,$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$;

$$f^1 = \frac{x_1\xi_1 + \xi_3}{x_1 + \xi_5}, \ f^2 = \frac{x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6}{x_1 + \xi_5};$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_3 + \xi_5, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6;$$

для $n = 4$, то есть ФС ранга $(5, 2)$:

$$f^1 = \frac{x_1\xi_1 + x_2\xi_3 + \xi_5}{x_1\xi_8 + x_2 + \xi_7}, \ f^2 = \frac{x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6}{x_1\xi_8 + x_2 + \xi_7}.$$

Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$

для $n = 3$, то есть ФС ранга $(4, 2)$:

$$\begin{cases} f^1 = \dfrac{(x_1\xi_1+\varepsilon x_2\xi_2+\xi_3)(x_1+\xi_5)-\varepsilon(x_1\xi_2+x_2\xi_1+\xi_4)(x_2+\xi_6)}{(x_1+\xi_5)^2-\varepsilon(x_2+\xi_6)^2} \\ f^2 = \dfrac{(x_1\xi_1+\varepsilon x_2\xi_2+\xi_3)(x_2+\xi_6)-(x_1\xi_2+x_2\xi_1+\xi_4)(x_1+\xi_5)}{(x_1+\xi_5)^2-\varepsilon(x_2+\xi_6)^2} \end{cases},$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$;

$$f^1 = \frac{x_1\xi_1 + \xi_3}{x_1 + \xi_5}, \quad f^2 = \frac{x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6}{x_1 + \xi_5};$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_3 + \xi_5, \quad f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6;$$

для $n = 4$, то есть ФС ранга $(5, 2)$:

$$f^1 = \frac{x_1\xi_1 + x_2\xi_3 + \xi_5}{x_1\xi_8 + x_2 + \xi_7}, \quad f^2 = \frac{x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6}{x_1\xi_8 + x_2 + \xi_7}.$$

Физические структуры ранга $(2,2)$

Ионин В.К. используя алгебраическую систему аксиом показал эквивалентность класса ФС ранга $(2,2)$ классу всех *групп* — $\langle B; \cdot, ^{-1} \rangle$. В этом случае функция f записывается через групповую операцию $f(x,y) = \langle i|\alpha\rangle = x \cdot y$, а функция g в виде $g(x,y,z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$ так, что справедливо тождество $\langle i|\alpha\rangle = \langle i|\beta\rangle \cdot \langle j|\beta\rangle^{-1} \cdot \langle j|\alpha\rangle$.

Однометрические физические структуры ранга (2,2). Над $B = \mathbb{R}$ можно построить только одну локально неизоморфную группу — аддитивную группу $\mathbb{R}$.

Двуметрические физические структуры ранга (2,2). Над $B = \mathbb{R}^2$ таких локально неизоморфных групп уже две, причем они построены при помощи прямого $G_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и полупрямого произведения $G_2 = \mathbb{R} \rightthreetimes \mathbb{R}_0$, где $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \triangleleft G_2$.

Физические структуры ранга $(2,2)$

$$G_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R};$$

$(x_1, x_2)^a = (x_1 + x_2 a, x_2)$, тогда $G_2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}_0$

$$G_2(x, y) = (x_1 + y_1 + x_2 y_3, x_2 + y_2, x_3 y_3);$$

$$(x_1, x_2)^a = (a x_1, a(x_2 - x_1 \ln |a|)) \;\Rightarrow$$
$$G_3(x, y) = (x_3 y_1 + x_1, x_3(y_2 - y_1 \ln |x_3|) + x_2, x_3 y_3);$$

$$(x_1, x_2)^a = (a x_1, a^p x_2) \;\Rightarrow$$
$$G_4(x, y) = (x_3 y_1 + x_1, x_3^p y_2 + x_2, x_3 y_3);$$

