ISSN 0136—1260

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАПИСКИ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ ЛОМИ, том 127

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ. 15

«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

Ю.И.Кулаков

О ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

> Та особая цель в области теоретической физики, которая кажется мне особенно важной, состоит в логической унификации теории.
>
> Альберт Эйнштейн [I].

Среди многочисленных попыток обнаружить единую математическую структуру различных физических законов лишь одна, в какой-то степени, увенчалась успехом и может претендовать на название универсального принципа. Это - хорошо известный принцип Гамильтона, взятый в качестве объединяющего начала в фундаментальном курсе теоретической физики Ландау и Лифшица.

Что же касается более частных областей физики, то здесь найдено достаточно большое число математических структур, объединяющих между собой различные разделы физики. Так, например, еще давно обнаружена единая математическая структура электрического и магнитного поля (тензор электромагнитного поля), света и электромагнитных явлений (уравнения Максвелла), геометрии и гравитационного поля (общая теория относительности), квантовой и релятивистской механики (квантовая электродинамика) и уже совсем недавно обнаружена единая структура слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий (теория Глешоу - Вайнберга - Салама).

В I968 году мною был сформулирован новый взгляд на природу и математическую структуру фундаментальных физических законов и основных физических величин и понятий [2] - [3]. Суть его в самых общих чертах состоит в следующем.

Начиная с Галилея и по настоящее время физика, как правило, строится и излагается <u>индуктивно</u>, т.е. из огромного множества наблюдений и опытных фактов выбирается небольшое число свойств и вырабатываются основные понятия, в терминах которых формулируется физическая теория. Я предлагаю <u>дедуктивный</u> путь построения физики.

Для его реализации мною предложена некоторая чрезвычайно простая математическая схема. Эта схема оказалась весьма эффективной при установлении природы фундаментальных физических законов и введении в теорию основных физических величин и понятий и потому я назвал ее "физической структурой".

§ I. Математическая формулировка слабейшей теории физических структур

Исходными понятиями теории физических структур являются, с одной стороны, топологическое понятие многообразия, а с другой – алгебраическое понятие отношения эквивалентности между двумя кортежами конечной длины. Первое хорошо известно; поясним, что мы понимаем под вторым.

Пусть $\mathfrak{M} = \{ i, k, \dots \}$ – множество произвольной природы с элементами $i, k, \dots$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}^m$, элементами которого являются кортежи

$$< i_1, i_2, \dots, i_m > \in \mathfrak{M}^m$$

состоящие из m элементов $i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathfrak{M}$ взятых в определенном порядке.

Введем отношение эквивалентности $\equiv$ между двумя кортежами $< i_1, i_2, \dots, i_m >$ и $< k_1, k_2, \dots, k_m >$ длины m ж).

Основная идея состоит в том, чтобы каждому кортежу $< i_1, i_2, \dots, i_m >$ приписать некоторое вполне определенное число $\Delta(i_1, i_2, \dots, i_m)$ и объявить два кортежа $< i_1, i_2, \dots, i_m >$ и $< k_1, k_2, \dots, k_m >$ эквивалентными тогда и только тогда, когда равны сопоставленные им числа, т.е.

$$< i_1, i_2, \dots, i_m > \equiv < k_1, k_2, \dots, k_m > \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Delta(i_1, i_2, \dots, i_m) = \Delta(k_1, k_2, \dots, k_m).$$

Но как задать функцию $\Delta : \mathfrak{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}$? Сделаем это с помощью двух промежуточных отображений:

$$A(\varphi) : \mathfrak{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{m}{2}}$$
$$\Phi : \mathbb{R}^{\binom{m}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

где $\binom{m}{2} = \frac{1}{2} m (m-1)$

ж) Собственно говоря, введенное в этом параграфе отношение эквивалентности является одним из четырех возможных типов отношений. Мы будем называть его "сильнейшим" отношением эквивалентности, оставляя название "слабого", "сильного" и "слабейшего " для трех других типов отношений.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^{\binom{m}{2}} \arrow[dr, "\Phi"] & \\
\mathfrak{M}^m \arrow[ur, "A(\varphi)"] \arrow[rr, "\Delta"'] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Отображение $A(\varphi): \mathfrak{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{m}{2}}$ осуществляется следующим образом:

Из кортежа $< i_1, i_2, \ldots, i_m >$ выбираются (с сохранением порядка) $\binom{m}{2}$ кортежей длины 2

$$\begin{array}{l}
< i_1, i_2 > \; < i_1, i_3 > \ldots < i_1, i_m > \\
\qquad\qquad\quad < i_2, i_3 > \ldots < i_2, i_m > \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad < i_{m-1}, i_m > \; ,
\end{array}$$

а затем с помощью заранее заданной функции

$$\varphi : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

получаем нужный набор $\binom{m}{2}$ чисел, полностью характеризующий кортеж $< i_1, i_2, \ldots, i_m >$:

$$\begin{bmatrix}
\varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \varphi_{1m} \\
 & \varphi_{23} & \cdots & \varphi_{2m} \\
 & & \ldots & \ldots \\
 & & & \varphi_{m-1,m}
\end{bmatrix}$$

представляющий собой значение функции $A(\varphi): \mathfrak{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{m}{2}}$ в точке $< i_1, i_2, \ldots, i_m > \in \mathfrak{M}^m$, где $\varphi_{rs} = \varphi_{i_r i_s}$ – значение функции $\varphi : \mathfrak{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ в точке $< i_r, i_s > \in \mathfrak{M}^2$.

После этого, подставляя полученные значения $\varphi_{i_r i_s}$ в заранее заданную функцию $\Phi : \mathbb{R}^{\binom{m}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$, получаем суммарную числовую характеристику кортежа $< i_1, i_2, \ldots, i_m >$

$$\Delta \left(\mathfrak{M}^m \right) = \Phi \left(A \left(\mathfrak{M}^m \right) \right)$$

или

$$\Delta(i_1, i_2, \dots, i_m) = \Phi \begin{bmatrix} \varphi_{i_1 i_2} & \varphi_{i_1 i_3} & \dots & \varphi_{i_1 i_m} \\ & \varphi_{i_2 i_3} & \dots & \varphi_{i_2 i_m} \\ & & \dots\dots & \dots \\ & & & \varphi_{i_{m-1} i_m} \end{bmatrix}$$

где

$$\Phi \begin{bmatrix} x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1m} \\ & x_{23} & \dots & x_{2m} \\ & & \dots\dots & \dots \\ & & & x_{m-1,m} \end{bmatrix} = \Phi(x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1m};\ x_{23} \dots \dots, x_{2m}; \dots; x_{m-1,m}) \ -$$

значение функции $\Phi: \mathbb{R}^{\binom{m}{2}} \to \mathbb{R}$ в точке

$< x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1m};\ x_{23}, \dots, x_{2m}; \dots; x_{m-1,m} > \in \mathbb{R}^{\binom{m}{2}}$.

Итак, мы будем говорить, что два кортежа длины $m < i_1, i_2, \dots, i_m >$ и $< k_1, k_2, \dots, k_m >$ эквивалентны друг другу в сильнейшем смысле, т.е.

$$< i_1, i_2, \dots, i_m > \equiv < k_1, k_2, \dots, k_m > ,$$

если существует такая функция

$$\varphi: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$$

и такая достаточно гладкая функция

$$\Phi: \mathbb{R}^{\binom{m}{2}} \to \mathbb{R},$$

что имеет место равенство

$$\Phi(\varphi_{i_1 i_2}, \varphi_{i_1 i_3}, \dots, \varphi_{i_1 i_m};\ \varphi_{i_2 i_3}, \dots, \varphi_{i_2 i_m}; \dots; \varphi_{i_{m-1}, i_m}) =$$

$$= \Phi(\varphi_{k_1 k_2}, \varphi_{k_1 k_3}, \dots, \varphi_{k_1 k_m};\ \varphi_{k_2 k_3}, \dots, \varphi_{k_2 k_m}; \dots; \varphi_{k_{m-1} k_m}).$$

Понятие эквивалентности двух кортежей само по себе имеет настолько общий характер, что трудно себе представить, что здесь могут возникнуть какие-либо нетривиальные математические задачи.

Однако, соединим это, на первый взгляд, малосодержательное понятие с хорошо известным понятием многообразия – введем понятие физической структуры.

Пусть $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – многообразие размерности r. Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}^m$, элементами которого являются кортежи длины

$$\langle i_1, i_2, \ldots, i_m \rangle \in \mathfrak{M}^m.$$

Мы будем говорить, что на многообразии $\mathfrak{M}$ задана сильнейшая физическая структура ранга m, если любые два кортежа длины m эквивалентны в указанном выше смысле, т.е.

$$\forall \langle i_1, i_2, \ldots, i_m \rangle, \langle k_1, k_2, \ldots, k_m \rangle \in \mathfrak{M}^m$$

$$\langle i_1, i_2, \ldots, i_m \rangle \equiv \langle k_1, k_2, \ldots, k_m \rangle .$$

Но требование эквивалентности любых двух кортежей, состоящих из конечного числа точек многообразия, равносильно континуально-бесконечной системе функциональных уравнений относительно двух неизвестных функций φ и Φ :

$$\forall i_1, i_2, \ldots, i_m ;\; k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathfrak{M}$$

$$\Phi(\varphi(i_1, i_2), \varphi(i_1, i_3), \ldots, \varphi(i_{m-1}, i_m)) = \Phi(\varphi(k_1, k_2), \varphi(k_1, k_3), \ldots, \varphi(k_{m-1}, k_m))$$

и таким образом возникает нетривиальная математическая задача:

при заданных r и m и достаточно общих и естественных предположениях о характере функций φ и Φ (непрерывность, гладкость и т.п.) найти наиболее общий вид этих функций, обеспечивающих существование данной физической структуры.

Но прежде чем излагать результаты решения поставленной задачи, рассмотрим несколько геометрических примеров.

§ 2. Геометрические примеры

Пусть $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество точек, лежащих на прямой. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}^3$, элементами которого являются кортежи $\langle i, k, m \rangle$.

В качестве функции $\varphi : \mathfrak{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ возьмем квадрат расстояния между двумя точками i и k :

$$\varphi_{ik} = \ell_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 ,$$

где x_i – декартова координата точки i, а в качестве функции $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ примем квадрат площади треугольника S^2_{ikm}, построенного на трех точках i, k, m.

По формуле Герона

$$S_{ikm}^2 = \frac{1}{16}(l_{ik} + l_{im} + l_{km})(l_{ik} + l_{im} - l_{km})(l_{ik} - l_{im} + l_{km})(-l_{ik} + l_{im} + l_{km}) =$$

$$= -\frac{1}{2^2(2!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 \\ 1 & l_{ik}^2 & 0 & l_{km}^2 \\ 1 & l_{im}^2 & l_{km}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Но так как $\forall i, k, m \in \mathfrak{M} \quad S_{ikm}^2 = 0$, то $\forall \langle i, k, m \rangle \in \mathfrak{M}^3$

$$\Phi(\varphi_{ik}, \varphi_{im}, \varphi_{km}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi_{ik} & \varphi_{im} \\ 1 & \varphi_{ik} & 0 & \varphi_{km} \\ 1 & \varphi_{im} & \varphi_{km} & 0 \end{vmatrix}.$$

Итак, мы показали, что с помощью функций $\varphi = l^2$ и $\Phi = -16S^2$ на прямой реализуется сильнейшая физическая структура ранга 3.

Рассмотрим теперь обратную задачу: найти все функции $\varphi: \mathfrak{M}^2 \to \mathbb{R}$ и $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, реализующие на одномерном многообразии сильнейшую физическую структуру ранга 3.

Очевидно, что задача сводится к нахождению двух функций $\varphi(\xi_i, \xi_k)$ и $\Phi(u, v, w)$, удовлетворяющих следующему тождеству:

$$\forall \xi_i, \xi_k, \xi_m \in \mathbb{R}$$
$$\Phi(\varphi(\xi_i, \xi_k), \varphi(\xi_i, \xi_m), \varphi(\xi_k, \xi_m)) = 0. \qquad (I)$$

Дифференцируя тождество (I) по ξ_i, ξ_k, ξ_m, получаем следующую систему уравнений относительно неизвестных $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial w}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi(\xi_i, \xi_k)}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi(\xi_i, \xi_m)}{\partial \xi_i} + \qquad\qquad = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi(\xi_i, \xi_k)}{\partial \xi_k} + \qquad\qquad + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \cdot \frac{\partial \varphi(\xi_k, \xi_m)}{\partial \xi_k} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi(\xi_i, \xi_m)}{\partial \xi_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \cdot \frac{\partial \varphi(\xi_k, \xi_m)}{\partial \xi_m} = 0.$$

Для того, чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi(\xi_i,\xi_k)}{\partial\xi_i} & \frac{\partial\varphi(\xi_i,\xi_m)}{\partial\xi_i} & 0 \\ \frac{\partial\varphi(\xi_i,\xi_k)}{\partial\xi_k} & 0 & \frac{\partial\varphi(\xi_k,\xi_m)}{\partial\xi_k} \\ 0 & \frac{\partial\varphi(\xi_i,\xi_m)}{\partial\xi_m} & \frac{\partial\varphi(\xi_k,\xi_m)}{\partial\xi_m} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2)$$

Можно показать, что общее решение дифференциально-функционального уравнения (2) имеет вид:

$$\varphi(\xi_i, \xi_k) = f(q(\xi_i) - q(\xi_k)) ,$$

где f и q – произвольные функции одной переменной.

Назовем $x_i = q(\xi_i)$ – канонической координатой точки i. Таким образом, искомая функция пары точек $\varphi : \mathfrak{M}^2 \to \mathbb{R}$ в канонических координатах имеет вид:

$$\tilde{\varphi}(x_i, x_k) = f(x_i - x_k) .$$

Итак, мы видим, что на одномерном многообразии $\mathfrak{M}$ существует одна и только одна геометрия, в которой реализуется сильнейшая физическая структура ранга 3.

В зависимости от выбора функции f функция $\tilde{\varphi}$, играющая роль метрики, допускает различную геометрическую интерпретацию [ж)].

