

УДК 517.948

Г. Г. Михайличенко

## ТЕРНАРНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (2, 2, 2)

Ю. И. Кулаковым была дана математическая формулировка теории физических структур [1]. В его работе приведены исходные аксиомы бинарной физической структуры ранга  $(m, n)$ , где  $m, n \geq 2$  — целые числа, на двух множествах  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ . Автором [2] предложена эквивалентная формулировка аксиом для этого же случая, допускающая обобщение. В настоящей работе естественным образом вводятся аксиомы для тернарной физической структуры ранга  $(m, n, l)$  на трех множествах  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{Z}$ , где  $m, n, l \geq 2$ , и функциональным методом, предложенным автором при изучении тернарной структуры на двух множествах [3], рассматривается простейший случай  $m = n = l = 2$ .

Пусть имеются три множества  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{Z}$ , элементы которых обозначаются: латинскими буквами множества  $\mathfrak{M}$ , греческими буквами первой половины алфавита множества  $\mathfrak{N}$ , греческими буквами второй половины алфавита множества  $\mathfrak{Z}$ , и определена числовая функция  $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{Z} \rightarrow \mathcal{R}$ , сопоставляющая каждой тройке  $(i, \alpha, \mu)$  из прямого произведения  $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{Z}$  действительное число  $a_{i\alpha\mu} \in \mathcal{R}$ . Из соображений удобства, очевидного в дальнейшем, вместо  $a_{i\alpha\mu}$  будем писать  $(i, \alpha, \mu)$ ,

Два элемента  $i, j \in \mathfrak{M}$  будем считать эквивалентными:  $i \sim j$ , если для любых  $\alpha \in \mathfrak{N}$  и  $\mu \in \mathfrak{Z}$  имеет место равенство  $(i, \alpha, \mu) = (j, \alpha, \mu)$ . Будем предполагать, что в множестве  $\mathfrak{M}$  все элементы, эквивалентные друг другу, отождествлены, т. е., если  $i \sim j$ , то элементы  $i, j \in \mathfrak{M}$  считаются совпадающими:  $i = j$ . Если же хотя бы для одного  $\alpha \in \mathfrak{N}$  или  $\mu \in \mathfrak{Z}$  выполняется неравенство  $(i, \alpha, \mu) \neq (j, \alpha, \mu)$ , то элементы  $i, j \in \mathfrak{M}$  будем считать различными. Аналогично определяются совпадение и различие элементов в множествах  $\mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{Z}$ .

В множествах  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{Z}$  определим топологию, введя фундаментальные системы окрестностей. Пусть  $i_0 \in \mathfrak{M}$  — некоторый фиксированный элемент, который будем называть точкой, и  $\varepsilon > 0$ . Обозначим через  $P(i_0, \varepsilon)$  множество всех тех элементов  $i \in \mathfrak{M}$ , для которых имеет место неравенство  $|(i, \alpha, \mu) - (i_0, \alpha, \mu)| < \varepsilon$  при любых  $\alpha \in \mathfrak{N}$  и  $\mu \in \mathfrak{Z}$ . Семейство всех множеств  $P(i_0, \varepsilon)$  для всевозможных значений положительного числа  $\varepsilon$  принимается за фундаментальную систему окрестностей точки  $i_0$ . Произвольной окрестностью  $P(i_0)$  назовем всякое подмножество из  $\mathfrak{M}$ , содержащее некоторую окрестность  $P(i_0, \varepsilon)$  из фундаментальной системы. Аналогично вводятся окрестности  $Q(\alpha_0, \varepsilon)$ ,  $S(\mu_0, \varepsilon)$  и фундаментальные системы окрестностей точек  $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$ ,  $\mu_0 \in \mathfrak{Z}$ . Произвольные окрестности точек  $\alpha_0$  и  $\mu_0$

обозначим через  $Q(\alpha_0)$  и  $S(\mu_0)$ . Легко проверить, что определенные выше системы окрестностей  $P(i_0)$ ,  $Q(\alpha_0)$ ,  $S(\mu_0)$  удовлетворяют аксиомам окрестности и определяют на множествах  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{Z}$  единственные топологические структуры. Топология в прямом произведении определяется естественным образом по топологии сомножителей. Элемент прямого произведения называется кортежем.

Пусть  $\mathfrak{M}^m$  есть  $m$ -кратное,  $\mathfrak{N}^n$  есть  $n$ -кратное и  $\mathfrak{Z}^l$  есть  $l$ -кратные прямые произведения множеств  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{Z}$ , соответственно, на себя, причем значения целых чисел  $m$ ,  $n$ ,  $l$  фиксированы. Исходя из функции  $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{Z} \rightarrow R$ , построим другую функцию  $a^{(m, n, l)}: \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \times \mathfrak{Z}^l \rightarrow R^{mnl}$ , сопоставляя каждому кортежу  $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau \rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \times \mathfrak{Z}^l$  длины  $m+n+l$  трехмерную матрицу размера  $m \times n \times l$

$$\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau \rangle \in R^{mnl}, \quad (1)$$

рассматриваемую как точку  $mnl$ -мерного пространства  $R^{mnl}$ . Множество значений функции  $a^{(m, n, l)}: \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \times \mathfrak{Z}^l \rightarrow R^{mnl}$  обозначим: через  $N$ . Приведем для пояснения линейную развертку матрицы (1).  $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau \rangle = [(i, \alpha, \mu), (i, \alpha, \nu), \dots, (i, \alpha, \tau), (i, \beta, \mu), \dots, (i, \beta, \tau), \dots, (j, \alpha, \mu), \dots, (v, \delta, \tau)] \in R^{mnl}$ , т. е.  $x_1 = (i, \alpha, \mu)$ ,  $x_2 = (i, \alpha, \nu), \dots, x_{mnl} = (v, \delta, \tau)$ .

