Знания–Онтологии–Теории (ЗОНТ–07)

Физические законы и обобщение матричного умножения

А.А. Симонов
Andrey.Simonoff@gmail.com

Аннотация. *"Теория физических структур" даёт математическое определение понятия физического закона. Исторически в определении физической структуры использовалось множество вещественных чисел. Автором предлагается формулировка аксиом физической структуры, допускающая их рассмотрение на абстрактных множествах. С одной стороны, в результате такого подхода возникает новая задача — задача поиска алгебраических систем, согласованных с требованием существования физических законов. С другой стороны, новая формулировка аксиом естественным образом вводит понятие "обобщённого матричного умножения" над рассматриваемыми алгебраическими системами.*

Поля вещественных и комплексных чисел, тело кватернионов допускают построение физических структур. Другие алгебраические системы физических структур также можно описывать в рамках двух бинарных операций, но тогда аддитивная операция уже не будет ассоциативной. Более естественное описание возникает, если рассматривать одну мультипликативную бинарную операцию с действующей на ней унарной операцией — φ. В рамках такого подхода можно построить алгебраическую систему, близкую к полю вещественных чисел с бесконечностью, в которой отсутствуют неопределенности вида ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $0/0$.

Ключевые слова

Физический закон, физическая структура, алгебраическая система, группа, точно транзитивная группа, матрица.

1 Введение

Что такое "физический закон"? Если понимать его как философскую категорию, то это "устойчивый тип отношений". Однако, что понимать под "отношениями" и, что такое "устойчивый тип"? В зависимости от конкретизации данных понятий можно рассматривать различные "физические законы". В *Теории физических структур* (ТФС) [5] дана интерпретация этих понятий и получены определенные утверждения относительно существования самих "отношений". *Теория физических структур* Ю.И. Кулакова представляет собой алгебраическую теорию метрических отношений между элементами произвольной природы, нацеленную на переосмысление законов физики. В её основе лежит *феноменологическая симметрия* физических законов. Эта теория была сформулирована Ю.И. Кулаковым в Новосибирске в 1966 году.

Перейдем к некоторым примерам, характеризующим суть проблемы. В качестве простейшего можно рассмотреть геометрию ([5], Часть 2, Глава 6, §4). Действительно, произведя экспериментальные измерения расстояний между точками, можно убедиться, лежат ли точки на одной прямой, плоскости, объеме и пр. Рассмотрим конечное множество $\mathfrak{M} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, состоящее из n произвольно расположенных в трёхмерном пространстве точек. Можно ли утверждать, что несмотря на совершенно произвольное их расположение, существует вполне определённый физический закон (то есть закон, справедливость которого может быть установлена экспериментальным путём), которому подчиняются все точки множества $\mathfrak{M}$? Чтобы обнаружить его, необходимо рассмотреть все возможные пары точек из $\mathfrak{M}$, их будет $\frac{1}{2}n(n-1)$, сопоставляя каждой паре экспериментально измеряемую величину, характеризующую взаимное расположение точек. В качестве такой, измеряемой на опыте, величины примем в простейшем случае расстояние, измеренное, например, с помощью обычной масштабной линейки.

Сопоставляя каждой паре точек (i, k) расстояние ℓ_{ik}, мы получим набор опытных данных, полностью характеризующих данное множество $\mathfrak{M}$, который может быть представлен в виде следующей симметрической матрицы:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\
\hline
i_1 & 0 & \ell_{12} & \ell_{13} & \dots & \ell_{1n} \\
i_2 & \ell_{12} & 0 & \ell_{23} & \dots & \ell_{2n} \\
i_3 & \ell_{13} & \ell_{23} & 0 & \dots & \ell_{3n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
i_n4 & \ell_{1n} & \ell_{2n} & \ell_{3n} & \dots & 0
\end{array}
\tag{1}
$$

Ясно, что взаимные расстояния $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{km}$ между *тремя* произвольными точками $i, k, m \in \mathfrak{M}$ не могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, так как при фиксированных расстояниях ℓ_{ik} и ℓ_{im}, третье расстояние ℓ_{km} может принимать различные значения от $|\ell_{ik} - \ell_{im}|$ до $\ell_{ik} + \ell_{im}$:

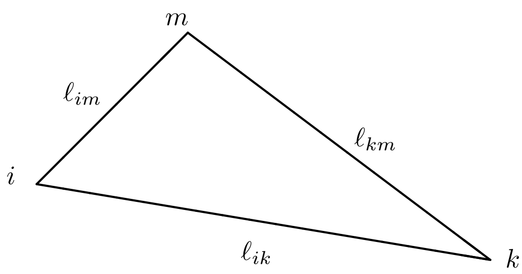

Рис. 1.