Рассмотрим некоторые из них:

I. $$f_1(x) = x .$$

$\varphi_{1,ik} = \lambda_{ik} = x_i - x_k$ – антисимметрическое ($\lambda_{ik} = -\lambda_{ki}$) расстояние в одномерном симплектическом пространстве

$$\Phi_1(\lambda_{ik}, \lambda_{im}, \lambda_{km}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda_{ik} & \lambda_{im} \\ 1 & -\lambda_{ik} & 0 & \lambda_{km} \\ 1 & -\lambda_{im} & -\lambda_{km} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. $$f_2(x) = x^2 .$$

ж) В дальнейшем, при написании символа $\tilde{\varphi}$ мы будем опускать знак $\sim$.

$\varphi_{2,ik} = u_{ik} = \ell_{ik}^2 = \lambda_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2$ — квадрат симметрического $(\ell_{ik} = \ell_{ki})$ расстояния между двумя точками i и k на евклидовой прямой.

$$\Phi_2(u_{ik}, u_{im}, u_{km}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & u_{ik} & u_{im} \\ 1 & u_{ik} & 0 & u_{km} \\ 1 & u_{im} & u_{km} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. $$f_3(x) = R^2 \cos\frac{x}{R}.$$

$$\varphi_{3,ik} = a_{ik} = R^2 \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} = X_i X_k + Y_i Y_k =$$

$$= X_i X_k + \eta_i \eta_k \sqrt{R^2 - X_i^2}\sqrt{R^2 - X_k^2} \quad -$$

- скалярное произведение двух евклидовых векторов длины R $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_k$

$$\vec{v} = (X, Y) = (X, \eta\sqrt{R^2 - X^2}) =$$

$$= \left(R\sin\frac{x}{R},\ R\cos\frac{x}{R}\right), \qquad \eta = \pm 1$$

$\ell_{ik} = |\lambda_{ik}|$ — симметрическое $(\ell_{ik} = \ell_{ki})$ расстояние между двумя точками i и k, лежащими на окружности $X^2 + Y^2 = R^2$ вещественного радиуса R в евклидовой плоскости;

$\frac{x_i}{R}$ — угол между вектором $\vec{v}_i$ и осью Y.

$$\Phi_3(a_{ik}, a_{im}, a_{km}) = \begin{vmatrix} R^2 & a_{ik} & a_{im} \\ a_{ik} & R^2 & a_{km} \\ a_{im} & a_{km} & R^2 \end{vmatrix} = 0$$

4. $$f_4(x) = -R^2 \operatorname{ch}\frac{x}{R}.$$

$$\varphi_{4,ik} = b_{ik} = -R^2 \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ik}}{R} = X_i X_k - Y_i Y_k =$$

$$= X_i X_k - \sqrt{R^2 + X_i^2}\sqrt{R^2 + X_k^2} \quad -$$

скалярное произведение двух псевдоевклидовых векторов $\vec{\rho_i}$ и $\vec{\rho_k}$ мнимой длины iR

$$\vec{\rho} = (X, Y) = (X, \sqrt{R^2 + X^2}) =$$
$$= \left(R\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{R},\ R\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{R}\right)$$

$\ell_{ik} = |\lambda_{ik}|$ - симметрическое ($\ell_{ik} = \ell_{ki}$) расстояние между двумя точками i и k, лежащими на окружности $X^2 - Y^2 = -R^2$ мнимого радиуса iR в псевдоевклидовой плоскости;

$\frac{x_i}{R}$ - угол между псевдоевклидовым вектором $\vec{\rho_i}$ и осью Y;

$$\Phi_4(b_{ik}, b_{im}, b_{km}) = \begin{vmatrix} -R^2 & b_{ik} & b_{im} \\ b_{ik} & -R^2 & b_{km} \\ b_{im} & b_{km} & -R^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

В отличие от одномерного пространства, которое в определенном смысле можно считать вырожденным, и в котором, благодаря этому метрики $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ функционально связаны между собой

$$(\varphi_2 = \varphi_1^2;\ \varphi_3 = R^2 \cos\frac{\varphi_1}{R};\ \varphi_4 = -R^2 \,\mathrm{ch}\,\frac{\varphi_1}{R})$$

существует целый ряд не сводимых друг к другу в этом смысле двумерных пространств.

Рассмотрим следующие четыре хорошо известные двумерные геометрии:

I. Двумерная евклидова геометрия.

Пусть $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ - множество точек, лежащих на двумерной евклидовой плоскости.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}^4$, элементами которого являются кортежи $< i, k, m, n >$.

В качестве функции $\varphi: \mathfrak{M}^2 \to \mathbb{R}$ возьмем квадрат расстояния

$$\varphi_{ik}(1) = \ell_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2,$$

где x_i, y_i - декартовы координаты точки i, а в качестве функции $\Phi: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ примем квадрат объема тетраэдра V_{ikmn}^2, построенного на четырех точках i, k, m, n:

$$V_{ikmn}^2 = \frac{1}{2^3(3!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 \\ 1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 \\ 1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 \\ 1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Но так как $\forall i, k, m, n \in \mathfrak{M}$ $V_{ikmn}^2 = 0$, то

$\forall \langle i, k, m, n \rangle \in \mathfrak{M}^4$

$$\Phi_1(\varphi_{ik}(1), \varphi_{im}(1), \varphi_{in}(1), \varphi_{km}(1), \varphi_{kn}(1), \varphi_{mn}(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi_{ik}(1) & \varphi_{im}(1) & \varphi_{in}(1) \\ 1 & \varphi_{ik}(1) & 0 & \varphi_{km}(1) & \varphi_{kn}(1) \\ 1 & \varphi_{im}(1) & \varphi_{km}(1) & 0 & \varphi_{mn}(1) \\ 1 & \varphi_{in}(1) & \varphi_{kn}(1) & \varphi_{mn}(1) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, мы показали, что с помощью функций $\varphi_{ik}(1)$ и Φ_1 на евклидовой плоскости реализуется сильнейшая физическая структура ранга 4.

2. <u>Двумерная симплектическая геометрия.</u>

Пусть $\mathfrak{M} = \{i, k, \dots\}$ – множество точек, лежащих на двумерной симплектической плоскости.

В качестве функции $\varphi: \mathfrak{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ возьмем антисимметрический "квадрат расстояния" на симплектической плоскости:

$$\varphi_{ik}(2) = v_{ik} = x_i y_k - x_k y_i ,$$

а в качестве функции $\Phi: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ следующий определитель

$$\Phi_2 = \begin{vmatrix} 0 & v_{ik} & v_{im} & v_{in} \\ -v_{ik} & 0 & v_{km} & v_{kn} \\ -v_{im} & -v_{km} & 0 & v_{mn} \\ -v_{in} & -v_{kn} & -v_{mn} & 0 \end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$\begin{vmatrix} 0 & v_{ik} & v_{im} & v_{in} \\ -v_{ik} & 0 & v_{km} & v_{km} \\ -v_{im} & -v_{km} & 0 & v_{mn} \\ -v_{in} & -v_{kn} & -v_{mn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 & 0 \\ x_k & y_k & 0 & 0 \\ x_m & y_m & 0 & 0 \\ x_n & y_n & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_k & y_m & y_n \\ -x_i & -x_k & -x_m & -x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

легко убеждаемся в существовании на двумерной симплектической плоскости сильнейшей физической структуры ранга 4, т.к.

$$\forall < i, k, m, n > \subset \mathfrak{M}^4$$

$$\Phi_2(\varphi_{ik}(2), \varphi_{im}(2), \varphi_{in}(2), \varphi_{km}(2), \varphi_{kn}(2), \varphi_{mn}(2)) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{ik}(2) & \varphi_{im}(2) & \varphi_{in}(2) \\ -\varphi_{ik}(2) & 0 & \varphi_{km}(2) & \varphi_{kn}(2) \\ -\varphi_{im}(2) & -\varphi_{km}(2) & 0 & \varphi_{mn}(2) \\ -\varphi_{in}(2) & -\varphi_{kn}(2) & -\varphi_{mn}(2) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. <u>Двумерное пространство постоянной положительной кривизны.</u>

Пусть $\mathfrak{M} = \{ i, k, \dots \}$ – множество точек, лежащих на поверхности двумерной сферы радиуса R. Пусть $\ell_{ik}^{(+)}$ – симметрическое ($\ell_{ik}^{(+)} = \ell_{ki}^{(+)}$) расстояние между точками i и k, измеренное вдоль дуги большого круга.

В качестве функции $\varphi : \mathfrak{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ возьмем

$$\varphi_{ik}(3) = a_{ik} = R^2 \cos \frac{\ell_{ik}^{(+)}}{R}$$

представляющую собой скалярное произведение

$$a_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k =$$

$$= X_i X_k + Y_i Y_k + \eta_i \eta_k \sqrt{R^2 - X_i^2 - Y_i^2} \sqrt{R^2 - X_k^2 - Y_k^2}$$

двух трехмерных евклидовых векторов $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_k$ длины R

$$\vec{r} = (X, Y, Z) = (X, Y, \eta \sqrt{R^2 - X^2 - Y^2}) =$$

$$= (R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R \cos\theta), \quad \eta = \pm 1,$$

а в качестве функции $\Phi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ следующий определитель

$$\Phi_3 = \begin{vmatrix} R^2 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ a_{ik} & R^2 & a_{km} & a_{kn} \\ a_{im} & a_{km} & R^2 & a_{mn} \\ a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & R^2 \end{vmatrix}$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$\begin{vmatrix} R^2 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ a_{ik} & R^2 & a_{km} & a_{kn} \\ a_{im} & a_{km} & R^2 & a_{mn} \\ a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & R^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 0 \\ X_k & Y_k & Z_k & 0 \\ X_m & Y_m & Z_m & 0 \\ X_n & Y_n & Z_n & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_i & X_k & X_m & X_n \\ Y_i & Y_k & Y_m & Y_n \\ Z_i & Z_k & Z_m & Z_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

убеждаемся в существовании на двумерной сфере радиуса R сильнейшей физической структуры ранга 4, т.к.

$$\forall < i, k, m, n > \in \mathfrak{M}^4$$

$$\Phi_3(\varphi_{ik}(3), \varphi_{im}(3), \varphi_{in}(3), \varphi_{km}(3), \varphi_{kn}(3), \varphi_{mn}(3)) = \begin{vmatrix} R^2 & \varphi_{ik}(3) & \varphi_{im}(3) & \varphi_{in}(3) \\ \varphi_{ik}(3) & R^2 & \varphi_{km}(3) & \varphi_{kn}(3) \\ \varphi_{im}(3) & \varphi_{km}(3) & R^2 & \varphi_{mn}(3) \\ \varphi_{in}(3) & \varphi_{kn}(3) & \varphi_{mn}(3) & R^2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны.

Пусть $\mathfrak{M} = \{ i, k, \dots \}$ – множество точек, лежащих на поверхности псевдосферы радиуса R. Пусть $\ell_{ik}^{(-)}$ – симметрическое ($\ell_{ik}^{(-)} = \ell_{ki}^{(-)}$) расстояние между точками i и k, измеренное вдоль геодезической.

В качестве функции $\varphi : \mathfrak{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ возьмем

$$\varphi_{ik}(4) = b_{ik} = -R^2 \operatorname{ch} \frac{\ell_{ik}^{(-)}}{R}$$

представляющую собой скалярное произведение

$$b_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k - Z_i Z_k =$$

$$= X_i X_k + Y_i Y_k - \sqrt{R^2 + X_i^2 + Y_i^2}\sqrt{R^2 + X_k^2 + Y_k^2}$$

двух трехмерных псевдоевклидовых векторов $\vec{\rho}_i$ и $\vec{\rho}_k$ мнимой длины iR

$$\vec{\rho}=(X,Y,Z)=(X,Y,\sqrt{R^2+X^2+Y^2})=$$

$$=(R\,\mathrm{sh}\,\theta\cos\varphi,\ R\,\mathrm{sh}\,\theta\sin\varphi,\ R\,\mathrm{ch}\,\theta),$$

а в качестве функции $\Phi: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ следующий определитель

$$\Phi_4 = \begin{vmatrix} -R^2 & b_{ik} & b_{im} & b_{in} \\ b_{ik} & -R^2 & b_{km} & b_{kn} \\ b_{im} & b_{km} & -R^2 & b_{mn} \\ b_{in} & b_{kn} & b_{mn} & -R^2 \end{vmatrix}$$

Как и в предыдущем случае, легко убедимся в существовании на псевдосфере радиуса R сильнейшей физической структуры ранга 4, т.к.

$$\forall < i,k,m,n > \in \mathfrak{M}^4$$

$$\Phi_4(\varphi_{ik}(4),\varphi_{im}(4),\varphi_{in}(4),\varphi_{km}(4),\varphi_{kn}(4),\varphi_{mn}(4))=\begin{vmatrix} -R^2 & \varphi_{ik}(4) & \varphi_{im}(4) & \varphi_{in}(4) \\ \varphi_{ik}(4) & -R^2 & \varphi_{km}(4) & \varphi_{kn}(4) \\ \varphi_{im}(4) & \varphi_{km}(4) & -R^2 & \varphi_{mn}(4) \\ \varphi_{in}(4) & \varphi_{kn}(4) & \varphi_{mn}(4) & -R^2 \end{vmatrix}=0.$$

Итак, мы видим, что в четырех различных двумерных геометриях реализуется сильнейшая физическая структура ранга 4.

Возникает естественный вопрос:
существуют ли другие функции $\varphi: \mathfrak{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ и $\Phi: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$, реализующие сильнейшую физическую структуру ранга 4 на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$?

Задача эта, несравненно более сложная чем нахождение физической структуры ранга 3 на одномерном многообразии, была полностью решена двумя различными методами Г.Г.Михайличенко [IO], [II] и В.Х.Львом.