$$(x_1, x_2)^a = ((x_1 \cos(a) - x_2 \sin(a)) e^{\gamma a}, (x_1 \sin(a) + x_2 \cos(a)) e^{\gamma a}) \;\Rightarrow$$
$$G_5(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} ((x_1 \cos(y_3) - x_2 \sin(y_3)) \exp(\gamma y_3) + y_1 \\ (x_1 \sin(y_3) + x_2 \cos(y_3)) \exp(\gamma y_3) + y_2, x_3 + y_3) \end{array} \right. ;$$

$$G_6 \approx SO(3),$$
$$G_7 \approx SL(2, \mathbb{R}).$$

Если физическую структуру ранга $(2,2)$ можно построить над алгебраической системой с одной бинарной операцией — группой, то для построения ФС ранга $(3,2)$ требуется более богатая алгебраическая система. Из работ Михайличено Г.Г. известно, что над полем вещественных чисел можно построить ФС ранга $(3,2)$ с функцией

$$f(i,\alpha) = x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha.$$

Поле

F — поле $\langle F; \cdot, +, ^{-1}, - \rangle$, с аксиомами:
A1. $\langle F; +, - \rangle$ — абелева группа с нейтральным элементом $\{0\} \in F$,
A2. $\langle F^*; \cdot, ^{-1} \rangle$ — абелева группа с нейтральным элементом $\{1\} \in F$,
A3. правосторонняя дистрибутивность $(x+y)z = xz + yz$,
A4. левосторонняя дистрибутивность $x(y+z) = xy + xz$, $x, y, z \in F$.

От полей к правым почтиобластям

Тело

A2. $\langle F^*; \cdot, ^{-1} \rangle$ — (абелева) группа с нейтральным элементом $\{1\} \in F$.

Почти–поле

A4. левосторонняя дистрибутивность $x(y+z) \neq xy + xz$, $x, y, z \in F$.

Почтиобласть

A1. $\langle F; +, - \rangle$ — (абелева группа) лупа с нейтральным элементом $\{0\} \in F$;
A1.2. $a + b = 0 \Rightarrow b + a = 0$;
A1.3. $(\forall a, b \in F)(\exists\, r_{a,b} \in F^*) \quad (x + a) + b = x \cdot r_{a,b} + (a + b)$ для любого $x \in F$;
A3.2. $(\forall x \in F) \quad x \cdot 0 = 0$.

От полей к правым почтиобластям

Тело

A2. $\langle F^*; \cdot, ^{-1} \rangle$ — (абелева) группа с нейтральным элементом $\{1\} \in F$.

Почти–поле

A4. левосторонняя дистрибутивность $x(y+z) \neq xy + xz$, $x, y, z \in F$.

Почтиобласть

A1. $\langle F; +, - \rangle$ — (абелева группа) лупа с нейтральным элементом $\{0\} \in F$;
A1.2. $a + b = 0 \Rightarrow b + a = 0$;
A1.3. $(\forall a, b \in F)(\exists\, r_{a,b} \in F^*) \quad (x + a) + b = x \cdot r_{a,b} + (a + b)$ для любого $x \in F$;
A3.2. $(\forall x \in F) \quad x \cdot 0 = 0$.

От полей к правым почтиобластям

Тело

A2. $\langle F^*; \cdot, ^{-1} \rangle$ — (абелева) группа с нейтральным элементом $\{1\} \in F$.

Почти–поле

A4. левосторонняя дистрибутивность $x(y+z) \neq xy + xz$, $x, y, z \in F$.

Почтиобласть

A1. $\langle F; +, - \rangle$ — (абелева группа) лупа с нейтральным элементом $\{0\} \in F$;
A1.2. $a + b = 0 \Rightarrow b + a = 0$;
A1.3. $(\forall a, b \in F)(\exists\ r_{a,b} \in F^*) \quad (x + a) + b = x \cdot r_{a,b} + (a + b)$ для любого $x \in F$;
A3.2. $(\forall x \in F) \quad x \cdot 0 = 0$.