Точно так же обстоит дело, если взять *четыре* произвольные точки $i, k, m, n \in \mathfrak{M}$:

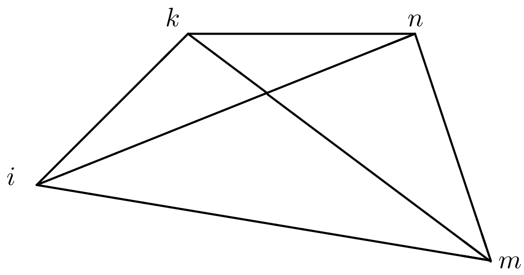

Рис. 2.

и рассмотреть зависимость между *шестью* взаимными расстояниями $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{in}, \ell_{km}$, ℓ_{kn}, ℓ_{mn}. При фиксированных пяти расстояниях $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{in}, \ell_{km}$, ℓ_{kn} шестое расстояние ℓ_{mn} может принимать различные значения из некоторого интервала.

Но если взять *пять* произвольных точек i, k, m, n, $p \in \mathfrak{M}$ (см. рис. 3), то одно из *десяти* взаимных расстояний $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{in}, \ell_{ip}, \ell_{km}, \ell_{kn}, \ell_{kp}, \ell_{mn}, \ell_{mp}, \ell_{np}$ является двузначной функцией остальных девяти.

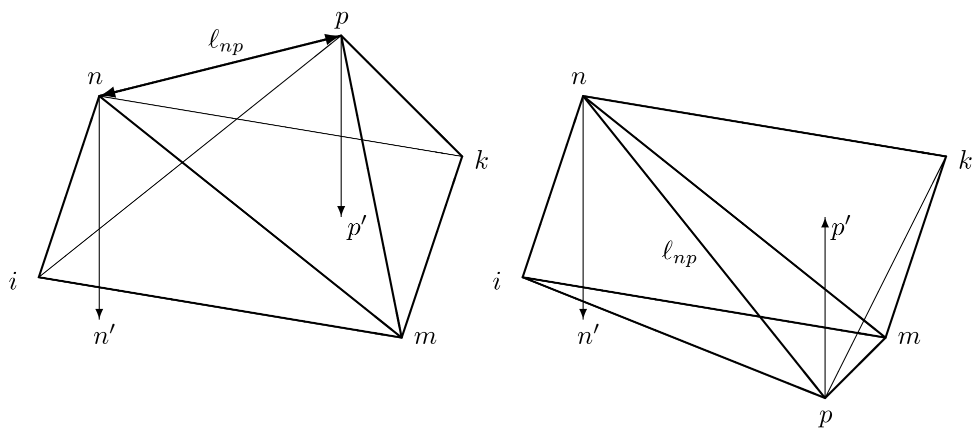

Рис. 3.

Итак, для любых пяти точек трёхмерного евклидова пространства существует функциональная связь между их взаимными расстояниями, вид которой не зависит от выбора этих точек:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ 1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ 1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ 1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ 1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Для рассмотрения более физических примеров обратимся к идее объектов разной природы в противоположность геометрии, где все точки взяты из одного множества. В этом случае, двум точкам из двух разных множеств сопоставляется измерительная процедура, некий аналог *расстояния*.

Рассмотрим пример из книги Ю.И. Кулакова ([5], Часть 2, Глава 5, §2). Возьмем три произвольных проводника $i, k, m \in \mathfrak{M}$ и два произвольных источника тока $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$. Измерим *шесть* показаний амперметра $\mathcal{J}_{i\alpha}, \mathcal{J}_{i\beta}, \mathcal{J}_{k\alpha}, \mathcal{J}_{k\beta}$, $\mathcal{J}_{m\alpha}, \mathcal{J}_{m\beta}$ по схеме:

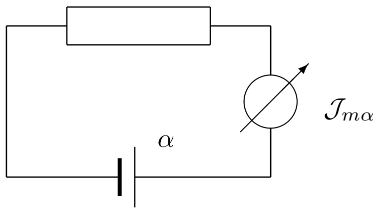

Рис. 4.