Оказалось, что на односвязном двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ возможны девять и только девять различных не сводимых друг к другу двумерных геометрий, метрики которых реализуют сильнейшую физическую структуру ранга 4:
Это шесть известных геометрий
I. евклидова геометрия

$$\varphi_{ik}(1)=(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2$$

2. псевдоевклидова геометрия

$$\varphi_{ik}(2) = (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2$$

3. геометрия пространства постоянной положительной кривизны, реализуемая на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ вещественного радиуса R, вложенной в трехмерное евклидово пространство

$$\varphi_{ik}(3) = x_i x_k + y_i y_k + \eta_i \eta_k \sqrt{R^2 - x_i^2 - y_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2 - y_k^2}$$

4. геометрия пространства постоянной положительной кривизны, реализуемая на сфере $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ вещественного радиуса R, вложенной в трехмерное псевдоевклидово пространство

$$\varphi_{ik}(4) = x_i x_k + y_i y_k - \eta_i \eta_k \sqrt{-R^2 + x_i^2 + y_i^2}\sqrt{-R^2 + x_k^2 + y_k^2}$$

5. геометрия пространства постоянной отрицательной кривизны, реализуемая на сфере $x^2 + y^2 - z^2 = -R^2$ мнимого радиуса iR, вложенной в трехмерное псевдоевклидово пространство

$$\varphi_{ik}(5) = x_i x_k + y_i y_k - \sqrt{R^2 + y_i^2 + x_i^2}\sqrt{R^2 + x_k^2 + y_k^2}$$

6. симплектическая геометрия

$$\varphi_{ik}(6) = x_i y_k - x_k y_i$$

и три неизвестные геометрии с "экзотической" метрикой:

7. $\varphi_{ik}(7) = (x_i - x_k)^{\alpha}(y_i - y_k)^{\beta} \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \alpha \neq \beta$

8. $\varphi_{ik}(8) = \dfrac{x_i - x_k}{y_i - y_k} + \ln(y_i - y_k)$

9. $\varphi_{ik}(9) = \ln\left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] + \gamma \operatorname{arctg} \dfrac{x_i - x_k}{y_i - y_k}$.

§ 3. Физические структуры на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

До сих пор мы рассматривали отношение эквивалентности между двумя кортежами, состоящими из элементов, принадлежащих одному и тому же множеству $\mathfrak{M}$, и на основе так определенного отношения эквивалентности вводили понятие физической структуры на одном множестве.

Рассмотрим теперь отношение эквивалентности между двумя кортежами, каждый из которых состоит из m элементов, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}$ и n элементов, принадлежащих множеству $\mathfrak{N}$.

Итак, пусть $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ - два произвольные множества. Зададим два целых натуральных числа m и n и рассмотрим множество $\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$ элементами которого являются кортежи длины $m + n$

$$< i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_n > \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n .$$

Прежде всего сопоставим каждому кортежу $< i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$ число $\Delta(i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, которое, как и в случае одного множества, зададим с помощью двух промежуточных отображений:

$$A(\varphi): \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}$$
$$\Phi: \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^{mn} \arrow[dr, "\Phi"] & \\
\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \arrow[ur, "A(\varphi)"] \arrow[rr, "\Delta"'] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Отображение $A(\varphi): \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}$ осуществляется следующим образом:

из кортежа $< i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$ образуются все mn пар

$$\begin{array}{c}
< i_1, \alpha_1 > < i_1, \alpha_2 > \ldots < i_1, \alpha_n > \\
< i_2, \alpha_1 > < i_2, \alpha_2 > \ldots < i_2, \alpha_n > \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
< i_m, \alpha_1 > < i_m, \alpha_2 > \ldots < i_m, \alpha_n > ,
\end{array}$$

а затем, с помощью заранее заданной функции

$$\varphi: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

получаем нужный набор mn чисел

$$\begin{bmatrix}
\varphi_{i_1\alpha_1} & \varphi_{i_1\alpha_2} \ldots \varphi_{i_1\alpha_n} \\
\varphi_{i_2\alpha_1} & \varphi_{i_2\alpha_2} \ldots \varphi_{i_2\alpha_n} \\
\varphi_{i_m\alpha_1} & \varphi_{i_m\alpha_2} \ldots \varphi_{i_m\alpha_n}
\end{bmatrix}$$

представляющий собой значение функции $A(\varphi): \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}$ в точке $< i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_m > \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$. После этого, подставляя полученные значения $\varphi_{i_\gamma \alpha_s}$ в заранее заданную функцию

$$\Phi : \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R}$$

получаем суммарную числовую характеристику кортежа $< i_1, \ldots, i_m ; \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$

$$\Delta(\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n) = \Phi(A(\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n)).$$

Мы будем говорить, что два кортежа длины $m+n$ $< i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$ и $< k_1, \ldots, k_m; \beta_1, \ldots, \beta_n >$ эквивалентны друг другу, т.е.

$$< i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_n > \equiv < k_1, \ldots, k_m; \beta_1, \ldots, \beta_n >,$$

если существует такая функция

$$\varphi : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

и такая достаточно гладкая функция

$$\Phi : \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R},$$

что имеет место равенство

$$\Phi \begin{bmatrix} \varphi_{i_1\alpha_1} & \varphi_{i_1\alpha_2} & \ldots & \varphi_{i_1\alpha_n} \\ \varphi_{i_2\alpha_1} & \varphi_{i_2\alpha_2} & \ldots & \varphi_{i_2\alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{i_m\alpha_1} & \varphi_{i_m\alpha_2} & \ldots & \varphi_{i_m\alpha_n} \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \varphi_{k_1\beta_1} & \varphi_{k_1\beta_2} & \ldots & \varphi_{k_1\beta_n} \\ \varphi_{k_2\beta_1} & \varphi_{k_2\beta_2} & \ldots & \varphi_{k_2\beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{k_m\beta_1} & \varphi_{k_m\beta_2} & \ldots & \varphi_{k_m\beta_n} \end{bmatrix}.$$

Введем понятие физической структуры ранга (m, n) на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{ i, k, \ldots \}$ – многообразие размерности r и $\mathfrak{N} = \{ \alpha, \beta, \ldots \}$ – многообразие размерности s.

Мы будем говорить, что на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана физическая структура ранга (m, n), если любые два кортежа длины $m+n$, взятые из $\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$, эквивалентны в указанном выше смысле, т.е.

$$\forall < i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_n >, < k_1, \ldots, k_m; \beta_1, \ldots, \beta_n > \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$$

$$< i_1, \ldots, i_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_n > \equiv < k_1, \ldots, k_m; \beta_1, \ldots, \beta_n >.$$

Здесь, как и в случае физической структуры на одном многообразии $\mathfrak{M}$, требование эквивалентности двух кортежей длины $m+n$ равносильно континуально-бесконечной системе функциональных уравнений относительно двух неизвестных функций φ и Φ:

$$\forall i_1,\dots,i_m;\ k_1,\dots,k_m \in \mathfrak{M}$$
$$\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n;\ \beta_1,\dots,\beta_n \in \mathfrak{N}$$

$$\Phi(\varphi(i_1,\alpha_1),\varphi(i_1,\alpha_2),\dots,\varphi(i_m,\alpha_n))=\Phi(\varphi(k_1,\beta_1),\varphi(k_1,\beta_2),\dots,\varphi(k_m,\beta_n))$$

и таким образом, возникает следующая математическая задача:

при заданных r, s и m, n и достаточно общих и естественных предположениях о характере функций φ и Φ найти все решения, обеспечивающие существование физических структур ранга (m,n).

§ 4. Основные результаты теории физических структур на двух множествах

В этом параграфе я буду использовать результаты, полученные мною и моим учеником Г.Г.Михайличенко и приведенные в большой серии работ, посвященных созданию и разработке теории физических структур [4] - [19].

Физические структуры на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ являются новыми и далеко не тривиальными математическими объектами, представляющими собой к тому же эффективный инструмент для описания физической реальности.

Особенно интересны физические структуры ранга (m,n) на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, размерности которых равны, соответственно,

$$r \geqslant n-1 \qquad \text{и} \qquad s \geqslant m-1 .$$

В этом случае задание ранга (m,n) определяет физическую структуру (т.е. вид функций φ и Φ) по сути дела однозначно (с точностью до несущественных преобразований).

В диссертации Г.Г.Михайличенко [20] дано полное решение проблемы существования и единственности физических структур на двух многообразиях. (Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) было осуществлено мною в работе [12]; все остальные случаи рассмотрены Г.Г.Михайличенко в его диссертации).

Итак, показано, что

при $m=n=1$ существует одна тривиальная физическая структура;

при $m=n=2$ существуют две нетривиальные физические структуры, сводимые друг к другу некоторым простым преобразованием;

при $m=n \geqslant 3$ существуют две и только две несводимые друг к другу физические структуры;

показано далее, что для каждого из рангов $(m, m+1)$ и $(m+1, m)$, где $m = 1, 2, \ldots$, а также для двух особых рангов (2,4) и (4,2) существуют единственные структуры (см.рис.I). Все эти структуры найдены и их конкретный вид приведен в таблицах I,2,3; что же касается остальных рангов (на рис.I точки им соответствующие находятся в заштрихованной области), то в той же диссертации [20] показано, что физические структуры этих рангов в принципе не могут существовать.

§ 5. Физические гиперструктуры ранга (m, m) на многообразии $\mathfrak{M}$.

После того, как мы ввели понятие физической структуры на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, вернемся снова к физическим структурам на одном многообразии $\mathfrak{M}$ и введем понятие физической гиперструктуры ранга (m, m). Это понятие играет важную роль при построении различных геометрий и при изучении свойств аддитивности многих физических величин.

Пусть $\mathfrak{M} (= \{ i, k, \ldots \}$ – произвольное множество с элементами $i, k, \ldots$. Зададим целое натуральное число m и рассмотрим множество $\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{M}^m$, элементами которого являются пары кортежей длины m:

$$\ll i_1, \ldots, i_m >, < k_1, \ldots, k_m \gg \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{M}^m .$$

Как и в предыдущих случаях, сопоставим каждой паре кортежей $\ll i_1, \ldots, i_m >$, $< k_1, \ldots, k_m \gg$ число $\Delta(i_1, \ldots, i_m; k_1, \ldots, k_m)$, которое зададим с помощью двух промежуточных отображений

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^{m^2} \arrow[dr, "\Phi"] & \\ \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{M}^m \arrow[ur, "A(\varphi)"] \arrow[rr, "\Delta"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Таблица I

<u>Физические структуры ранга(m,m).</u>

Ранг	Вид функции $a:\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to\mathbb{R}$	Вид функции $\varphi:\mathbb{R}^{m^2}\to\mathbb{R}$
(1,1)	$a_{i\alpha}=0$	$\mathcal{D}_{i,\alpha}=a_{i\alpha}$
(2,2)	$a_{i\alpha}=x_i\xi_\alpha$	$\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta}=\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta}\end{vmatrix}$
	$a_{i\alpha}=x_i+\xi_\alpha$	${}^{1}\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta}\end{vmatrix}$
(3,3)	$a_{i\alpha}=x_i\xi_\alpha+y_i\eta_\alpha$	$\mathcal{D}_{ikm,\alpha\beta\gamma}=\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma}\end{vmatrix}$
	$a_{i\alpha}=x_i+\xi_\alpha+y_i\eta_\alpha$	${}^{1}\mathcal{D}_{ikm,\alpha\beta\gamma}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma}\end{vmatrix}$
(4,4)	$a_{i\alpha}=x_i\xi_\alpha+y_i\eta_\alpha+z_i\zeta_\alpha$	$\mathcal{D}_{ikmn,\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} & a_{m\delta} \\ a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\gamma} & a_{n\delta}\end{vmatrix}$
	$a_{i\alpha}=x_i+\xi_\alpha+y_i\eta_\alpha+z_i\zeta_\alpha$	${}^{1}\mathcal{D}_{ikmn,\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} & a_{m\delta} \\ 1 & a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\gamma} & a_{n\delta}\end{vmatrix}$

Таблица 2

Физические структуры ранга $(m, m+1)$ и $(m+1, m)$.

Ранг	Вид функции $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$	Вид функции $\Phi: \mathbb{R}^{m(m+1)} \to \mathbb{R}$
(1,2)	$a_{i\alpha} = x_i$	$\mathcal{D}_{i,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} \end{vmatrix}$
(2,1)	$a_{i\alpha} = \xi_\alpha$	$\mathcal{D}_{ik,\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} \\ 1 & a_{k\alpha} \end{vmatrix}$
(2,3)	$a_{i\alpha} = x_i + y_i \xi_\alpha$	$\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \end{vmatrix}$
(3,2)	$a_{i\alpha} = \xi_\alpha + x_i \eta_\alpha$	$\mathcal{D}_{ikm,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} \end{vmatrix}$
(3,4)	$a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha + z_i$	$\mathcal{D}_{ikm,\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} & a_{m\delta} \end{vmatrix}$
(4,3)	$a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha + \zeta_\alpha$	$\mathcal{D}_{ikmn,\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} \\ 1 & a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\gamma} \end{vmatrix}$

Таблица 3

Физическая структура ранга (2,4) и (4,2)

Ранг	Вид функции $a: \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} \to \mathbb{R}$	Вид функции $\Phi: \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$
(2,4)	$a_{i\alpha} = \dfrac{x_i\xi_\alpha + y_i}{\xi_\alpha + z_i}$	$\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{i\alpha}a_{k\alpha} & a_{i\beta}a_{k\beta} & a_{i\gamma}a_{k\gamma} & a_{i\delta}a_{k\delta} \end{vmatrix}$
(4,2)	$a_{i\alpha} = \dfrac{x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha}{x_i + z_\alpha}$	$\mathcal{D}_{ikmn,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\alpha}a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\alpha}a_{k\beta} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\alpha}a_{m\beta} \\ 1 & a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\alpha}a_{n\beta} \end{vmatrix}$