Правая Лупа

Под **правой лупой** будем понимать алгебраическую систему $\langle B; +, -, 0\rangle$ с двумя частичными бинарными операциями $(+/-) : B \times B_0 \to B$, где $B_0 = B \setminus A$, и левым нейтральным элементом — $0 \in A$, для которой выполнены тождества:
1. $(\forall x \in B_0)\ (0 + x = x)$,
2. $(\forall x \in B)\ (\forall y \in B_0)$ справедливы равенства $(x + y) - y = x$ и $(x - y) + y = x$.

Правая почтиобласть

Под **правой почтиобластью** будем понимать алгебраическую систему $\langle B; +, -, \cdot, ^{-1}, A\rangle$, в которой $\langle B; +, -, 0\rangle$ — правая лупа, $0 \in A$ и $\langle B_0; \cdot, ^{-1}\rangle$ — группа на множестве $B_0 = B \setminus A$, для которых справедливы тождества:
A1. $(\forall x \in A)(\forall y \in B_0)\ xy \in A$;
A2. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_0)(\exists\ h(y, z) \in B_0)\ (x + y)z = xh(y, z) + yz$;
A3. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_0 :\ y + z \neq 0)(\exists\ r(y, z) \in B_0)$
$(x + y) + z = xr(y, z) + (y + z)$;
A4. $(\forall x \in B)(\forall z \in B_0)(\exists\ v(z) \in B_0)\ (x + (0 - z)) + z = xv(z)$.

Правая Лупа

Под **правой лупой** будем понимать алгебраическую систему $\langle B; +, -, 0\rangle$ с двумя частичными бинарными операциями $(+/-) : B \times B_0 \to B$, где $B_0 = B \setminus A$, и левым нейтральным элементом — $0 \in A$, для которой выполнены тождества:
1. $(\forall x \in B_0)\ (0 + x = x)$,
2. $(\forall x \in B)\ (\forall y \in B_0)$ справедливы равенства $(x + y) - y = x$ и $(x - y) + y = x$.

Правая почтиобласть

Под **правой почтиобластью** будем понимать алгебраическую систему $\langle B; +, -, \cdot, ^{-1}, A\rangle$, в которой $\langle B; +, -, 0\rangle$ — правая лупа, $0 \in A$ и $\langle B_0; \cdot, ^{-1}\rangle$ — группа на множестве $B_0 = B \setminus A$, для которых справедливы тождества:
A1. $(\forall x \in A)(\forall y \in B_0)\ xy \in A$;
A2. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_0)(\exists\ h(y, z) \in B_0)\ (x + y)z = xh(y, z) + yz$;
A3. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_0 :\ y + z \neq 0)(\exists\ r(y, z) \in B_0)$ $(x + y) + z = xr(y, z) + (y + z)$;
A4. $(\forall x \in B)(\forall z \in B_0)(\exists\ v(z) \in B_0)\ (x + (0 - z)) + z = xv(z)$.

Правая почтиобласть

Если определить операцию $L : B_0 \to B_0$ для которой справедливо $L(x) + x = 0$, тогда в правой почтиобласти выполнено:

1. $0 \cdot x = 0$;
2. $(x + y) \cdot z = x \cdot EL(y) \cdot L(y \cdot z) + y \cdot z$;
3. $x - y = x \cdot EL^2(y) \cdot y + L(y)$;
4. $(x + (0 - z)) + z = x \cdot EL^2(z) \cdot z$:
5. $(x + y) + z = x \cdot (L(z) - y)^{-1} \cdot L(y + z) + (y + z)$,

где $E(x) = x^{-1}$ для $x \in B_0$.