С достаточной степенью точности имеет место соотношение:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{J}_{i\alpha}\mathcal{J}_{i\beta} & \mathcal{J}_{i\alpha} & \mathcal{J}_{i\beta} \\ \mathcal{J}_{k\alpha}\mathcal{J}_{k\beta} & \mathcal{J}_{k\alpha} & \mathcal{J}_{k\beta} \\ \mathcal{J}_{m\alpha}\mathcal{J}_{m\beta} & \mathcal{J}_{m\alpha} & \mathcal{J}_{m\beta} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

из которого, используя эталонные точки $k, m \in \mathfrak{M}, \beta \in \mathfrak{N}$ легко получить хорошо известный Закон Ома для всей цепи

$$\mathcal{J}_{i\alpha} = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + r_\alpha}, \tag{4}$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ – электродвижущая сила источника тока,
R_i – сопротивление проводника,
r_α – внутреннее сопротивление источника тока.

Завершим рассмотрение примером из монографии Г.Г. Михайличенко ([12], Введение.). Рассмотрим множество состояний некоторой термодинамической системы. Каждой паре состояний $\langle ij \rangle$ сопоставим два числа, равные двум количествам тепла Q_{ij}^{TS} и Q_{ij}^{ST}, которые система отдает внешним телам при ее переходе из состояния i в состояние j сначала по изотерме ($T = const$), а затем по адиабате ($S = const$), в первом случае – процесс TS и сначала по адиабате, а затем по изотерме, во втором – процесс ST, где T – температура и S – энтропия системы.

Двухкомпонентная числовая функция $Q_{ij} = (Q_{ij}^{TS}, Q_{ij}^{ST})$ задает на плоскости (S, T) состояний термодинамической системы *двуметрическую геометрию* и является в этой геометрии некоторым аналогом *расстояния* между точками i и j. Возьмем на плоскости (S, T) *три* произвольные состояния $\langle ijk \rangle$, порядок следования которых определяется записью тройки. Тогда, дополнительно к *расстоянию* Q_{ij} можно выписать еще два Q_{ik}, Q_{jk} для пар состояний $\langle ik \rangle$ и $\langle jk \rangle$. Все три двухкомпонентных *расстояния* оказываются связанными между собой двумя тождествами

$$\begin{vmatrix} 0 & -Q_{ij}^{ST} & -Q_{ik}^{ST} \\ Q_{ij}^{TS} & 0 & -Q_{jk}^{ST} \\ Q_{ik}^{TS} & Q_{jk}^{TS} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{ij}^{TS} & Q_{jk}^{TS} & -Q_{ik}^{ST} \\ Q_{ik}^{TS} & 0 & -Q_{ik}^{ST} \\ Q_{ik}^{TS} & -Q_{ij}^{ST} & -Q_{jk}^{ST} \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

справедливыми для любой тройки состояний $\langle ijk \rangle$.

2 Предварительные замечания

Несколько слов о терминологии. Исторически использовалось понятие *физическая структура* и это было оправдано, т.к. рассматривалось только одно приложение данных структур — классификация физических законов. Но в последнее время появилось достаточно много работ в этой области, которые напрямую никак не связаны с физикой. В большей степени это исследования по геометрии [6], [8], группам [4], [15] абстрактным алгебрам [1], [17]. По этой причине использование термина *физическая структура* в настоящий момент не совсем оправданно и может вводить в заблуждение. Но продолжим его использование с учетом этого замечания.

Будем говорить, что в общем случае *физическая структура* ранга $(r+1, s+1)$, записывая её как $\boldsymbol{Ph}(r, s, B)$, где $r, s \in \mathbb{N}$, определена на множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, B, если определены такие *отображения*

$$f\colon \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to B \text{ и } g_{11}\colon B^{s+rs+r}\to B, \tag{6}$$

что для произвольных упорядоченных точек $\langle i_0, i_1, \ldots, i_r\rangle \in \Omega_{\mathfrak{M}^{r+1}} \subseteq \mathfrak{M}^{r+1}$ и $\langle \alpha_0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_s\rangle \in \Omega_{\mathfrak{N}^{s+1}} \subseteq \mathfrak{N}^{s+1}$ справедливо тождество

$$f(i_0,\alpha_0) = g_{11}\begin{pmatrix} & f(i_0,\alpha_1) & \cdots & f(i_0,\alpha_s)\\ f(i_1,\alpha_0) & f(i_1,\alpha_1) & \cdots & f(i_1,\alpha_s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f(i_r,\alpha_0) & f(i_r,\alpha_1) & \cdots & f(i_r,\alpha_s)\end{pmatrix}. \tag{7}$$