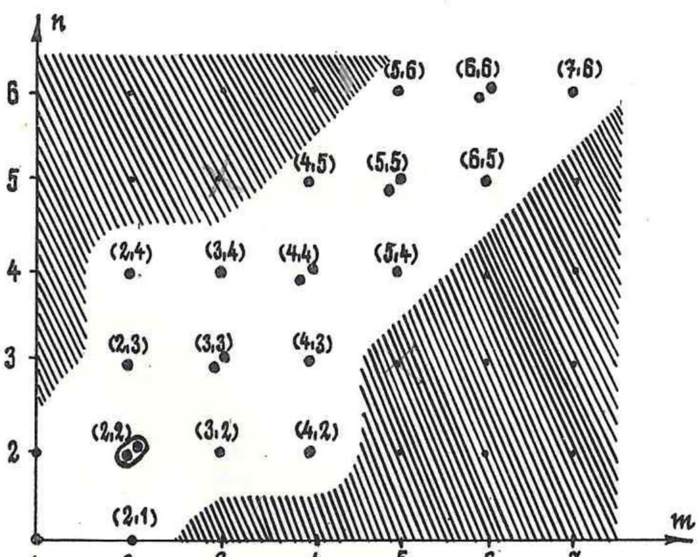

Рис. I

Ранги существующих физических структур на двух множествах

Отображение $A(\varphi): \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{M}^m \to \mathbb{R}^{m^2}$ осуществляется следующим образом:
из пары кортежей $\langle\langle i_1, \ldots, i_m \rangle, \langle k_1, \ldots, k_m \rangle\rangle$ образуем m^2 пар

$$\begin{array}{c} \langle i_1, k_1 \rangle \ \langle i_1, k_2 \rangle \ldots \langle i_1, k_m \rangle \\ \langle i_2, k_1 \rangle \ \langle i_2, k_2 \rangle \ldots \langle i_2, k_m \rangle \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle i_m, k_1 \rangle \langle i_m, k_2 \rangle \ldots \langle i_m, k_m \rangle , \end{array}$$

а затем, с помощью заранее заданной функции $\varphi: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ получаем набор m^2 чисел:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{i_1 k_1} & \varphi_{i_1 k_2} & \ldots & \varphi_{i_1 k_m} \\ \varphi_{i_2 k_1} & \varphi_{i_2 k_2} & \ldots & \varphi_{i_2 k_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{i_m k_1} & \varphi_{i_m k_2} & \ldots & \varphi_{i_m k_m} \end{bmatrix}$$

представляющий собой значение функции $A(\varphi): \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{M}^m \to \mathbb{R}^{m^2}$ в точке $\langle\langle i_1, \ldots, i_m \rangle, \langle k_1, \ldots, k_m \rangle\rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{M}^m$. После этого, подставляя полученные значения $\varphi_{i_2 k_3}$ в заранее заданную функцию

$$\Phi: \mathbb{R}^{m^2} \to \mathbb{R}$$

получаем суммарную числовую характеристику

$$\Delta(i_1, \ldots, i_m; k_1, \ldots, k_m) = \Phi \begin{bmatrix} \varphi_{i_1 k_1} & \ldots & \varphi_{i_1 k_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{i_m k_1} & \ldots & \varphi_{i_m k_m} \end{bmatrix}$$

пары кортежей $\langle\langle i_1, \ldots, i_m \rangle, \langle k_1, \ldots, k_m \rangle\rangle$.

Мы будем говорить, что две пары кортежей $\langle\langle i_1, \ldots, i_m \rangle, \langle k_1, \ldots, k_m \rangle\rangle$ и $\langle\langle p_1, \ldots, p_m \rangle, \langle q_1, \ldots, q_m \rangle\rangle$ эквивалентны друг другу, т.е.

$$\langle\langle i_1, \ldots, i_m \rangle, \langle k_1, \ldots, k_m \rangle\rangle \equiv \langle\langle p_1, \ldots, p_m \rangle, \langle q_1, \ldots, q_m \rangle\rangle,$$

если существует такая функция $\varphi: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ и такая достаточно гладкая функция $\Phi: \mathbb{R}^{m^2} \to \mathbb{R}$, что имеет место равенство

$$\Delta(i_1,\dots,i_m;k_1,\dots,k_m)=\Delta(p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_m).$$

Введем понятие физической гиперструктуры ранга (m,m) на многообразии $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M}=\{i,k,\dots\}$ – многообразие размерности r.

Мы будем говорить, что на многообразии $\mathfrak{M}$ задана физическая гиперструктура ранга (m,m), если любые две пары кортежей длины m взятые из $\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{M}^m$ эквивалентны в указанном выше смысле, т.е.

$$\forall\langle\langle i_1,\dots,i_m\rangle,\langle k_1,\dots,k_m\rangle\rangle,\langle\langle p_1,\dots,p_m\rangle,\langle q_1,\dots,q_m\rangle\rangle\in\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{M}^m$$

$$\langle\langle i_1,\dots,i_m\rangle,\langle k_1,\dots,k_m\rangle\rangle\equiv\langle\langle p_1,\dots,p_m\rangle,\langle q_1,\dots,q_m\rangle\rangle.$$

Здесь, как и в двух предыдущих случаях, требование эквивалентности двух пар кортежей длины m равносильно континуально-бесконечной системе функциональных уравнений относительно двух неизвестных функций φ и Φ, и таким образом возникает математическая задача, сходная с задачей нахождения физической структуры ранга (m,n) на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

§ 6. Физические приложения теории физических структур

А. Механика

Рассмотрим второй закон механики Ньютона в его традиционной форме:

$$ma=\mathcal{F}.$$

Входящие в него физические величины – масса m и сила $\mathcal{F}$ с одной стороны, и ускорение a с другой, имеют, вообще говоря, совершенно различную математическую природу. Так масса m зависит от ускоряемого тела i и не зависит от ускорителя α (поля или какого-либо иного ускоряющего механизма), сообщающего телу i ускорение a; сила $\mathcal{F}$, наоборот, зависит от ускорителя α и не зависит от тела i.

Что же касается ускорения a, то оно зависит как от тела i, так и от ускорителя α.

Таким образом, масса m_i является некоторой числовой функцией одной нечисловой переменной – тела i, то есть

$$m : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{M} = \{i, k, \dots\}$ – множество всех ускоряемых тел $i, k, \dots$;

сила $\mathcal{F}_\alpha$ является другой числовой функцией <u>одной</u> нечисловой переменной – ускорителя α, то есть

$$\mathcal{F} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \dots\}$ – множество всех ускорителей $\alpha, \beta, \dots$.

Ускорение же $a_{i\alpha}$ является числовой функцией <u>двух</u> нечисловых переменных – тела i и ускорителя α, то есть

$$a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Итак, специально выделяя независимые числовые переменные $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{M}$, перепишем закон Ньютона (3) в виде:

$$m_i a_{i\alpha} = \mathcal{F}_\alpha. \tag{4}$$

Таким образом, закон Ньютона в форме (4) представляет собой связь между существенно разнородными физическими величинами – одноиндексными массой m_i и силой $\mathcal{F}_\alpha$ с одной стороны и двухиндексным ускорением $a_{i\alpha}$ с другой.

Заметим, что строго говоря, единственными измеряемыми величинами в механике являются координата, скорость и ускорение. В связи с этим перепишем закон Ньютона (4) в виде, не содержащем ни массы m_i, ни силы $\mathcal{F}_\alpha$. Для этого рассмотрим два тела i и k и два ускорителя α и β. При этом будем иметь:

$$m_i a_{i\alpha} = \mathcal{F}_\alpha \qquad m_k a_{k\alpha} = \mathcal{F}_\alpha$$

$$m_i a_{i\beta} = \mathcal{F}_\beta \qquad m_k a_{k\beta} = \mathcal{F}_\beta.$$

Исключая из написанных четырех уравнений $m_i, m_k, \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta$ получаем следующее соотношение между четырьмя ускорениями:

$$a_{i\alpha} a_{k\beta} - a_{i\beta} a_{k\alpha} = 0. \tag{5}$$

Это соотношение мы будем называть феноменологически инвариантной формой закона Ньютона.

Подчеркнем, что это соотношение не содержит ничего, кроме измеряемых на опыте ускорений, и может быть подвергнуто непосредственной экспериментальной проверке.

Примечательно, что второй закон механики Ньютона, записанный в виде (5), имеет явно выраженный универсальный или, другими словами, феноменологически инвариантный характер, так как не зависит ни от выбора двух тел $i, k \in \mathfrak{M}$, ни от выбора двух ускорителей $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$, т.е.

$$\forall i, k \in \mathfrak{M}, \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N} \quad \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Заметим, что требование универсальности или, по-иному, феноменологиче логической инвариантности, является чрезвычайно жестким условием, приводящим к соотношению (5) независимо от каких-либо физических соображений.

В самом деле, каждое из ускорений $a_{i\alpha}$ зависит от тела i и ускорителя α, но существует такая функция от четырех переменных $\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta})$, которая обращается в тождественный нуль относительно переменных $i, k; \alpha, \beta$:

$$\forall i, k \in \mathfrak{M}, \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N} \quad \Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0. \tag{7}$$

С формальной стороны соотношение (7) представляет собой некоторую функциональную связь между четырьмя переменными $a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}$, каждая из которых является числовой функцией двух нечисловых переменных. Если потребовать, чтобы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ были многообразиями и чтобы связь (7) сохраняла бы свой вид при любом выборе нечисловых переменных i, k, α, β (требование феноменологической инвариантности), то, как мы покажем ниже, соотношение (5) является единственным соотношением, удовлетворяющим этому требованию. Другими словами, одно только требование инвариантности соотношения (7) относительно выбора двух элементов i, k из многообразия $\mathfrak{M}$ и двух элементов α, β из многообразия $\mathfrak{N}$ однозначно приводит к соотношению (6), являющемуся вторым законом Ньютона в феноменологически инвариантной форме.

Покажем теперь, как исходя из понятия физической структуры, чисто дедуктивным путем можно ввести понятия массы, силы, инерциальной системы отсчета и получить второй закон Ньютона, ничего не зная о природе тел и ускорителей, а допуская лишь факт существования физической структуры ранга (2,2) на множестве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и физической гиперструктуры ранга (2,2) на множестве тел $\mathfrak{M}$ и на множестве ускорителей $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим три множества:
$\mathfrak{M} = \{i, k, \dots\}$ – множество ускоряемых тел, $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \dots\}$ – множество ускорителей, т.е. множество механизмов или полей, осу-

ществляющих поступательное ускорение тел, и $\mathfrak{S} = \{\sigma, \lambda, \ldots\}$ – - множество неинерциальных систем отсчета, т.е. множество реальных физических тел, снабженных линейками и часами, поступательно движущихся относительно друг друга с произвольными скоростями и ускорениями.

Когда на тело $i \in \mathfrak{M}$ действует ускоритель $\alpha \in \mathfrak{N}$, то в системе отсчета $\sigma \in \mathfrak{S}$ оно приобретает измеряемое на опыте трехмерное [ж)]율нековариантное ускорение $\dot{v}_{i\alpha,\sigma} = \frac{d v_{i\alpha,\sigma}}{dt}$.

Чтобы измерить скорость v, достаточно взять два близких момента времени I и 2, измерить расстояние l_{12} и время t_{12} и получить приближенное значение скорости v по известной формуле $v = \frac{l_{12}}{t_{12}}$.

Чтобы измерить ускорение $\dot{v}$ необходимо взять три близких момента времени I,2 и 3, измерить два расстояния l_{12} и l_{23} и два времени t_{12} и t_{23} и получить приближенное значение ускорения $\dot{v}$ по формуле конечных разностей

$$\dot{v} = \frac{2}{t_{12} + t_{23}} \left(\frac{l_{23}}{t_{23}} - \frac{l_{12}}{t_{12}} \right).$$

Выберем одну фиксированную систему отсчета $\sigma \in \mathfrak{S}$ и рассмотрим поочередно действие всех ускорителей из $\mathfrak{N}$ на все тела из $\mathfrak{M}$. Множество всех полученных при этом поступательных ускорений $\dot{v}_{i\alpha,\sigma}$ запишем в виде следующей прямоугольной матрицы:

$$\begin{matrix} \dot{v}_{i\alpha,\sigma} & \dot{v}_{i\beta,\sigma} & \ldots & \dot{v}_{i\gamma,\sigma} & \ldots \\ \dot{v}_{k\alpha,\sigma} & \dot{v}_{k\beta,\sigma} & \ldots & \dot{v}_{k\gamma,\sigma} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot{v}_{l\alpha,\sigma} & \dot{v}_{l\beta,\sigma} & \ldots & \dot{v}_{l\gamma,\sigma} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

В этой матрице заключена вся информация о закономерностях отношений между телами и ускорителями, характеристики системы отсчета, тел и ускорителей. Вся задача состоит в том, чтобы извлечь их отсюда.

Сделаем следующие предположения:

I. множество тел $\mathfrak{M}$ и множество ускорителей $\mathfrak{N}$ являются

[ж)] Строго говоря, ускорение $\dot{v}_{i\alpha,\sigma}$ имеет три компоненты. Но чтобы не усложнять запись, мы не будем вводить еще один индекс, обозначающий номер компоненты, и под $\dot{v}_{i\alpha,\sigma}$ будем понимать одну из компонент трехмерного вектора.

некоторыми многообразиями размерности r и s;

2. на множестве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ имеет место физическая структура ранга (2,2), реализуемая через нековариантное ускорение $\dot{v}_{i\alpha,\sigma}$, играющее роль функции $\varphi: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$.

