ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1994 МАТЕМАТИКА № 4 (383)

УДК 514.01

Г.Г.МИХАЙЛИЧЕНКО

К ВОПРОСУ О СИММЕТРИИ РАССТОЯНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

Обычно расстояние $L(ij)$ между точками i и j пространства $\mathfrak{M}$ определяется с помощью некоторой функции L: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей системе метрических аксиом. Одной из основных аксиом этой системы является аксиома симметрии, согласно которой для любых точек $i,j\in\mathfrak{M}$ выполняется равенство $L(ij)=L(ji)$, т.е. предполагается, что расстояние симметрично. Однако в геометрии нельзя исключить из рассмотрения так называемые симплектические пространства, для которых "расстояние" $L(ij)$ определяется с помощью антисимметричной функции, так что $L(ij)=-L(ji)$. И хотя такую функцию обычно не называют метрикой, но в некотором более широком смысле она, как функция пары точек, все же может рассматриваться в качестве метрики, а ее значение $L(ij)$ для $\langle ij\rangle\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ называться расстоянием. Аналогично, симметричный интервал между двумя событиями в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского есть расстояние между ними в некотором более широком смысле, т.к. для него выполняются не все метрические аксиомы. Естественно возникает вопрос: почему в геометрии рассматриваются только симметричные и антисимметричные расстояния? Оказывается, что если предположить существование какой-либо функциональной связи между расстояниями $L(ij)$ и $L(ji)$, то будут возможны только такие два типа симметрии. Перейдем к более подробному изложению и точным формулировкам.

Пусть $\mathfrak{M}=\{i,j,k,...\}$ – множество произвольной природы. Расстояние между точками этого множества определим с помощью некоторого функционального соответствия L: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$, область определения $\mathfrak{S}_L\subset\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ которого не обязательно совпадает со всем прямым произведением $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. Каждой паре $\langle ij\rangle\in\mathfrak{S}_L$ соответствие L сопоставляет некоторое число $L(ij)\in\mathbb{R}$, называемое расстоянием от точки i до точки j. Расстояния $L(ij)$ и $L(ji)$ в общем случае различны и мы будем предполагать, что они определены или не определены одновременно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функциональные соответствия L: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ и L': $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ эквивалентны, если совпадают их области определения $\mathfrak{S}_L$ и $\mathfrak{S}_{L'}$, и существует строго монотонная функция ψ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любой пары $\langle ij\rangle\in\mathfrak{S}_L$ имеет место равенство $L'(ij)=\psi(L(ij))$.

Исходя из замечания в работе Ю.И.Кулакова [1], будем аксиому симметрии формулировать следующим образом:

АКСИОМА СИММЕТРИИ. Для любых двух точек $i,j\in\mathfrak{M}$ таких, что пары $\langle ij\rangle$ и $\langle ji\rangle$ принадлежат $\mathfrak{S}_L$, расстояния $L(ij)$ и $L(ji)$ связаны соотношением

$$L(ij) = \theta(L(ji)), \tag{1}$$

где θ – некоторая строго монотонная функция одной переменной, область определения и область значений которой совпадает с областью значений $L(\mathfrak{S}_L)$ исходного функционального соответствия L.

ТЕОРЕМА. *Если расстояние между точками пространства $\mathfrak{M}$, определяемое с помощью функционального соответствия L: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$, удовлетворяет аксиоме симметрии, то это расстояние может быть либо симметричным, либо, с точностью до эквивалентности, антисимметричным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (1) для любой пары $\langle ij\rangle\in\mathfrak{S}_L$ получаем соотношение $\theta(\theta(L(ij)))=L(ij)$, из которого следует, что функция θ является решением функционального уравнения

$$\theta(\theta(x)) = x, \tag{2}$$

где $x\in L(\mathfrak{S}_L)\subset\mathbb{R}$. По предположению функция θ строго монотонная и имеет обратную. Если функция θ монотонно возрастает, то $\theta(x)=x$ и расстояние оказывается симметричным. Если функция θ монотонно убывает, то, перейдя к эквивалентному функциональному соответствию $L'(ij)=\psi(L(ij))$, где $\psi(x)=x-\theta(x)$ (очевидно, строго монотонно возрастающая функция), имеем в силу (1)

$$L'(ij) = L(ij)-\theta(L(ij)) = L(ij)-L(ji), \tag{3}$$

т.е. L' – антисимметричное расстояние. Теорема доказана.

Симметрия или антисимметрия расстояния при наличии некоторой связи (1) были установлены автором в [2] для того случая, когда это расстояние определялось с помощью функционального соответствия f: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to\mathbb{R}$ (задающего на n-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(n+1,n+1)$) и некоторого локального диффеоморфизма φ: $\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$:

$$L(ij) = f(i,\varphi(j)). \tag{4}$$

Для расстояния (4) соотношение (1) при известном соответствии f переходит в функциональное уравнение

$$f(i,\varphi(j)) = \theta(f(j,\varphi(i))) \tag{5}$$

относительно функции θ и диффеоморфизма φ. Решая уравнение (5) для соответствий

$$\begin{aligned} f(i\alpha) &= x^1(i)\xi^1(\alpha)+\ldots+x^n(i)\xi^n(\alpha),\\ f(i\alpha) &= x^1(i)\xi^1(\alpha)+\ldots+x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha)+x^n(i)+\xi^n(\alpha), \end{aligned} \tag{6}$$

приведенных в работе [3], можно найти одновременно и диффеоморфизм φ и функцию θ, определяющую тип симметрии расстояния (4). В специальной системе локальных координат x =

$=(x^1,\dots,x^{n-1},x^n)$ в многообразии $\mathfrak{M}$ выражения для расстояния $L(ij)$ (с точностью до локальной эквивалентности) можно записать в следующем виде

$$
\begin{aligned}
L(ij) &= g_{\lambda\sigma}x^{\lambda}(i)x^{\sigma}(j), \\
L(ij) &= h_{\mu\nu}x^{\mu}(i)x^{\nu}(j)+x^n(i)+ax^n(j),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $a=\pm1$; $g_{\lambda\sigma}=ag_{\sigma\lambda}$, $\lambda,\sigma=1,\dots,n$; $h_{\mu\nu}=ah_{\nu\mu}$, $\nu,\mu=1,\dots,n-1$, причем для $a=-1$ размерность n многообразия $\mathfrak{M}$ четна в первом из выражений (7) и нечетна во втором.

Из выражений (7) при некоторых естественных дополнительных условиях можно получить симметричные метрики римановых и псевдоримановых пространств постоянной кривизны ($a=+1$), а также антисимметричные метрики симплектических пространств *четной* и, обратим внимание, *нечетной* размерности ($a=-1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю.И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теоремы физических структур* // ДАН СССР. – 1970. – Т.193. – №5. – С.985–987.

2. Михайличенко Г.Г. *Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства (в рамках теории физических структур)* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – №6. – С.28–35.

3. Михайличенко Г.Г. *Решения функциональных уравнений в теории функциональных структур* // ДАН СССР. – 1972. – Т.206. – №5. – С.1056–1058.

г. Новосибирск

Поступила
19.05.1993