В ТФС ставится задача поиска соответствующих множеств — $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B$ и отображений — f, g_{11}. Данная задача, при некоторых дополнительных естественных ограничениях, при $B = \mathbb{R}$ и требовании, чтобы множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ являлись гладкими многообразиями, была полностью решена [11]. При этом было установлено, что решение существует не для всех рангов, так что разница $|r-s|$ может принимать только два значения 0, 1, причём $r, s \neq 0$. Кроме этого имелось два особых решения при $(r+1, s+1) = (2, 4)$ и $(4, 2)$. Во всех случаях были найдены оба отображения, f и g_{11}.

Для случаев $B = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ полной классификации решений получить не удалось и, по этой причине, исследовались толко частные случаи. Для $\boldsymbol{Ph}(1, s, \mathbb{R}^2)$ установлено, что решение существует только при $s = 1, 2, 3, 4$, найдены все возможные отображения — f [9]. Решения $\boldsymbol{Ph}(1, 1, \mathbb{R}^3)$[10], и $\boldsymbol{Ph}(1, 1, \mathbb{R}^4)$ [7] также были полностью найдены.

Поиск описанных выше решений *физической структуры* проводился именно на конкретных множествах $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, задачу можно разбить на два этапа. **Первый этап** — это поиск алгебраической системы B, на которой возможно существование решений *физической структуры* . **Второй этап** — это уже непосредственно поиск самого решения на найденной алгебраической системе. После того, как найдена алгебраическая система, её можно усиливать, налагая какие–либо дополнительные требования. Например, требуя, чтобы данная система была согласована с дифференциальной или топологической структурой. Но такое усиление, возможно, лучше проводить именно на последнем этапе.

В [16, 17] устанавливается, что $\boldsymbol{Ph}(r, s, B)$ связаны с новыми объектами — матрицами над *правыми почтиобластями* и *обобщённым матричным умножением.* В отличие от обычного матричного умножения, построенного на билинейной функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ry_r, \tag{8}$$

обобщенное матричное умножение строится на функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_r)$, в которой не обязательно выполнение равенства $r = s$. При этом, с обычным матричным умножением их связывает то, что на некотором подмножестве $\Omega_{B^{rs}} \subseteq B^{rs}$ такое обобщённое матричное произведение — групповое. Иными словами, среди всех матриц одной размерности можно выделить подмножество матриц, на котором такое произведение будет групповым.

3. Обобщенное матричное умножение

В качестве произведения двух матриц $A = ||a_{ij}||$ и $C = ||c_{jk}||$ будем рассматривать матрицу $D = ||d_{ik}||$, построенную при помощи функции $f : \Omega_{B^{1\times s}} \times \Omega_{B^{r\times 1}} \to B$, где $\Omega_{B^{1\times s}} \subseteq B^s$ и $\Omega_{B^{r\times 1}} \subseteq B^r$. При этом перемножаться могут матрицы размера $r\times s$, где r — число строк, s — число столбцов мтрицы. Под рангом матрицы будем понимать ее размер, например, *ранг матрицы* — (r, s). Элемент d_{ij}, стоящий в i – той строке и j – том столбце, есть функция f от s элементов i – той строки матрицы A и r элементов j – того столбца матрицы C:

$$d_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}, c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{rj}). \tag{9}$$

В матрице $A \in \Omega_{B^{rs}}$ для обозначения i – той строки будем писать A_{i*}, а для обозначения j – того столбца будем писать A_{*j}. В этих обозначениях элемент d_{ij} можно записать в виде произведения строки на столбец: $d_{ij} = A_{i*}C_{*j}$.