Полагая $\dot{v}_{i\alpha,\sigma} = \overline{\varphi}(x_i^1,\ldots,x_i^r;\, \xi_\alpha^1,\ldots,\xi_\alpha^s)$ сведем задачу к нахождению двух неизвестных функций:

функции $r+s$ переменных $\overline{\varphi}(x_i^1,\ldots,x_i^r;\, \xi_\alpha^1,\ldots,\xi_\alpha^s)$ и

функции четырех переменных $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4)$

удовлетворяющих следующему тождеству:

$$\Phi(\overline{\varphi}(x_i^1,\ldots,x_i^r;\, \xi_\alpha^1,\ldots,\xi_\alpha^s),\ \overline{\varphi}(x_i^1,\ldots,x_i^r;\, \xi_\beta^1,\ldots,\xi_\beta^s),$$
$$\overline{\varphi}(x_k^1,\ldots,x_k^r;\, \xi_\alpha^1,\ldots,\xi_\alpha^s),\ \overline{\varphi}(x_k^1,\ldots,x_k^r;\, \xi_\beta^1,\ldots,\xi_\beta^s)) \equiv 0. \tag{7'}$$

Ограничимся случаем, когда $r = s = 1$. При этом тождество (7) примет вид:

$$\Phi(\overline{\varphi}(x_i^1,\xi_\alpha^1), \overline{\varphi}(x_i^1,\xi_\beta^1), \overline{\varphi}(x_k^1,\xi_\alpha^1), \overline{\varphi}(x_k^1,\xi_\beta^1)) \equiv 0. \tag{8}$$

Дифференцируя тождество (8) по $x_i^1, x_k^1, \xi_\alpha^1, \xi_\beta^1$ получим следующую систему линейных уравнений относительно четырех неизвестных $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_4}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i}(x_i,\xi_\alpha) + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i}(x_i,\xi_\beta) &&= 0\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_k}(x_k,\xi_\alpha) + \frac{\partial\Phi}{\partial u_4}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_k}(x_k,\xi_\beta) &&= 0\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial \xi_\alpha}(x_i,\xi_\alpha) + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial \xi_\alpha}(x_k,\xi_\alpha) &&= 0\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial \xi_\beta}(x_i,\xi_\beta) + \frac{\partial\Phi}{\partial u_4}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial \xi_\beta}(x_k,\xi_\beta) &&= 0.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_i^1}(x_i^1,\xi_\alpha^1) & \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_i^1}(x_i^1,\xi_\beta^1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_k^1}(x_k^1,\xi_\alpha^1) & \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_k^1}(x_k^1,\xi_\beta^1) \\ \frac{\partial\bar\varphi}{\partial \xi_\alpha^1}(x_i^1,\xi_\alpha^1) & 0 & \frac{\partial\bar\varphi}{\partial \xi_\alpha^1}(x_k^1,\xi_\alpha^1) & 0 \\ 0 & \frac{\partial\bar\varphi}{\partial \xi_\beta^1}(x_i^1,\xi_\beta^1) & 0 & \frac{\partial\bar\varphi}{\partial \xi_\beta^1}(x_k^1,\xi_\beta^1) \end{vmatrix} = 0 . \tag{9}$$

[12]

Можно показать, что общее решение дифференциально-функционального уравнения (9) имеет вид:

$$\bar\varphi(x_i^1,\xi_\alpha^1) = \chi(p(x_i^1)\cdot q(\xi_\alpha^1)) = \varphi(x_i,\xi_\alpha) = \chi(x_i\cdot\xi_\alpha),$$

где χ – произвольная функция одной переменной, имеющая обратную χ^{-1};

$x_i = p(x_i^1)$, $\xi_\alpha = q(\xi_\alpha^1)$; p, q – произвольные функции одной переменной.

Можно показать, что при произвольных r и s функция $\bar\varphi$ определена с точностью до одной произвольной функции одной переменной χ и двух произвольных функций $p(x_i^1,\dots,x_i^r)$ и $q(\xi_\alpha^1,\dots,\xi_\alpha^s)$ и имеет аналогичный вид:

$$\bar\varphi(x_i^1,\dots,x_i^r;\xi_\alpha^1,\dots,\xi_\alpha^s) = \chi(p(x_i^1,\dots,x_i^r)\cdot q(\xi_\alpha^1,\dots,\xi_\alpha^s)) =$$

$$= \varphi(x_i,\xi_\alpha) = \chi(x_i\cdot\xi_\alpha),$$

где $x_i = p(x_i^1,\dots,x_i^r)$, $\xi_\alpha = q(\xi_\alpha^1,\dots,\xi_\alpha^s)$.

Итак, мы можем утверждать, следующее: если $\varphi_{i\alpha}$ есть некоторая, измеряемая на опыте, физическая величина, зависящая от тела i и ускорителя α, и реализующая физическую структуру ранга (2,2), то она должна иметь следующее строение

$$\varphi_{i\alpha} = \chi_\varphi(x_i\cdot\xi_\alpha) = \lambda_\varphi(p_i+\pi_\alpha), \tag{10}$$

где $\lambda(x) = \chi(e^x)$; $p_i = \ln x_i$; $\pi_\alpha = \ln\xi_\alpha$.

$\chi_\varphi(x)$ – уже не произвольная, а вполне определенная, присущая данной физической величине $\varphi_{i\alpha}$, функция одной переменной, имеющая обратную χ_φ^{-1};

$\lambda^{-1}(x) = \ln(\chi^{-1}(x))$.

Переписывая равенство (I0) в виде

$$\chi_{\varphi}^{-1}(\varphi_{i\alpha}) = x_i \xi_\alpha$$

или

$$\lambda_{\varphi}^{-1}(\varphi_{i\alpha}) = \rho_i + \pi_\alpha$$

легко находим вид функции $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4)$:

$$\Phi_{\varphi}^{1}(\varphi_{i\alpha}, \varphi_{i\beta}, \varphi_{k\alpha}, \varphi_{k\beta}) = \begin{vmatrix} \chi_{\varphi}^{-1}(\varphi_{i\alpha}) & \chi_{\varphi}^{-1}(\varphi_{i\beta}) \\ \chi_{\varphi}^{-1}(\varphi_{k\alpha}) & \chi_{\varphi}^{-1}(\varphi_{k\beta}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (\text{II})$$

или

$$\Phi_{\varphi}^{2}(\varphi_{i\alpha}, \varphi_{i\beta}, \varphi_{k\alpha}, \varphi_{k\beta}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda_{\varphi}^{-1}(\varphi_{i\alpha}) & \lambda_{\varphi}^{-1}(\varphi_{i\beta}) \\ 1 & \lambda_{\varphi}^{-1}(\varphi_{k\alpha}) & \lambda_{\varphi}^{-1}(\varphi_{k\beta}) \end{vmatrix} = 0. \qquad (\text{I2})$$

Таким образом, если измеряемая на опыте физическая величина $\varphi_{i\alpha}$ реализует физичекую структуру ранга (2,2), то найдется такая функция $\chi_{\varphi}^{-1}(x)$ (или $\lambda_{\varphi}^{-1}(x)$), что при любом кортеже $\langle i, k; \alpha, \beta \rangle \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ будет иметь место равенство (II) (или, соответственно, равенство (I2)).

Так как $\varphi_{i\alpha}$ измеряются на опыте, то в принципе из равенства (II) мы всегда можем найти конкретный вид функции $\chi_{\varphi}^{-1}(x)$. Найдя $\chi_{\varphi}^{-1}(x)$, мы можем легко получить

$$a_{i\alpha} = \chi_{\varphi}^{-1}(\varphi_{i\alpha})$$

и

$$u_{i\alpha} = \lambda_{\varphi}^{-1}(\varphi_{i\alpha})$$

представляющие собой, соответственно, "скалярное произведение" двух одномерных векторов

$$a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha \qquad (\text{I3})$$

и одномерный "квадрат расстояния" между телом i и ускорителем α

$$u_{i\alpha} = \rho_i + \pi_\alpha$$

и переписать соотношения (II) и (I2) в каноническом виде

$$\Phi^1(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0 \tag{I4}$$

$$\Phi^2(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, u_{k\alpha}, u_{k\beta}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = 0 .$$

Если в качестве измеряемой на опыте физической величины $\varphi_{i\alpha}$ взять нековариантное ускорение $\dot{v}_{i\alpha,\sigma}$, измеренное в произвольной системе отсчета σ, то функция χ_φ^{-1} действительно существует и, как показывает опыт, имеет простой вид, допускающий естественную физическую интерпретацию

$$\chi^{-1}_{\varphi(\sigma)}(x) = x + a_\sigma ,$$

где a_σ - некоторая постоянная, зависящая от системы отсчета σ.

Заметим, что влияние выбора системы отсчета σ не сказывается на самом законе (II), а сказывается, (через постоянную a_σ) на выборе функции χ_φ^{-1}.

Итак,

$$a_{i\alpha} = \dot{v}_{i\alpha,\sigma} + a_\sigma \tag{I5}$$

и из (I4) следует

$$\forall\, i,k \in \mathfrak{M} , \quad \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{N}$$

$$(\dot{v}_{i\alpha,\sigma} + a_\sigma)(\dot{v}_{k\beta,\sigma} + a_\sigma) - (\dot{v}_{i\beta,\sigma} + a_\sigma)(\dot{v}_{k\alpha,\sigma} + a_\sigma) = 0 . \tag{I6}$$

Рассматривая равенство (I6) как уравнение для a_σ, находим

$$a_\sigma = \frac{\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta}(\dot{v})}{{}^1\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta}(\dot{v})} = \frac{\mathcal{D}_{pq,\gamma\delta}(\dot{v})}{{}^1\mathcal{D}_{pq,\gamma\delta}(\dot{v})} , \tag{I7}$$

где

$$\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta}(x) = \begin{vmatrix} x_{i\alpha} & x_{i\beta} \\ x_{k\alpha} & x_{k\beta} \end{vmatrix} , \quad {}^1\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x_{i\alpha} & x_{i\beta} \\ 1 & x_{k\alpha} & x_{k\beta} \end{vmatrix} .$$

Заметим, что равенство

$$\frac{\dot v_{i\alpha,\sigma}\dot v_{\kappa\beta,\sigma}-\dot v_{i\beta,\sigma}\dot v_{\kappa\alpha,\sigma}}{\dot v_{i\alpha,\sigma}+\dot v_{\kappa\beta,\sigma}-\dot v_{i\beta,\sigma}-\dot v_{\kappa\alpha,\sigma}}=\frac{\dot v_{p\gamma,\sigma}\dot v_{q\delta,\sigma}-\dot v_{p\delta,\sigma}\dot v_{q\gamma,\sigma}}{\dot v_{p\gamma,\sigma}+\dot v_{q\delta,\sigma}-\dot v_{p\delta,\sigma}-\dot v_{q\gamma,\sigma}}$$

содержит только измеряемые на опыте величины и может быть проверено экспериментально; факт существования этого равенства при любых $i,\kappa,p,q\in\mathfrak{M}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathfrak{N}$ и $\sigma\in\mathfrak{S}$ равносилен утверждению о существовании на множестве $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ физической структуры ранга (2,2), реализуемой через ускорение $\dot v_{i\alpha,\sigma}$.

Итак, каждая система отсчета σ характеризуется своей константой a_σ (строго говоря, ее тремя компонентами), величина которой может быть получена из четырех экспериментальных значений $\dot v_{i\alpha,\sigma}$, $\dot v_{i\beta,\sigma}$, $\dot v_{\kappa\alpha,\sigma}$, $\dot v_{\kappa\beta,\sigma}$ по формуле (I7).

Система отсчета σ, для которой $a_\sigma=0$ называется <u>инерциальной</u>.

Зная a_σ легко находим "ковариантное ускорение"

$$a_{i\alpha}=\dot v_{i\alpha,\sigma}+a_\sigma=\dot v_{i\alpha,\lambda}+a_\lambda\,,$$

величина которого не зависит от выбора системы отсчета σ. (Сравните с абсолютной производной ковариантной скорости u_n по инвариантному времени τ в общей теории относительности

$$a_n(i,\alpha)=\frac{\delta u_n}{\delta\tau}=g_{nm}\frac{du^m}{d\tau}+\Gamma_{n,mp}u^m u^p)\,.$$

Таким образом, именно $a_{i\alpha}$, а не непосредственно измеряемое ускорение $\dot v_{i\alpha,\sigma}$ является наиболее фундаментальной характеристикой отношений между телами и ускорителями.

Измеряя ускорения $\dot v_{i\alpha,\sigma}$ различных тел под действием различных ускорителей в некоторой фиксированной системе отсчета σ, мы получим, в конце концов, набор различных значений ковариантных ускорений:

$$\begin{array}{llll}
a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \ldots & a_{i\gamma}\ \ldots\\
a_{\kappa\alpha} & a_{\kappa\beta} & \ldots & a_{\kappa\gamma}\ \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{\ell\alpha} & a_{\ell\beta} & \ldots & a_{\ell\gamma}\ \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

связанных между собой универсальным соотношением: $\forall i,\kappa\in\mathfrak{M}$, $\forall\alpha,\beta\in\mathfrak{N}$

$$\mathcal{D}_{ik,\alpha\beta}(a) = \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0 \,. \qquad (18)$$

Согласно (I3), измеряемая на опыте величина $a_{i\alpha}$ просто выражается через два параметра, один из которых x_i является характеристикой тела i, а другой ξ_α - характеристикой ускорителя α

$$a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha \,. \qquad (19)$$

Выразим эти параметры через измеряемые ковариантные ускорения $a_{i\alpha}$.

Но заметим при этом, что x_i и ξ_α не определяются однозначно, т.к. существует однопараметрическая группа преобразований $x = c\bar{x}, \xi = \frac{1}{c}\bar{\xi}$ сохраняющая вид правой части в выражении (I9), т.е. $x_i \xi_\alpha = \bar{x}_i \bar{\xi}_\alpha$. Что же касается выбора параметра C, то он, в конечном итоге, определяется выбором системы единиц.

Назовем одно из тел (например, тело k) и один из ускорителей (например, ускоритель β) "эталонными" и переобозначим их, соответственно, через I и 0. Полагая в (I8) $k=1$, $\beta=0$ будем иметь:

$$a_{i\alpha} = \frac{a_{i0} a_{1\alpha}}{a_{10}} = \frac{1}{c} \frac{a_{i0}}{\sqrt{a_{10}}} \cdot c \frac{a_{1\alpha}}{\sqrt{a_{10}}} \,. \qquad (20)$$

Сравнивая (20) с (I9) получим

$$x_i = \frac{1}{c\sqrt{a_{10}}} \cdot a_{i0} \qquad (21)$$

$$\xi_\alpha = \frac{c}{\sqrt{a_{10}}} \cdot a_{1\alpha} \,. \qquad (22)$$

Итак, измеряя ковариантные ускорения a_{i0}, $a_{1\alpha}$ и a_{10} мы можем сопоставить каждому телу i и каждому ускорителю α характеризующие их числа x_i и ξ_α, или, другими словами, осуществить следующие отображения

$$x : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$$

$$\xi : \mathfrak{N} \to \mathbb{R} \,.$$

Но любые, достаточно гладкие функции x_i и ξ_α тоже являются характеристиками тела i и, соответственно, ускорителя α. Какие же из них выбрать в качестве наиболее простой и естественной характеристики тела i и ускорителя α ?