Над правой почтиобластью, при помощи функции $f(x,y,z) = x\cdot(y-z)+z$ можно построить группу с умножением:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1,y_1,y_2) \\ f(x_2,y_1,y_2) \end{pmatrix},$$

тогда функцию g для ФС ранга (3,2) можно записать в виде:

$$\langle i|\alpha\rangle = \langle i|\beta\rangle \begin{pmatrix} \langle j|\beta\rangle \\ \langle k|\beta\rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle j|\alpha\rangle \\ \langle k|\alpha\rangle \end{pmatrix}.$$

ФС ранга (3,2) над правыми почтиобластями

Решение 1

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + \varepsilon x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (\varepsilon = -1, 0, 1),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Решение 2

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^c), \quad c \in [0; 1),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Решение 3

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^2 + (x_1 - 1) x_1 y_1^2 \ln |y_1|),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2 x_1 y_1 \ln |y_1|).$$

Решение 4

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (y_1 x_2 - x_1 y_2, (y_1 x_2 - x_1 y_2) \frac{y_2}{y_1} - \frac{x_1}{y_1}).$$

ФС ранга (3,2) над правыми почтиобластями

В приведённых примерах левая обратная $L(x) = (-1, 0) \cdot (x_1, x_2)$.
Если рассмотреть $L(x) = (x_1, x_2) \cdot (-1, 0)$, тогда

Решение 2'

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 {y_1}^c), \quad c \in [0; 1),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2\tfrac{x_1 y_2}{y_1}).$$

Решение 3'

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^2 + (x_1 - 1) x_1 y_1^2 \ln |y_1|),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2\tfrac{x_1 y_2}{y_1}).$$

Решение 4'

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (y_1 x_2 + x_1 y_2, (y_1 x_2 + x_1 y_2)\tfrac{y_2}{y_1} - \tfrac{x_1}{y_1}).$$

Из приведённых примеров видна неоднозначность выбора неизоморфных алгебраических систем, над которыми можно построить одну и ту–же ФС. Но имеется один инвариант. Построим унарную операцию $\varphi_2 : B \to B$ в виде $\varphi_2(x) = x(0-e)+e = xa+e$, для которой справедливы тождества

$$\varphi_2^2(x) = x.$$

$$\varphi_2(\varphi_2(x)\varphi_2(y)) = \varphi_2(x\varphi_2(y^{-1}))y.$$

Тогда функцию f ФС ранга $(3,2)$ можно записать в виде:

$$f_{(3,2)}(x,y_1,y_2) = x(y_1-y_2)+y_2 = \varphi_2(x\varphi_2(y_1y_2^{-1}))y_2.$$

Теорема. Правая почтиобласть и алгебраическая система $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, A\rangle$ рационально эквивалентны.

Если в алгебраической системе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2 \rangle$ имеется такая унарная операция φ_3, для которой выполнено

$$\varphi_3(\varphi_3(x)\varphi_3(y)) = \varphi_3(x\varphi_3(y^{-1}))y.$$

и справедливо тождество $\varphi_3\varphi_2\varphi_3 = \varphi_2\varphi_3\varphi_2$, тогда можно построить функцию

$$f_{(4,2)}(x, y_1, y_2, y_3) = \varphi_3\left(f_{(3,2)}(x, \varphi_3(y_1 y_3^{-1}), \varphi_3(y_2 y_3^{-1}))\right) y_3,$$

при помощи которой строится групповое умножение вектор–столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{(4,2)}(x_1, y_1, y_2, y_3) \\ f_{(4,2)}(x_2, y_1, y_2, y_3) \\ f_{(4,2)}(x_3, y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix}.$$

Над произвольным полем существует такая функция $\varphi_3(x) = \frac{x-1}{x}$. Расширяя бинарную мультипликативную операцию $0x = 0$, $x0 = \varphi_2(x)$, $\infty x = \infty$, $x\infty = \varphi_3(x)$, при помощий функции $f_{(4,2)}$ над расширенным полем получим группу проективных преобразований расширенного поля.