Потребуем, чтобы в множестве всех матриц размера $r \times s$ — B^{rs} существовало подмножество матриц $\Omega_{B^{rs}}$, для которых данное умножение было групповым. Усиливая данное требование, будем считать:

1. множество *всех строк* $\Big\{A_{i*}\Big| i \in \{1, 2, \ldots, r\}, A \in \Omega_{B^{rs}}\Big\} = \Omega_{B^{1\times s}}$,
2. множество *всех столбцов* $\Big\{A_{*j}\Big| j \in \{1, 2, \ldots, s\}, A \in \Omega_{B^{rs}}\Big\} = \Omega_{B^{r\times 1}}$,

а для множеств B и $\Omega_{B^{rs}}$ всегда выполняется условие: $(\forall x \in B)(\exists A \in \Omega_{B^{rs}}) : a_{ij} = x$. Если это не так, тогда всегда можно перейти к подмножеству $B_x = B \setminus \{x\}$, для которого справедливо $\Omega_{B^{rs}} \subseteq B_x^{rs} \subset B^{rs}$.

Для произвольной матрицы A можно рассмотреть матрицы $A_{i\updownarrow j}$ и $A_{m\leftrightarrow n}$, отличающиеся от исходной только перестановкой двух строк i и j или перестановкой двух столбцов m и n соответственно.

Четверка $\Big(B, (r, s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ задает обобщенное матричное умножение, если справедливы аксиомы:

A1. $(\forall A \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall D_{*j} \in \Omega_{B^r}), (\exists! C_{*j} \in \Omega_{B^r}) : AC_{*j} = D_{*j}$;

A2. $(\forall C \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall D_{i*} \in \Omega_{B^s}), (\exists! A_{i*} \in \Omega_{B^s}) : A_{i*}C = D_{i*}$;

A3. $(\forall A, C, D \in \Omega_{B^{rs}}) : (AC)D = A(CD)$;

A4. $(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}) : A \in \Omega_{B^{rs}} \Leftrightarrow A_{i\updownarrow j} \in \Omega_{B^{rs}}$;

A5. $(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}) : A \in \Omega_{B^{rs}} \Leftrightarrow A_{i\leftrightarrow j} \in \Omega_{B^{rs}}$.

Два обобщенных матричных умножения $\Big(B, (r, s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ и $\Big(C, (r, s), g,\ \Omega_{C^{rs}}\Big)$ естественно считать эквивалентными, если существует биекция $\theta : B \to C$, для которой справедливо тождество:

$$\theta\Big(f(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r)\Big) = g\Big(\theta(x_1), \ldots, \theta(x_s), \theta(y_1), \ldots, \theta(y_r)\Big). \tag{10}$$

Покажем, что если определено обобщённое матричное умножение $\Big(B, (r, s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$, то будет определена и физическая структура $\boldsymbol{Ph}(r, s, B)$. Действительно, если определить $\mathfrak{M} = \Omega_{B^{1\times s}}$, $\mathfrak{N} = \Omega_{B^{r\times 1}}$, $\Omega_{\mathfrak{M}^{r+1}} = \Omega_{B^{1\times s}} \times \Omega_{B^{rs}}$, $\Omega_{\mathfrak{N}^{s+1}} = \Omega_{B^{r\times 1}} \times \Omega_{B^{rs}}$, тогда для произвольных $\langle A_{0*}, A_{1*}, \ldots, A_{r*}\rangle \in \Omega_{B^{1\times s}} \times \Omega_{B^{rs}}$ и произвольных $\langle C_{*0}, C_{*1}, \ldots, C_{*s}\rangle \in \Omega_{B^{r\times 1}} \times \Omega_{B^{rs}}$ справедливо тождество

$$A_{0*}C_{*0} = (A_{0*}C)(AC)^{-1}(AC_{*0}). \tag{11}$$

При этом строки A_{i*} составляют матрицу A, а столбцы C_{*j} — матрицу C. Результатом умножения строки на матрицу $A_{0*}C$ будет строка, а результатом умножения матрицы на столбец AC_{*0} будет столбец. Приведённое описание, безусловно, не является доказательством. С доказательством прямого и обратного построения можно ознакомиться в [16]. Далее для обозначение матричной группы $(B, (r, s), f, \Omega_{B^{rs}})$ также будем использовать обозначение $\boldsymbol{Ph}(r, s, B)$.

В случае $C = A^{-1}$ тождество (11) превращается в тождество $A_{0*}C_{*0} = (A_{0*}A^{-1})(AC_{*0})$, из которого следует, что функция f является двухточечным инвариантом группы преобразований. Изучению этого вопроса были посвящены ряд работ Г.Г. Михайличенко [12]. Результат данных работ, с точки зрения *обобщённого матричного умножения*, можно интерпретировать как существование взаимооднозначного соответствия между функцией $f : B^s \times B^r \to B$, являющейся двухточечным инвариантом группы преобразований и группой $\boldsymbol{Ph}(r, s, B)$.