Чтобы осуществить этот выбор, воспользуемся существованием двух физических гиперструктур ранга (2,2): одной на множестве тел $\mathfrak{M}$, а другой, на множестве ускорителей $\mathfrak{N}$.

Дело в том, что на каждом из множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ естественным путем осуществляется своя операция композиции.

Так скрепляя друг с другом два тела $i \in \mathfrak{M}$ и $k \in \mathfrak{M}$ можно образовать новое тело $l = i + k \in \mathfrak{M}$, реализуя тем самым отображение композиции тел

$$\mu : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M} .$$

Точно так же, осуществляя одновременное действие на одно и то же тело двух ускорителей $\alpha \in \mathfrak{N}$ и $\beta \in \mathfrak{N}$ мы получаем новый ускоритель $\gamma = \alpha + \beta \in \mathfrak{N}$, реализуя тем самым другое отображение – отображение композиции ускорителей

$$\nu : \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}.$$

Таким образом можно реализовать следующие два отображения:

$$\varphi_x : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{M} \arrow[dr, "x"] & \\
\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\varphi_x"] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

и

$$\varphi_\xi : \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{N} \arrow[dr, "\xi"] & \\
\mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \arrow[ur, "\nu"] \arrow[rr, "\varphi_\xi"] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Сделаем следующие предположения:

I. на многообразии тел $\mathfrak{M}$ имеет место физическая гиперструктура ранга (2,2), реализуемая через параметр x_{i+k}, играющий роль функции $\varphi_x : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$;

2. на многообразии ускорителей $\mathfrak{N}$ имеет место физическая гиперструктура ранга (2,2), реализуемая через параметр $\xi_{\alpha+\beta}$,

играющий роль функции $\varphi_\xi : \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Полагая $x_{i+k} = \varphi_x(x_i, x_k)$ и $\xi_{\alpha+\beta} = \varphi_\xi(\xi_\alpha, \xi_\beta)$, сведем задачу к нахождению двух неизвестных функций: функции двух переменных $\varphi(x_i, x_k)$ и функции четырех переменных $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4)$, удовлетворяющих следующему тождеству:

$$\Phi(\varphi(x_{i_1}, x_{k_1}), \varphi(x_{i_1}, x_{k_2}), \varphi(x_{i_2}, x_{k_1}), \varphi(x_{i_2}, x_{k_2})) \equiv 0 .$$

Возникшая математическая задача локально ничем не отличается от задачи нахождения физической структуры ранга (2,2) на произведении двух различных множеств, рассмотренной выше, и потому мы можем воспользоваться приведенным на стр. результатом (IO) и записать наиболее общее решение для $\varphi(x_i, x_k)$, взятое в аддитивной форме, в следующем виде:

$$\varphi(x_i, x_k) = \lambda(v(x_i) + w(x_k)) ,$$

где λ, v, w – произвольные функции одной переменной.
Зная $\varphi_x(x_i, x_k) = \lambda(v(x_i) + w(x_k))$ и

$$\varphi_\xi(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \mu(r(\xi_\alpha) + s(\xi_\beta))$$

легко находим соответствующие им функции

$$\Phi(x_{i_1+k_1}, x_{i_1+k_2}, x_{i_2+k_1}, x_{i_2+k_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda^{-1}(x_{i_1+k_1}) & \lambda^{-1}(x_{i_1+k_2}) \\ 1 & \lambda^{-1}(x_{i_2+k_1}) & \lambda^{-1}(x_{i_2+k_2}) \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

$$\Phi(\xi_{\alpha_1+\beta_1}, \xi_{\alpha_1+\beta_2}, \xi_{\alpha_2+\xi}, \xi_{\alpha_2+\beta_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & \mu^{-1}(\xi_{\alpha_1+\beta_1}) & \mu^{-1}(\xi_{\alpha_1+\beta_2}) \\ 1 & \mu^{-1}(\xi_{\alpha_2+\beta_1}) & \mu^{-1}(\xi_{\alpha_2+\beta_2}) \end{vmatrix} = 0 . \quad (24)$$

Факт существования физических гиперструктур ранга (2,2) на $\mathfrak{M}$ и на $\mathfrak{N}$ находит свое выражение в экспериментально проверяемых соотношениях: $\forall i_1, i_2, k_1, k_2 \in \mathfrak{M}$

$$\frac{1}{a_{i_1+k_1,0}} + \frac{1}{a_{i_2+k_2,0}} - \frac{1}{a_{i_1+k_2,0}} - \frac{1}{a_{i_2+k_1,0}} = 0 \quad (25)$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathcal{N}$$

$$a_{1,\alpha_1+\beta_1} + a_{1,\alpha_2+\beta_2} - a_{1,\alpha_1+\beta_2} - a_{1,\alpha_2+\beta_1} = 0 . \qquad (26)$$

Сравнивая (25) с (23) и (26) с (24) и имея в виду (2I) и (22) находим конкретный вид функций λ^{-1} μ^{-1}:

$$\lambda^{-1}(x) = \frac{1}{x} \qquad \mu^{-1}(\xi) = \xi .$$

Таким образом, мы видим, что величина обратная параметру x_i и параметру ξ_α обладают свойством аддитивности

$$\frac{1}{x_{i_1+k_1}} + \frac{1}{x_{i_2+k_2}} = \frac{1}{x_{i_1+k_2}} + \frac{1}{x_{i_2+k_1}}$$

$$\xi_{\alpha_1+\beta_1} + \xi_{\alpha_2+\beta_2} = \xi_{\alpha_1+\beta_2} + \xi_{\alpha_2+\beta_1}$$

и поэтому являются наиболее простыми и естественными характеристиками, соответственно, тела i и ускорителя α. В связи со сказанным удобно в качестве характеристики тела i взять величину

$$m_{i,1} = \frac{\sqrt{a_{10}}}{x_i} = c\,\frac{a_{10}}{a_{i0}} \qquad (27)$$

и назвать ее "массой тела i ", а в качестве характеристики ускорителя α взять

$$\mathcal{F}_{\alpha,0} = \frac{1}{\sqrt{a_{10}}}\,\xi_\alpha = c\,\frac{a_{1\alpha}}{a_{10}} \qquad (28)$$

и назвать ее "силой ускорителя α ", хотя в принципе мы могли бы назвать "массой" и "силой" любые монотонные функции, соответственно, от x_i и ξ_α; правда, введенные так "масса" и "сила" обладали бы не аддитивным законом композиции.

Фиксируя эталонное тело I мы тем самым устанавливаем определенную "размерность" массы. Точно так же произвольно выбирая эталонный ускоритель 0 мы тем самым устанавливаем "размерность" силы. Но часто, из-за соображений удобства, эталонный ускоритель 0 выбирают в зависимости от эталонного тела I; например, так, чтобы ускорение a_{10} эталонного тела I под действием эталонного ускорителя 0 равнялось бы единице. Так, если в качестве эталонного тела I взять "килограмм", то соответствующий ускоритель 0 будет называться "ньютоном".

Но вернемся к соотношению (I9). Переписывая его в новых обозначениях (27) и (28) получаем второй закон Ньютона в его окончательной традиционной формулировке

$$a_{i\alpha} = a_{10} \frac{\mathcal{F}_{\alpha,0}}{m_{i,1}}$$

или при специальном выборе эталонного ускорителя 0 , когда $a_{10} = 1$, в виде

$$m_i a_{i\alpha} = \mathcal{F}_\alpha \qquad (29)$$

или

$$m_i(\dot{v}_{i\alpha,\sigma} + a_\sigma) = \mathcal{F}_\alpha .$$

Итак, мы показали, что второй закон Ньютона, записанный в его традиционном виде (29), является следствием существования на прямом произведении множества тел $\mathfrak{M}$ и множества ускорителей $\mathfrak{N}$ физической структуры ранга (2,2) и содержит в себе два, вообще говоря, произвольных определения - определения массы и силы. Принятые определения m_i и $\mathcal{F}_\alpha$ удобны, т.к. в наиболее простой аддитивной форме отражают факт существования двух физических аддитивных гиперструктур ранга (2,2) на множестве тел $\mathfrak{M}$ и на множестве ускорителей $\mathfrak{N}$.

Необходимо отметить, что фундаментальное соотношение (I8) между ковариантными ускорениями, выражая наиболее глубокие динамические отношения между множеством тел и множеством ускорителей, остается справедливым как в рамках классической ньютоновской механики, так и в рамках специальной и даже общей теории относительности. Все отличие состоит лишь в выборе той или иной геометрии и соответствующей ей кинематики.

Так, если под $a_{i\alpha}$ понимать обычное трехмерное ускорение $\dot{v}_{i\alpha}$, то получаем второй закон Ньютона в инерциальной системе отсчета

$$m_i \dot{v}^n_{i\alpha} = \mathcal{F}^n_\alpha \quad (n=1,2,3); \qquad (30)$$

если под $a_{i\alpha}$ понимать нерелятивистское ковариантное ускорение $a_{i\alpha,\sigma} = \dot{v}_{i\alpha,\sigma} + a_\sigma$, то получаем второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета

$$m_i(\dot{v}^n_{i\alpha} + a^n_\sigma) = \mathcal{F}^n_\alpha \quad (n=1,2,3); \qquad (31)$$

если под $a_{i\alpha}$ понимать 4-ускорение $du^n/d\tau$ $(n=0,1,2,3)$ ковариантное относительно преобразований Лоренца, то получаем второй закон Ньютона в релятивистской механике

$$m_i\left(\frac{du^n}{d\tau}\right)_{i\alpha} = \mathcal{F}_\alpha^n \quad (n=0,1,2,3); \tag{32}$$

если же под $a_{i\alpha}$ понимать абсолютное общековариантное 4-ускорение, то получаем второй закон Ньютона в общей теории относительности

$$m_i\left(\frac{du^n}{d\tau} + \Gamma^n_{pq} u^p u^q\right)_{i\alpha} = \mathcal{F}_\alpha^n \quad (n,p,q=0,1,2,3) \tag{33}$$

Итак, мы видим, что в уравнениях (30)-(33) осуществлено полное отделение динамических понятий - массы m_i и силы $\mathcal{F}_\alpha$ от чисто кинематического понятия - ускорения $a_{i\alpha}$, так что во всех случаях мы имеем второй закон Ньютона в его первозданной простоте:

произведение постоянной массы материальной точки m_i на ее абсолютное ускорение $a_{i\alpha}$ равно действующей силе $\mathcal{F}_\alpha$.

В. Электродинамика постоянных токов.

Рассмотрим два множества:

$\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ - множество проводников и

$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ - множество источников постоянного тока.

Если проводник $i \in \mathfrak{M}$ соединить с источником тока $\alpha \in \mathfrak{N}$, то в цепи возникнет электрический ток $\mathcal{J}_{i\alpha}$, измеряемый амперметром. Соединяя каждый проводник $i \in \mathfrak{M}$ с каждым источником тока $\alpha \in \mathfrak{N}$ и измеряя при этом электрический ток $\mathcal{J}_{i\alpha}$ мы получим следующую прямоугольную матрицу

$$\begin{matrix} \mathcal{J}_{i\alpha} & \mathcal{J}_{i\beta} & \ldots & \mathcal{J}_{i\gamma} & \ldots \\ \mathcal{J}_{k\alpha} & \mathcal{J}_{k\beta} & \ldots & \mathcal{J}_{k\gamma} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{J}_{m\alpha} & \mathcal{J}_{m\beta} & \ldots & \mathcal{J}_{m\gamma} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

Как извлечь заключенную в ней информацию о свойствах проводников и источников тока и о закономерностях отношений между ними?

Сделаем следующие предположения:

I. множество проводников $\mathfrak{M}$ является многообразием произвольной размерности; множество источников тока $\mathfrak{N}$ - многообразие размерности не меньшей двух; 2. на множестве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ имеет место физическая структура ранга (3,2), реализуемая через измеряемую на опыте силу тока $\mathcal{J}_{i\alpha}$, играющую роль функции $\varphi: \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to\mathbb{R}$.