Аналогичная ситуация повторяется при построении ФС ранга $(n+1,2)$, т.е., если в алгебраической системе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\rangle$ имеется такая унарная операция φ_n для которой выполнено

$$\varphi_n(\varphi_n(x)\varphi_n(y)) = \varphi_n(x\varphi_n(y^{-1}))y.$$

и справедливы тождества $\varphi_n\varphi_i\varphi_n = \varphi_i\varphi_n\varphi_i$, для $i \in \{2, \dots, n-1\}$, тогда можно построить функцию

$$f_{(n+1,2)}(x, y_1, \dots, y_n) = \varphi_n\left(f_{(n,2)}(x, \varphi_n(y_1 y_n^{-1}), \dots, \varphi_n(y_{n-1}y_n^{-1}))\right) y_n,$$

при этом отображение $\sigma_i = \varphi_i\varphi_2\varphi_i$, для $i \in \{3, \dots, n-1\}$, на мультипликативной группе $(B_0, \cdot, ^{-1})$ задаёт её автоморфизм $\sigma_i(x) \cdot \sigma_i(y) = \sigma_i(x \cdot y)$, при этом $\varphi_i = \sigma_i\varphi_2\sigma_i$.

При помощи функции $f_{(n+1,2)}$ можно построить групповое умножение вектор–столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{(n+1,2)}(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_{(n+1,2)}(x_n, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

и, соответственно, при помощи функции

$$\langle i|\alpha\rangle = f_{(n+1,2)}(x_i, y_1(\alpha), \dots, y_n(\alpha)),$$

построить тождество — функцию g:

$$\langle i_0|\alpha\rangle = \langle i_0|\beta\rangle \begin{pmatrix} \langle i_1|\beta\rangle \\ \vdots \\ \langle i_n|\beta\rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle i_1|\alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle i_n|\alpha\rangle \end{pmatrix}.$$

Матричную группу $\boldsymbol{GL}(n, F)$ можно записать и при помощи правой почтиобласти с группой $B_0 = F^* \leftthreetimes F^{n-1}$, определённой в виде

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2, \ldots, x_1 y_n + x_n)$$

при $x_1, y_1 \in F^*, x_i, y_i \in F$ и функциями φ_i задающими перестановку первого и i–того элементов

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots) = (x_i, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_1, \ldots).$$

Аксиомы, таким образом определённой правой почтиобласти степени n, будут выполнены, если рассматривать элементы не только из произвольного поля F, но и из тела.

В данном представлении матричной группы легко увидеть, что произведение матриц $n \times n$ легко распараллеливается на n независимых процессов.

Обобщённое матричное умножение

В качестве произведения двух матриц $A = ||a_{ij}||$ и $C = ||c_{jk}||$ будем рассматривать матрицу $D = ||d_{ik}||$, построенную при помощи функции $f : \mathfrak{S}_f \to B$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq B^m \times B^n$. При этом перемножаться могут матрицы размера $n \times m$, где n — число строк, m — число столбцов матрицы. Элемент d_{ij}, стоящий в i – той строке и j – том столбце, есть функция f от m элементов i – той строки матрицы A и n элементов j – того столбца матрицы C:

$$d_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}, c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj}).$$

В матрице $A \in B^{nm}$ для обозначения i – той строки будем писать A_{i*}, а для обозначения j – того столбца будем писать A_{*j}. В этих обозначениях элемент d_{ij} можно записать в виде произведения строки на столбец:

$$d_{ij} = A_{i*}C_{*j}.$$

Определим множество всех строк — $\{A_{i*} | A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}\} = \mathfrak{S}_{B^m}$ и множество всех столбцов — $\{A_{*j} | A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}\} = \mathfrak{S}_{B^n}$.
Для произвольной матрицы $A \in B^{mn}$ можно рассмотреть матрицы A^i_j и A^{rs}, отличающиеся от исходной только перестановкой двух строк i и j или перестановкой двух столбцов r и s соответственно.