Рассмотрим частный случай обобщённого матричного умножения — умножение *вектор столбцов* — матриц ранга $(2, 1)$ [17], которые могут быть построены над алгебраической

системой $(B_2, \cdot, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$ с аксиомами:
B1. $(B_1, \cdot, ^{-1}, e_1)$ — группа, где $B_1 = B_2 \setminus \{e_2\}$,
B2. $(\forall x \in B_2)(\forall y \in B_0 = B_1 \setminus \{e_1\})\ \varphi(\varphi(x)\varphi(y)) = \varphi(x\varphi(y^{-1}))y$,
B3. $\varphi(e_1) = e_2$,
B4. $(\forall x \in B_1) \quad e_2x = e_2,\ xe_2 = \varphi(x)$,
B5. $e_2e_2 = e_1$.
Функция f, при помощи которой строится умножение матриц:

$$f(x, y_1, y_2) = \varphi(x\varphi(y_1y_2^{-1}))y_2. \tag{12}$$

При помощи произвольной биекции $L : B_1 \to B_1$ можно построить бинарную аддитивную операцию:

$$x + y = \varphi(x(L(y))^{-1})y,\ x - y = \varphi(xy^{-1})L(y), \tag{13}$$

тогда алгебраическая система $(B_2, \cdot, +, e_1, e_2)$ будет правой почтиобластью, т.к. аддитивная операция будет правой лупой, для которой справедливы тождества:
1. $(\forall x, y, z \in B_1)\ (x + y)z = xz + yz$,
2. $(\forall y, z \in B_1)(\exists! r_{y,z} \in B_1)(\forall x \in B_2)\ (x + y) + z = xr_{y,z} + (y + z)$.
Функцию f можно переписать в виде

$$f(x, y_1, y_2) = x(y_1 - y_2) + y_2,\ \text{при } y_2 \neq e_2 \text{ и } f(x, y_1, e_2) = xy_1. \tag{14}$$

Классификацию $\boldsymbol{Ph}(2, 1, \mathbb{R}^2)$ [9] можно записать в эквивалентном виде классификации алгебраической системы $(B_2, \cdot, +, e_1, e_2)$, для которой выполняется правосторонняя дистрибутивность:

Решение 1.

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1 + \varepsilon x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1),\ (\varepsilon = -1, 0, 1),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Решение 2.

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = \Big(y_1x_2 - x_1y_2, (y_1x_2 - x_1y_2)\frac{y_2}{y_1} - \frac{x_1}{y_1}\Big).$$

Решение 3.

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1^c),\ c \neq 1,$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Решение 4.

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1^2 + (x_1 - 1)x_1y_1^2 \ln|y_1|),$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2x_1y_1 \ln|y_1|).$$

В решениях 2–4 мультипликативные операции изоморфны. Во всех случаях, за исключением второго решения, нулевой элемент e_2 в мультипликативной операции — двусторонний. В решении 2 нулевой элемент только левосторонний, аддитивная операция не является лупой, но для неё справедливо тождество, характерное для луп Бола $(((z \oplus x) \oplus y) \oplus x) = (z \oplus ((x \oplus y) \oplus x))$. Лупа из решения 4 не является лупой Бола или лупой Брака, что характерно для K–луп (гирогрупп) [14].

Для построения $\boldsymbol{Ph}(r, 1, B_r)$ необходимо и достаточно, чтобы мультипликативная группа $(B_1, \cdot, ^{-1}, e_1)$ была с такой группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(B_1) > S_{r-1}$, которая с подгруппой S_{r-1} и φ порождали бы симметрическую группу $S_r = \langle \varphi, S_{r-1} \rangle$ преобразований множества $B_0 = B_1 \setminus \{e_1\}$. В этом случае, при помощи образующих группы S_r: $\varphi_2 = \varphi, \varphi_3, \ldots, \varphi_r$, для которых справедливо $\varphi_i\varphi_j\varphi_i = \varphi_j\varphi_i\varphi_j$, и $\varphi_i\varphi_i = id$ рекурентно можно построить функцию $f = f_r$:

$$f_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \varphi_n(f_{n-1}(x, \varphi_n(y_1y_n^{-1}), \ldots, \varphi_n(y_{n-1}y_n^{-1})))y_n. \tag{15}$$

Элементы $\sigma_i = \varphi_2 \varphi_i \varphi_2$ будут образующими подгруппы автоморфизмов S_{r-1}.