Полагая $\mathcal{J}_{i\alpha}=\overline{\varphi}(x_i^1;\xi_\alpha^1,\eta_\alpha^1)$ сведем задачу к нахождению двух неизвестных функций:
функции трех переменных $\overline{\varphi}(x_i^1;\xi_\alpha^1,\eta_\alpha^1)$ и функции шести переменных $\Phi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)$, удовлетворяющих следующему тождеству:

$$\Phi(\overline{\varphi}(x_i^1;\xi_\alpha^1,\eta_\alpha^1),\overline{\varphi}(x_i^1;\xi_\beta^1,\eta_\beta^1),\overline{\varphi}(x_k^1;\xi_\alpha^1,\eta_\alpha^1),\overline{\varphi}(x_k^1;\xi_\beta^1,\eta_\beta^1),$$

$$\overline{\varphi}(x_m^1;\xi_\alpha^1,\eta_\alpha^1),\overline{\varphi}(x_m^1;\xi_\beta^1,\eta_\beta^1))\equiv 0\,.$$

Как показал в [13] Г.Г.Михайличенко, эта задача имеет единственное решение, определенное с точностью до четырех произвольных функций одной переменной $\chi(x);\ r(x),\ s(\xi),\ t(\eta),$ три последние из которых несущественны для построения физической теории:

$$\overline{\varphi}(x_i^1;\xi_\alpha^1,\eta_\alpha^1)=\chi(r(x_i^1)s(\xi_\alpha^1)+t(\eta_\alpha^1))$$

$$\Phi(\mathcal{J}_{i\alpha},\mathcal{J}_{i\beta},\mathcal{J}_{k\alpha},\mathcal{J}_{k\beta},\mathcal{J}_{m\alpha},\mathcal{J}_{m\beta})=\begin{vmatrix}1 & \chi^{-1}(\mathcal{J}_{i\alpha}) & \chi^{-1}(\mathcal{J}_{i\beta})\\ 1 & \chi^{-1}(\mathcal{J}_{k\alpha}) & \chi^{-1}(\mathcal{J}_{k\beta})\\ 1 & \chi^{-1}(\mathcal{J}_{m\alpha}) & \chi^{-1}(\mathcal{J}_{m\beta})\end{vmatrix}=0. \qquad (34)$$

Таким образом, если измеряемый на опыте электрический ток $\mathcal{J}_{i\alpha}$ реализует физическую структуру ранга (3,2), то найдется такая функция $\chi^{-1}(x)$, что при любом кортеже $<i,k,m;\alpha,\beta>\in\mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^2$ будет иметь место равенство (34). Как показывает опыт, функция $\chi^{-1}(x)$ имеет следующий простой вид:

$$\chi^{-1}(x)=\frac{1}{x}\,.$$

Зная $\chi^{-1}(x)$ мы легко получаем

$$\frac{1}{\mathcal{J}_{i\alpha}}=q_{i\alpha}=x_i\xi_\alpha+\eta_\alpha\,, \qquad (35)$$

где $x_i=r(x_i^1)$, $\xi_\alpha=s(\xi_\alpha^1)$, $\eta_\alpha=t(\eta_\alpha^1)$ и переписываем соотношение (34) в каноническом виде:

$$\mathcal{D}_{ikm,\alpha\beta}(q)=\begin{vmatrix}1 & q_{i\alpha} & q_{i\beta}\\ 1 & q_{k\alpha} & q_{k\beta}\\ 1 & q_{m\alpha} & q_{m\beta}\end{vmatrix}=0\,. \qquad (36)$$

Наряду с параметрами ξ_α и η_α можно ввести новый параметр $\zeta_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{\xi_\alpha}$ и переписать (35) в виде:

$$q_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha = (x_i + \zeta_\alpha)\xi_\alpha = \left(\frac{x_i}{\zeta_\alpha} + 1\right)\eta_\alpha . \tag{37}$$

Итак, мы видим, что измеряемая на опыте обратная величина силы тока $q_{i\alpha}$ просто выражается через параметр x_i, являющийся единственной характеристикой проводника i, и через параметры $\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha$ (из которых только два независимых) являющиеся характеристиками источника тока α.

Выразим эти параметры через измеряемые величины $q_{i\alpha}$. Но только заметим при этом, что $x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha$ не определяются однозначно, т.к. существует двухпараметрическая группа преобразований

$$\begin{aligned} x &= c_1 \overline{x} - c_1 c_2 \\ \xi &= \frac{1}{c_1}\overline{\xi} \\ \eta &= \overline{\eta} + c_2 \overline{\xi} \\ \zeta &= c_1 \overline{\zeta} + c_1 c_2 \end{aligned}$$

сохраняющая вид правой части выражения (37). Назовем двое из проводников (например, проводники k и m) и один из источников тока (например, источник тока β) "эталонным" и переобозначим их, соответственно, через I,2 и 0. Полагая в (36) $k=1, m=2, \beta=0$ будем иметь

$$\frac{q_{i\alpha}}{q_{10}-q_{20}} =$$

$$= \left(c_1 \frac{q_{i0}}{q_{10}-q_{20}} - c_1 c_2\right) \frac{q_{1\alpha}-q_{2\alpha}}{c_1(q_{10}-q_{20})} + \frac{q_{10}q_{2\alpha}-q_{20}q_{1\alpha}}{(q_{10}-q_{20})^2} + c_2 \frac{q_{1\alpha}-q_{2\alpha}}{q_{10}-q_{20}} =$$

$$= \left(c_1 \frac{q_{i0}}{q_{10}-q_{20}} - c_1 c_2 + c_1 \frac{q_{10}q_{2\alpha}-q_{20}q_{1\alpha}}{(q_{10}-q_{20})(q_{1\alpha}-q_{2\alpha})} + c_1 c_2\right) \frac{q_{1\alpha}-q_{2\alpha}}{c_1(q_{10}-q_{20})} . \tag{38}$$

Вводя безразмерные параметры $x_i^\circ, \xi_\alpha^\circ, \eta_\alpha^\circ, \zeta_\alpha^\circ$ перепишем (37) в виде

$$\frac{q_{i\alpha}}{q_{10}-q_{20}} = x_i^\circ \xi_\alpha^\circ + \eta_\alpha^\circ = (x_i^\circ + \zeta_\alpha^\circ)\xi_\alpha^\circ . \tag{39}$$

Сравнивая правые части выражений (38) и (39), получаем выражения для $x_i^\circ, \xi_\alpha^\circ, \eta_\alpha^\circ, \zeta_\alpha^\circ$ через $q_{i0}, q_{1\alpha}, q_{2\alpha}, q_{10}, q_{20}$

с точностью до двух произвольных безразмерных постоянных c_1 и c_2:

$$x_i^\circ = c_1 \frac{q_{i0}}{q_{10}-q_{20}} - c_1 c_2$$

$$\xi_\alpha^\circ = \frac{1}{c_1}\cdot\frac{q_{1\alpha}-q_{2\alpha}}{q_{10}-q_{20}}$$

$$\eta_\alpha^\circ = \frac{q_{10}q_{2\alpha}-q_{20}q_{1\alpha}}{(q_{10}-q_{20})^2} + c_2\frac{q_{1\alpha}-q_{2\alpha}}{q_{10}-q_{20}}$$

$$\zeta_\alpha^\circ = c_1\frac{q_{10}q_{2\alpha}-q_{20}q_{1\alpha}}{(q_{10}-q_{20})(q_{1\alpha}-q_{2\alpha})} + c_1 c_2 .$$

Посмотрим теперь, как ведут себя при различных операциях композиции полученные параметры.

На множестве проводников $\mathfrak{M}$ таких операций две - последовательное и параллельное соединение проводников. Мы будем обозначать их, соответственно, как $i+k=l\in\mathfrak{M}$ и $i\times k=m\in\mathfrak{M}$.

Измеряя $q_{i+k,0}$ и $q_{i\times k,0}$ и оставляя пока неопределенными постоянные c_1 и c_2, мы получаем, таким образом, два отображения:

$\varphi_+ : \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\longrightarrow\mathbb{R}$ со значениями x°_{i+k} и

$\varphi_\times : \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\longrightarrow\mathbb{R}$ со значениями $x^\circ_{i\times k}$

Как показывает опыт, каждое из этих отображений реализует на многообразии $\mathfrak{M}$ свою физическую аддитивную гиперструктуру ранга (2,2). Так имеют место следующие соотношения:

$$\Phi(x^\circ_{i_1+k_1}, x^\circ_{i_1+k_2}, x^\circ_{i_2+k_1}, x^\circ_{i_2+k_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x^\circ_{i_1+k_1} & x^\circ_{i_1+k_2} \\ 1 & x^\circ_{i_2+k_1} & x^\circ_{i_2+k_2} \end{vmatrix} =$$

$$= x^\circ_{i_1+k_2} + x^\circ_{i_2+k_1} - x^\circ_{i_1+k_1} - x^\circ_{i_2+k_2} = 0$$

при любых c_1 c_2;

$$\Phi(x^\circ_{i_1\times k_1}, x^\circ_{i_1\times k_2}, x^\circ_{i_2\times k_1}, x^\circ_{i_2\times k_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{x^\circ_{i_1\times k_1}} & \frac{1}{x^\circ_{i_1\times k_2}} \\ 1 & \frac{1}{x^\circ_{i_2\times k_1}} & \frac{1}{x^\circ_{i_2\times k_2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x^\circ_{i_1\times k_2}} + \frac{1}{x^\circ_{i_2\times k_1}} - \frac{1}{x^\circ_{i_1\times k_1}} - \frac{1}{x^\circ_{i_2\times k_2}} = 0$$

при любом c_1 и вполне определенном значении $c_2 = q_{00}/q_{10} - q_{20}$, где q_{00} – постоянная, имеющая смысл величины обратной силе тока короткого замыкания эталонного источника тока 0.

В связи с этим удобно взять в качестве аддитивной характеристики проводника i, либо

$$R_i = \frac{x_i^{\circ}}{c_1} = \frac{q_{i0} - q_{00}}{q_{10} - q_{20}} \tag{40}$$

и назвать ее <u>сопротивлением</u>, либо

$$\mathfrak{R}_i = \frac{1}{R_i} = \frac{c_1}{x_i^{\circ}}$$

и назвать ее <u>проводимостью</u>.

На множестве $\mathcal{N}$ имеет смысл лишь одна операция композиции – последовательное соединение источников тока α и β. Однако при этом имеются три параметра $\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha$ связанные друг с другом соотношением $\zeta\xi = \eta$, два из которых в принципе могли бы играть роль функции $\varphi: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, реализующей физическую аддитивную гиперструктуру ранга (2,2). Как показывает опыт, такими аддитивными параметрами являются $\frac{1}{\xi_\alpha}$ и ζ_α. При этом имеют место следующие соотношения:

$$\Phi(\xi^{\circ}_{\alpha_1+\beta_1}, \xi^{\circ}_{\alpha_1+\beta_2}, \xi^{\circ}_{\alpha_2+\beta_1}, \xi^{\circ}_{\alpha_2+\beta_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\xi^{\circ}_{\alpha_1+\beta_1}} & \frac{1}{\xi^{\circ}_{\alpha_1+\beta_2}} \\ 1 & \frac{1}{\xi^{\circ}_{\alpha_2+\beta_1}} & \frac{1}{\xi^{\circ}_{\alpha_2+\beta_2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\xi^{\circ}_{\alpha_1+\beta_2}} + \frac{1}{\xi^{\circ}_{\alpha_2+\beta_1}} - \frac{1}{\xi^{\circ}_{\alpha_1+\beta_1}} - \frac{1}{\xi^{\circ}_{\alpha_2+\beta_2}} = 0$$

$$\Phi(\zeta^{\circ}_{\alpha_1+\beta_1}, \zeta^{\circ}_{\alpha_1+\beta_2}, \zeta^{\circ}_{\alpha_2+\beta_1}, \zeta^{\circ}_{\alpha_2+\beta_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta^{\circ}_{\alpha_1+\beta_1} & \zeta^{\circ}_{\alpha_1+\beta_2} \\ 1 & \zeta^{\circ}_{\alpha_2+\beta_1} & \zeta^{\circ}_{\alpha_2+\beta_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \zeta^{\circ}_{\alpha_1+\beta_2} + \zeta^{\circ}_{\alpha_2+\beta_1} - \zeta^{\circ}_{\alpha_1+\beta_1} - \zeta^{\circ}_{\alpha_2+\beta_2} = 0.$$

В связи с этим удобно взять в качестве аддитивных характеристик источника тока α

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{c_1 \xi^{\circ}_\alpha} = \frac{q_{10} - q_{20}}{q_{1\alpha} - q_{2\alpha}} \tag{4I}$$

$$\rho_\alpha = \frac{\zeta^0_\alpha}{c_1} = \frac{(q_{10}-q_{00})q_{2\alpha}-(q_{20}-q_{00})q_{1\alpha}}{(q_{10}-q_{20})(q_{1\alpha}-q_{2\alpha})} \tag{42}$$

и назвать их, соответственно, электродвижущей силой и внутренним сопротивлением источника тока α.

Но вернемся к соотношению (39). Переписывая его в новых обозначениях (40),(4I) и (42), получим закон Ома для всей цепи в его традиционном виде:

$$\mathcal{J}_{i\alpha} = \frac{1}{q_{10}-q_{20}} \cdot \frac{\varepsilon_\alpha}{R_i+\rho_\alpha}$$

или при специальном выборе эталонного источника тока 0, когда $q_{10}-q_{20} = \frac{\mathcal{J}_{20}-\mathcal{J}_{10}}{\mathcal{J}_{10}\,\mathcal{J}_{20}} = 1$, в виде:

$$\mathcal{J}_{i\alpha} = \frac{\varepsilon_\alpha}{R_i+\rho_\alpha}\,. \tag{43}$$

Итак, мы показали, что закон Ома для всей цепи, записанный в его традиционном виде (43), является следствием существования на прямом произведении множества проводников $\mathfrak{M}$ и множества источников тока $\mathfrak{N}$ физической структуры ранга (3,2) и содержит в себе три, вообще говоря, произвольных определения - определение сопротивления проводника R_i и электродвижущей силы ε_α и внутреннего сопротивления ρ_α источника тока α. Принятые определения R_i, ε_α и ρ_α удобны, т.к. в наиболее простой аддитивной форме отражают факт существования четырех физических аддитивных гиперструктур ранга (2,2) - двух на множестве $\mathfrak{M}$ и двух на множестве $\mathfrak{N}$.

С. Термодинамика ж)

Возьмем произвольное реальное тело и рассмотрим множество его термодинамических состояний $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$. Простоты ради мы изолируем наше тело от воздействия электрических и магнитных полей и будем считать, что его термодинамическое состояние i

ж) В этом пункте мы лишь покажем, как можно сформулировать основное уравнение термодинамики в терминах теории физических структур, оставляя строгий вывод основного уравнения термодинамики из теории физических структур до следующих публикаций.

определяется заданием его объема V и давления p. Изменяя p и V (при этом, естественно, должна соответствующим образом меняться и температура T), мы можем переводить наше тело из одного термодинамического состояния в другое. Задача состоит в том, чтобы выбрать в качестве экспериментально измеряемой характеристики пары состояний i и k такую величину a_{ik}, которая играла бы роль расстояния между двумя состояниями.

Прежде всего нам потребуется термостат (массивное тело, сохраняющее постоянной свою температуру) и адиабат (теплонепроницаемая оболочка типа термоса, сохраняющего энтропию).