Обобщённое матричное умножение

Потребуем, чтобы в множестве всех матриц размера B^{nm} существовало подмножество матриц $\mathfrak{S}_{B^{nm}}$, для которых данное умножение было групповым. Усиливая данное требование, будем считать, что четверка $(B,(m,n),f,\mathfrak{S}_{B^{nm}})$ задаёт обобщённое матричное умножение, если справедливы аксиомы:

A1. $(\forall A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}),(\forall D_{*j} \in \mathfrak{S}_{B^{n}}),(\exists! C_{*j} \in \mathfrak{S}_{B^{n}}) : AC_{*j} = D_{*j}$;

A2. $(\forall C \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}),(\forall D_{i*} \in \mathfrak{S}_{B^{m}}),(\exists! A_{i*} \in \mathfrak{S}_{B^{m}}) : A_{i*}C = D_{i*}$;

A3. $(\forall A,C,D \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}) : (AC)D = A(CD)$;

A4. $(\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}) : A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}} \Leftrightarrow A^{i}_{j} \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}$;

A5. $(\forall i,j \in \{1,2,\ldots,m\}) : A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}} \Leftrightarrow A^{ij} \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}$.

Два обобщенных матричных умножения $(B,(n,m),f,\mathfrak{S}_{B^{nm}})$ и $(C,(n,m),g,\mathfrak{S}_{C^{nm}})$ естественно считать эквивалентными, если они задают изоморфные матричные группы.

Обобщённое матричное умножение

Если определено обобщённое матричное умножение $(B, (m, n), f, \mathfrak{S}_{B^{nm}})$, то над множеством B определена и ФС ранга $(n+1, m+1)$. Действительно, если определить $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{B^m}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}_{B^n}$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}^{n+1}} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{S}_{B^{nm}}$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}^{m+1}} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{S}_{B^{nm}}$, тогда для произвольных $\langle A_{0*}, A_{1*}, \ldots, A_{n*}| \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{S}_{B^{mn}} \subseteq \mathfrak{M}^{n+1}$ и произвольных $|C_{*0}, C_{*1}, \ldots, C_{*m}\rangle \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{S}_{B^{mn}} \subseteq \mathfrak{N}^{m+1}$ справедливо тождество

$$\langle A_{0*} C_{*0}\rangle = \langle A_{0*} C\rangle \langle AC\rangle^{-1} \langle AC_{*0}\rangle.$$

При этом строки A_{i*} составляют матрицу A, а столбцы C_{*j} — матрицу C. Результатом умножения строки на матрицу $A_{0*}C$ будет строка, а результатом умножения матрицы на столбец AC_{*0} будет столбец.

Пример обобщённого матричного умножения

В качестве примера, можно рассмотреть второе однометрическое решение ФС ранга $(n+1, n+1)$ с функцией f, записанной в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\mu=1}^{n-1} (x_\mu - x_n)(y_\mu - y_n) + x_n + y_n.$$

Такую матричную группу можно записать и при помощи обычного матричного умножения, построенную над матрицами:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \cdots & x_{(n-1)(n-1)} & x_{(n-1)n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x_{n1} & \cdots & x_{n(n-1)} & x_{nn} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим ещё, что любая ФС ранга $(n+1, m+1)$ над множеством B, задаваемая соответствующим обобщённым матричным умножением, представима как ФС ранга $(n+1, 2)$ или $(2, m+1)$ над множеством B^m или B^n соответственно.

Геометрии как физические структуры на одном множестве

Существует гладкое двумерное многообразие $\mathfrak{N}$, открытое и плотное подмногообразие $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}} \subseteq \mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$. Также существует достаточно гладкая невырожденная функция $f : \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}} \to \mathbb{R}$, которую будем называть метрической функцией, гладкая функция шести переменных $\Phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$. Если для любого кортежа из четырёх произвольных точек $\langle xyzu \rangle$, каждая пара которого принадлежит множеству $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$, имеет место функциональная связь:

$$\Phi(f(xy), f(xz), f(xu), f(yz), f(yu), f(zu)) = 0,$$

тогда метрическая функция f на многообразии $\mathfrak{N}$ будет задавать двумерную феноменологически симметричную геометрию.