Запишем теперь классификацию $\boldsymbol{Ph}(r, 1, \mathbb{R}^2)$ из [9] через классификацию алгебраической системы $(B_1, \cdot, ^{-1}, \varphi, \sigma_i)$, построенной над группами:

1. $\widetilde{\mathbb{C}}$ с умножением $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1 + \varepsilon x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ при $\varepsilon = 1; 0$ и -1,
2. $\mathbb{G}$ с умножением $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2)$.

$\boldsymbol{Ph}(2, 1, \mathbb{R}^2)$ строится над алгебраическими системами:

1.) $\widetilde{\mathbb{C}}$, $\varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$.

2.) $\mathbb{G}, \varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$,

3.) $\mathbb{G}$, $c \neq 1$, $\varphi(x_1, x_2) = (\frac{1 - x_1 x_1^{\frac{c}{c-1}}}{(1 - x_1 x_1^{\frac{c}{c-1}})^c}, \frac{1 - x_2 x_1^{\frac{c}{c-1}}}{(1 - x_1 x_1^{\frac{c}{c-1}})^c})$,

4.) $\mathbb{G}$, $\varphi(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1 - 1}, \frac{x_2 - \ln|x_1|}{(x_1 - 1)^2} + \ln|\frac{x_1 - 1}{x_1}|)$.

В решениях 1 и 2 имеется автоморфизм σ_2, позволяющий построить $\boldsymbol{Ph}(3, 1, \mathbb{R}^2)$. Решение 1 при $\varepsilon = 1$ имеет второе независимое решение с изоморфной группой $\mathbb{R}^2$, задаваемой умножением $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$:

1.a.) $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2), \sigma_2(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1})$,

1.b.) $\widetilde{\mathbb{C}}$, $\varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2), \sigma_2(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2 - \varepsilon x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 - \varepsilon x_2^2})$,

2.) $\mathbb{G}, \varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \sigma_1(x_1, x_2) = (x_1, 1 - x_1 - x_2)$.

Над группой $\mathbb{R}^2$ за счет существования σ_3 можно построить $\boldsymbol{Ph}(4, 1, \mathbb{R}^2)$

1.a.) $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2), \sigma_2(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1}), \sigma_3(x_1, x_2) = (x_1 x_2^{-1}, x_2^{-1})$.

Рассмотрим теперь $\boldsymbol{Ph}(r, s, B)$ при $r, s > 1$. Очевидно, что группа $\boldsymbol{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{P})$ над полем $\mathbb{P}$ будет являться физической структурой $\boldsymbol{Ph}(n, n, \mathbb{P})$, равно как и группа $\boldsymbol{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{P}^k)$, построенная над гиперкомплексными числами ранга k с групповой мультипликативной операцией [13]. В частности, матрицы над телом кватернионов будут задавать физическую струтуру $\boldsymbol{Ph}(n, n, \mathbb{H})$ [18, 19].

В работе [11] показано, что в $\boldsymbol{Ph}(n, n, \mathbb{R})$ наряду с $\boldsymbol{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ имеется второе независимое решение, которое можно интерпретировать как обобщённое матричное умножение, задаваемое функцией

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (x_1 - x_n)(y_1 - y_n) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)(y_{n-1} - y_n) + x_n + y_n. \quad (16)$$

Подгруппа $\boldsymbol{Ph}(n-1, n, \mathbb{R}) < \boldsymbol{Ph}(n, n, \mathbb{R})$ получается из записанного выше решения, если положить $y_n = 0$. Множество всех матриц из $\boldsymbol{Ph}(n-1, n, \mathbb{R})$ будет задавать почти–кольцо.

4. Заключение

Обобщённое матричное умножение и обобщённые матричные группы $\boldsymbol{Ph}(r, s, B)$, возникшие в результате алгебраического подхода в *Теории физических структур*, находятся только на начальном этапе изучения, по этой причине приведённая выше классификация далека от завершения.