Поместим исследуемое тело, находящееся в состоянии i в адиабат и изменяя давление, квазистатически, переведем его в такое промежуточное состояние $(ik) \in \mathfrak{M}$, из которого возможен изотермический переход в конечное состояние k. После этого перенесем наше тело из адиабата в термостат и снова, квазистатически, переведем его из состояния (ik) в состояние k. Механическую работу, совершенную при таком переходе, обозначим через

$$w_{ik} = A^{(s)}_{i,(ik)} + A^{(T)}_{(ik),k} = -\int_i^{(ik)} p_{s=s_i}\, dv - \int_{(ik)}^{k} p_{T=T_k}\, dv \qquad \text{(см.рис.2)}$$

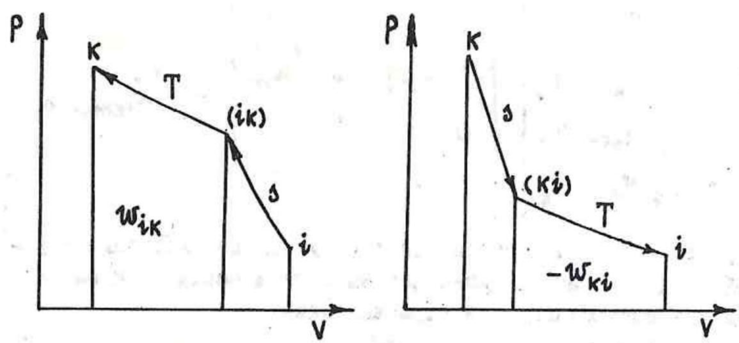

Рис.2. Работы переходов $i \longrightarrow k$ и $k \longrightarrow i$

Таким образом, каждой паре состояний (i,k) сопоставляется некоторое число – измеряемая на опыте работа w_{ik}, , т.е. имеет место следующее отображение:

$$w: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Исходя из основного уравнения термодинамики

$$du = Tds - pdv$$

можно получить явное выражение для работы w_{ik} через температуры T_i и T_k, энтропии s_i и s_k и внутренние энергии u_i и u_k:

$$w_{ik} = u_k - u_i + T_k(s_i - s_k).$$

(Заметим, что $w_{ii} = 0$, но $w_{ik} \neq \pm w_{ki}$).
Воспользовавшись этим выражением, нетрудно показать, что девять работ, относящихся к произвольной паре кортежей

$$\ll i,k,m>, < n,p,q>> \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{M}^3$$

связаны между собой следующим соотношением:

$$^1\mathcal{D}_{ikm,npq} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_{in} & w_{ip} & w_{iq} \\ 1 & w_{kn} & w_{kp} & w_{kq} \\ 1 & w_{mn} & w_{mp} & w_{mq} \end{vmatrix} = 0. \qquad (44)$$

В этом легко убедиться, если воспользоваться следующим очевидным тождеством:

$$0 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_n - T_n s_n & T_n \\ 0 & 1 & u_p - T_p s_p & T_p \\ 0 & 1 & u_q - T_q s_q & T_q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -u_i & -u_k & -u_m \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & s_i & s_k & s_m \end{vmatrix} = {}^1\mathcal{D}_{ikm,npq}.$$

Заметим, что выполнение соотношения (44) при дополнительном условии $w_{ii} = 0$ является единственным эмпирическим фактом, достаточным для построения всей термодинамики.

Д. Теория относительности [ж)]

Рассмотрим два множества:

ж) В этом пункте мы лишь покажем, как можно сформулировать исходные положения теории относительности в терминах теории физических структур, оставляя строгий вывод принципа постоянства скорости света для следующих публикаций.

$\mathfrak{M} = \{i, k, \dots\}$ - множество событий, происходящих в разных точках пространства, и $\mathfrak{N} = \{\mu, \nu, \dots\}$ - множество систем отсчета, равномерно движущихся относительно друг друга.

Специфика релятивистской физической структуры состоит в том, что каждая пара событий $\langle i, k\rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ рассматривается в определенной системе отсчета $\mu \in \mathfrak{N}$ и каждой тройке $\langle i, k; \mu\rangle$ сопоставляется не одно, а два, измеряемых на опыте числа:

$t^2_{ik,\mu[\mu]}$ - квадрат промежутка времени и $\ell^2_{ik,\mu[\mu]}$ - квадрат расстояния между событиями i и k, измеренные в системе отсчета μ, в системе единиц $[\mu]$.

Здесь, в отличие от всех предыдущих случаев, мы имеем дело с двумя различными по своей природе измеряемыми на опыте физическими величинами t^2 и ℓ^2. В связи с этим вопрос о выборе системы единиц играет важную роль. С каждой системой отсчета μ мы свяжем свою систему единиц $[\mu]$. Так, например, с "эталонной" системой отсчета 0 свяжем систему единиц $[0] = [см, сек]$; с системой отсчета μ свяжем систему единиц $[\mu] = [$дюйм, час$]$ и т.д.

Итак, при рассмотрении релятивистской физической структуры имеет место следующее отображение:

$$a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathbb{R}^2 .$$

Утверждается, что существует такая функция исходных физических величин t^2 и ℓ^2

$$a_{ik,\mu} = \varphi(t^2_{ik,\mu[\mu]}, \ell^2_{ik,\mu[\mu]}),$$

что для любого кортежа

$$\langle\langle i, k, m, n, p, q\rangle, \langle r, s, f, g, u, v\rangle, \mu\rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$$

и любого кортежа

$$\langle\langle i, k\rangle, \langle \mu, \nu\rangle\rangle \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$$

имеют место, соответственно, следующие два соотношения:

$$\mathcal{D}_{(ik),\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & a_{ik,\mu} \\ 1 & a_{ik,\nu} \end{vmatrix} = 0$$

$$
{}^{1}\mathcal{D}_{ikmnpq,rsfguv} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{ir,\mu} & a_{is,\mu} & a_{if,\mu} & a_{ig,\mu} & a_{iu,\mu} & a_{iv,\mu} \\ 1 & a_{kr,\mu} & a_{ks,\mu} & a_{kf,\mu} & a_{kg,\mu} & a_{ku,\mu} & a_{kv,\mu} \\ 1 & a_{mr,\mu} & a_{ms,\mu} & a_{mf,\mu} & a_{mg,\mu} & a_{mu,\mu} & a_{mv,\mu} \\ 1 & a_{nr,\mu} & a_{ns,\mu} & a_{nf,\mu} & a_{ng,\mu} & a_{nu,\mu} & a_{nv,\mu} \\ 1 & a_{pr,\mu} & a_{ps,\mu} & a_{pf,\mu} & a_{pg,\mu} & a_{pu,\mu} & a_{pv,\mu} \\ 1 & a_{qr,\mu} & a_{qs,\mu} & a_{qf,\mu} & a_{qg,\mu} & a_{qu,\mu} & a_{qv,\mu} \end{vmatrix} = 0 .
$$

Можно показать, что функция $a_{ik,\mu}(t^2, \ell^2)$ должна иметь следующий вид:

$$
a_{ik,\mu} = c^2_{[0]}\,\alpha_{[0,\mu]}\,t^2_{ik,\mu[\mu]} - \beta_{[0,\mu]}\,\ell^2_{ik,\mu[\mu]} ,
$$

где постоянные $c^2_{[0]}$, $\alpha_{[0,\mu]}$ и $\beta_{[0,\mu]}$ зависящие лишь от выбора системы единиц, следующим образом выражаются через измеряемые на опыте величины t^2 и ℓ^2 :

$$
c^2_{[0]} = \frac{\begin{vmatrix} \ell^2_{mn,o[0]} & t^2_{mn,\nu[\nu]} & \ell^2_{mn,\nu[\nu]} \\ \ell^2_{pq,o[0]} & t^2_{pq,\nu[\nu]} & \ell^2_{pq,\nu[\nu]} \\ \ell^2_{uv,o[0]} & t^2_{uv,\nu[\nu]} & \ell^2_{uv,\nu[\nu]} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t^2_{mn,o[0]} & t^2_{mn,\nu[\nu]} & \ell^2_{mn,\nu[\nu]} \\ t^2_{pq,o[0]} & t^2_{pq,\nu[\nu]} & \ell^2_{pq,\nu[\nu]} \\ t^2_{uv,o[0]} & t^2_{uv,\nu[\nu]} & \ell^2_{uv,\nu[\nu]} \end{vmatrix}}
$$

$$
\alpha_{[0,\mu]} = \frac{\begin{vmatrix} t^2_{mn,o[0]} & \ell^2_{mn,o[0]} & \ell^2_{mn,\mu[\mu]} \\ t^2_{pq,o[0]} & \ell^2_{pq,o[0]} & \ell^2_{pq,\mu[\mu]} \\ t^2_{uv,o[0]} & \ell^2_{uv,o[0]} & \ell^2_{uv,\mu[\mu]} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t^2_{mn,\mu[\mu]} & \ell^2_{mn,o[0]} & \ell^2_{mn,\mu[\mu]} \\ t^2_{pq,\mu[\mu]} & \ell^2_{pq,o[0]} & \ell^2_{pq,\mu[\mu]} \\ t^2_{uv,\mu[\mu]} & \ell^2_{uv,o[0]} & \ell^2_{uv,\mu[\mu]} \end{vmatrix}}
$$

$$\beta_{[0,\mu]} = \frac{\begin{vmatrix} \ell^2_{mn,0[0]} & t^2_{mn,0[0]} & t^2_{mn,\mu[\mu]} \\ \ell^2_{pq,0[0]} & t^2_{pq,0[0]} & t^2_{pq,\mu[\mu]} \\ \ell^2_{uv,0[0]} & t^2_{uv,0[0]} & t^2_{uv,\mu[\mu]} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ell^2_{mn,\mu[\mu]} & t^2_{mn,0[0]} & t^2_{mn,\mu[\mu]} \\ \ell^2_{pq,\mu[\mu]} & t^2_{pq,0[0]} & t^2_{pq,\mu[\mu]} \\ \ell^2_{uv,\mu[\mu]} & t^2_{uv,0[0]} & t^2_{uv,\mu[\mu]} \end{vmatrix}}$$

Заключение

Итак, я изложил здесь основные принципы теории физических структур на одном и на двух многообразиях, и привел полученные мною и Г.Г.Михайличенко основные результаты.

В своих следующих публикациях я покажу (и это, пожалуй, является самым неожиданным), как исходя только из факта существования физических структур можно конкретно построить геометрию расстояний, хронометрию, теорию относительности, механику, термодинамику, электродинамику.

Дело в том, что постоянно приводимые мною соотношения между измеряемыми на опыте физическими величинами в виде равенства нулю некоторых определителей составляют основу любой физической теории феноменологического типа, являются тем исходным ядром, из которого, подобно тому как из крохотного семечка вырастает огромная сосна или бело-розовая яблоня, можно "вырастить" все необходимые для построения той или иной физической теории "исходные аксиомы".

В заключение я хотел бы выразить свою глубокую благодарность и признательность Ольге Александровне Ладыженской за ее постоянный и живой интерес к нашим работам, за многократные обсуждения и настойчивые напоминания о необходимости широкой публикации полученных результатов, без которых эта статья просто не появилась бы на свет.

Литература

1. Э й н ш т е й н А. Собрание научных трудов, том IУ. М., 1967.
2. К у л а к о в Ю.И. К теории физических структур (четыре лекции для студентов НГУ). Новосибирск, НГУ, 1968.

3. К у л а к о в Ю.И. О физических структурах. - Препринт ИТФ-71-19Р, Киев, АН УССР, 1971.
4. К у л а к о в Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск, НГУ, 1968.
5. М и х а й л и ч е н к о Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. - В кн.: Кулаков Ю.И. "Элементы теории физических структур", Новосибирск, НГУ, 1968, с.175-226.
6. К у л а к о в Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. - Докл.АН СССР, 1970, т.193, № 1, с.72-75.
7. К у л а к о в Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур. - Докл.АН СССР, 1970, т.193, № 5, с.985-987.
8. К у л а к о в Ю.И. О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа. - Докл.АН СССР, 1971, т.201, № 3, с.570-572.
9. М и х а й л и ч е н к о Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. - Докл.АН СССР, 1972, т.206, № 5, с.1056-1058.
10. М и х а й л и ч е н к о Г.Г. Двумерные геометрии. - Докл. АН СССР, 1981, т.260, № 4, с.803-805.
11. M i k h a y l i t c h e n k o G.G. Géométries à deux dimensions dans la théorie de structures physiques. - C.R.Acad.Sci. Paris, 1981, t.293. Série I-529.
12. К у л а к о в Ю.И.. Математическая формулировка теории физических структур. - Сиб.матем.журнал, 1971, т.XII, № 5, с.1142.
13. М и х а й л и ч е н к о Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2). - Сиб.матем.журнал, 1973, т.XIV, № 5, с.1057.
14. М и х а й л и ч е н к о Г.Г. Об одной задаче в теории физических структур. - Сиб.матем.журнал, 1977, т.XVIII, № 6, с.1342.
15. М и х а й л и ч е н к о Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости. - Сиб.матем.журнал, 1982, т.XXIII, № 5, с.132-141.
16. K u l a k o v Ju.J., Protasiewicz T.J. Phenomenological Symmetry and the Foundations of Physics. - Int.Logic Review (Italy), 1973, N 7, p.99-101.
17. K u l a k o v Ju.J., P r o t a s i e w i c z T.J. Phenomenological Symmetry and the Foundations of Physics. - Abstracts IV Int.Congréss of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Romania, Bucharest, 1971.

18. K u l a k o v Ju.J. Theorie der Physikalischen Structuren und Das 6. Problem von Hilbert. - Abstracts V Int.Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Ontario, Canada, 1975.

19. К у л а к о в Ю.И. К вопросу о единой физической картине мира. - В кн.: "История и методология естественных наук", 1978, Вып.XIX, М., МГУ, с.3-29.

Kulakov Yu.I. On the theory of physical structures.

In 1968 the auter formulated a new conception concerning a mathematical background of main physical notions and lows. This was developed into a theory named by us "The Theory of Physical Structures" based on the phenomenological Symmetry principle. The article presents a brief account of this theory as well as some important applications to the Geometry, Mechanics, Thermodynamics and Electrodynamics. The princeple of Phenomenological Symmetry gives rise to notions of mass, foree, resistance etc. The lows of Newton, Ohm, Maxwell are natural consequences of this principle.