1. Плоскости Евклида: $f(xy) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$, где, например, x_1, x_2 – координаты точки x, а множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ состоит из произвольных пар точек плоскости;
2. Плоскости Минковского: $f(xy) = (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$;
3. Геометрии Римана: $f(xy) = \sin x_2 \sin y_2 \cos(x_1 - y_1) + \cos x_2 \cos y_2$;
4. Геометрии Лобачевского:
$f(xy) = \sinh x_2 \sinh y_2 \cos(x_1 - y_1) - \cosh x_2 \cosh y_2$;
5. Гиперболической геометрии:
$f(xy) = \cosh x_2 \cosh y_2 \cos(x_1 - y_1) - \sinh x_2 \sinh y_2$;
6. Симплектической плоскости: $f(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$;
7. Плоскости Гельмгольца:
$f(xy) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2] \exp\left(\gamma \mathrm{arctg} \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right)$, где постоянная $\gamma > 0$, причем функция arctg рассматривается однозначной с областью значений в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$, первые координаты которых различны;

8. Псевдогельмгольцевой плоскости:

$$f(xy) = \left[(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2\right] \exp\left(\beta \mathsf{Arc(c)th} \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right),$$

где постоянная $\beta > 0$ и $\beta \neq 2$, причем выбирается функция Arth, если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция Arcth, если аргумент по величине больше единицы, множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$, координаты которых, с одной стороны, не удовлетворяют условиям: $x_1 - y_1 = \pm(x_2 - y_2)$, а с другой стороны, $x_1 \neq y_1$;

9. Дуальногельмгольцевой плоскости: $f(xy) = (x_1 - y_1)^2 \exp\left(\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right)$, причем множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$ с различными первыми координатами;

10. Симплициальной плоскости: $f(xy) = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}$, где область определения $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ этой метрической функции состоит так же из пар точек $\langle xy \rangle$ с различными первыми координатами.

$$f_1(xy) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2;$$
$$f_2(xy) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2;$$
$$f_3(xy) = \sin x_3 \sin y_3 \left(\sin x_2 \sin y_2 \cos(x_1 - y_1) + \cos x_2 \cos y_2\right) + \cos x_3 \cos y_3;$$
$$f_4(xy) = \cosh x_3 \cosh y_3 \left(\sin x_2 \sin y_2 \cos(x_1 - y_1) + \cos x_2 \cos y_2\right) - \sinh x_3 \sinh y_3;$$
$$f_5(xy) = \sinh x_3 \sinh y_3 \left(\sin x_2 \sin y_2 \cos(x_1 - y_1) + \cos x_2 \cos y_2\right) - \cosh x_3 \cosh y_3;$$
$$f_6(xy) = \cosh x_3 \cosh y_3 \left(\cosh x_2 \cosh y_2 \cos(x_1 - y_1) - \sinh x_2 \sinh y_2\right) - \sinh x_3 \sinh$$
$$f_7(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 - y_3;$$
$$f_8(xy) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right] \exp\left(\gamma \mathrm{arctg} \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} + x_3 + y_3\right);$$
$$f_9(xy) = \left[(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2\right] \exp\left(\beta \mathrm{Arc(c)th} \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} + x_3 + y_3\right);$$
$$f_{10}(xy) = (x_1 - y_1)^2 \exp\left(\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} + x_3 + y_3\right);$$
$$f_{11}(xy) = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} \exp\left(x_3 + y_3\right);$$
$$f_{12}(xy) = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} + x_3 + y_3;$$

где, $\gamma \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\beta \neq 2$.