Конечно, пока рано говорить о приложениях, выходящих за рамки ТФС, тем более, что в отличие от матриц над кольцом или полем для матриц из $\boldsymbol{Ph}(r, s, B)$ можно говорить только об умножении матриц, сложение матриц не всегда определено, это связано с тем, что сложение на B в общем случае не является полугруппой. Однако, та большая роль матриц в физике элементарных частиц привела к тому, что матрицы $\boldsymbol{Ph}(n, n, \mathbb{C})$ не равные $\boldsymbol{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ при $n = 2, 3$ и 4 также нашли свое место при построении теории элементарных частиц [3], отличной от стандартной модели. Именно эти решения *Теории физических структур*, полученные Г.Г. Михайличенко, были положены в основу создаваемой Ю.С. Владимировым *реляционной теории пространства–времени и взаимодействий.*

Обратим ещё внимание на то, что среди групп $\boldsymbol{Ph}(n+1, 1, \mathbb{R}^n)$ и $\boldsymbol{Ph}(n+2, 1, \mathbb{R}^n)$ имеются группы афинных и, соответсвенно, проективных преобразований прямой ($n = 1$), плоскости ($n = 2$) и т.д. Причем, если рассматривать проективную группу преобразования прямой $\boldsymbol{Ph}(3, 1, \mathbb{R})$, тогда в качестве мультипликативной операции естественней будет рассматривать расширение мультипликативной группы $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при помощи левых ануляторов 0 и ∞ до мультипликативного группоида с тождествами:

1. $(\forall x \in \mathbb{R}_0)$ $0 \cdot x = 0, x \cdot 0 = -x + 1, \infty \cdot x = \infty, x \cdot \infty = \frac{x}{x-1}$,
2. $\infty \cdot 0 = \infty, 0 \cdot \infty = 0, \infty \cdot \infty = 1, 0 \cdot 0 = 1$.

Список литературы

[1] Бородин А.Н. Груда и группа как физическая структура. *Приложение 1. в монографии Г.Г. Михайличенко Групповая симметрия физических структур.* Барнаул: БГПУ, 2003.

[2] Витяев Е.Е. Числовое, алгебраическое и конструктивное представления одной физической структуры. *Логико-математические основы проблемы МОЗ.* Новосибирск, 1985. Вып. 107: Вычислительные системы. С. 40 – 51.

[3] Владимиров Ю.С. *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2.(Теория физических взаимодействий).* М.: Изд-во МГУ, 1996. - 262 с.

[4] Ионин В.К. Абстрактные группы как физические структуры. *Системология и методологические проблемы информационно-логических систем.* Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. С. 40 – 43.

[5] Кулаков Ю.И. *Теория физических структур.* Москва, 2004.

[6] Кыров В.А. Циклы некоторых плоскостей феноменологически симметричных геометрий. *Наука, культура, образование.* №3, 1999, с. 126 – 128.

[7] Кыров В.А. Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^4$ и их двухточечных инвариантов. *Известия вузов.* Математика (в печати).

[8] Лев В.Х. Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур. *Автореферат канд. диссертации.* – Минск, 1990, 10 с.

[9] Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры и комплексные числа. *ДАН* 1991, том 321, №4, с. 677 – 680.

[10] Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. *ДАН* 1996, том 348, №1, с. 22 – 24.

[11] Михайличенко Г.Г. *Математический аппарат теории физических структур.* Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.

[12] Михайличенко Г.Г. *Групповая симметрия физических структур.* Барнаул: БГПУ, 2003.

[13] Мурадов Р.М. Гиперкомплексные числа ранга три. *Наука, культура, образование.* 2004. №15/16. с. 107.

[14] Сабинин Л.В. О гирогруппах А. Унгара. *УМН*, 50, 1995, 5, 251-252.

[15] Симонов А.А. Групповые решения функциональных уравнений физической структуры. *Математические заметки ЯГУ*, Якутск 1998, Том 5, вып. 2, с. 52-58.

[16] Симонов А.А. Приложение 2. *в монографии Ю.И. Кулакова Теория физических структур.* Москва, 2004, 673-707.

[17] Симонов А.А. О соответствии между почтиобластями и группами. *Алгебра и Логика.* 2006, 45, 2.

[18] Фирдман И.А. Алгебраическая классификация физических структур с нулём. I. *Сиб. журнал индустриальной математики.* 2005, т. 8, №4 (24), с. 131–148.

[19] Фирдман И.А. Алгебраическая классификация физических структур с нулём. II. Топологические аспекты. *Сиб. журнал индустриальной математики.* 2006, т. 9, №1 (25), с. 135–146.