В прямом произведении  $\mathfrak{N}^n \times \mathfrak{Z}^l$  возьмем кортеж  $\langle \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau \rangle$  длины  $n+l$  и построим отображение  $a[\alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau]: \mathfrak{M} \rightarrow R^{nl}$ , сопоставляя элементу  $i \in \mathfrak{M}$  двумерную матрицу  $(i, \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau) \in R^{nl}$  размера  $n \times l$ . Проекция этого отображения на подпространство меньшей размерности может быть получена вычеркиванием некоторых элементов в матрице. Например, при отображении проекции  $\text{pr}_{(\alpha, \mu)} a[\alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau]: \mathfrak{M} \rightarrow R^{n(l-1)}$  каждому  $i \in \mathfrak{M}$  сопоставляется матрица  $(i, \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau)$  без ее элемента  $(i, \alpha, \mu)$ . Аналогично могут быть построены отображения  $a[ijk \dots v, \mu\nu\sigma \dots \tau]: \mathfrak{N} \rightarrow R^{ml}$  и  $a[ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta]: \mathfrak{Z} \rightarrow R^{mn}$  для кортежей  $\langle ijk \dots v, \mu\nu\sigma \dots \tau \rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{Z}^l$  и  $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta \rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$ , сопоставляющие элементам  $\alpha \in \mathfrak{N}$  и  $\mu \in \mathfrak{Z}$  двумерные матрицы  $(ijk \dots v, \alpha, \mu\nu\sigma \dots \tau) \in R^{ml}$  и  $(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu) \in R^{mn}$  соответственно. Можно также рассмотреть проекции этих отображений, напр.,  $\text{pr}_{(i, \mu)} a[ijk \dots v, \mu\nu\sigma \dots \tau]: \mathfrak{N} \rightarrow R^{m(l-1)}$  и  $\text{pr}_{(i, \alpha)} a[ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta]: \mathfrak{Z} \rightarrow R^{m(n-1)}$ . Кортеж из прямого произведения считается недиагональным, если в нем различны все элементы из одного множества.

Будем говорить, что на множествах  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{Z}$  задана тернарная физическая структура ранга  $(m, n, l)$ , если выполнены следующие условия (аксиомы физической структуры).

А. Отображение  $a^{(m, n, l)}: \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \times \mathfrak{Z}^l \rightarrow N$  открыто; отображения  $\text{pr}_{(\alpha, \mu)} a[\alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau]: \mathfrak{M} \rightarrow R^{n(l-1)}$ ,  $\text{pr}_{(i, \mu)} a[ijk \dots v, \mu\nu\sigma \dots \tau]: \mathfrak{N} \rightarrow R^{m(l-1)}$ ,  $\text{pr}_{(i, \alpha)} a[ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta]: \mathfrak{Z} \rightarrow R^{m(n-1)}$  открыты для любых недиагональных кортежей  $\langle \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau \rangle \in \mathfrak{N}^n \times \mathfrak{Z}^l$ ,  $\langle ijk \dots v, \mu\nu\sigma \dots \tau \rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{Z}^l$ ,  $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta \rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$  соответственно.

В. Существует аналитическая функция  $\Phi: R^{mnl} \rightarrow R$  такая, что множество  $M$ , задаваемое уравнением  $\Phi = 0$ , совпадает с  $N$ , т. е.

$$\Phi[(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau)] = 0 \quad (2)$$

для любого кортежа  $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \delta, \mu\nu\sigma \dots \tau \rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \times \mathfrak{Z}^l$ .

С. Градиент  $\Phi$  отличен от нуля всюду на  $M$ , за исключением, может быть, множества меры нуль относительно  $M$ .

Ниже будет подробно рассмотрен простейший случай  $m = n = l = 2$ .

**Теорема.** Если четверка  $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L}, a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \rightarrow R \rangle$  образует тернарную физическую структуру ранга  $(2, 2, 2)$ , то в любых окрестностях  $P(i_0), Q(\alpha_0), S(\mu_0)$  произвольных точек  $i_0 \in \mathfrak{M}, \alpha_0 \in \mathfrak{N}, \mu_0 \in \mathfrak{L}$  найдутся элементы  $i_1 \in P(i_0), \alpha_1 \in Q(\alpha_0), \mu_1 \in S(\mu_0)$ , в некоторых окрестностях  $P(i_1), Q(\alpha_1), S(\mu_1)$  которых множество значений функции  $a^{(2, 2, 2)}: [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2 \rightarrow R^8$  может быть задано уравнением

$$\begin{aligned} & \Psi[(i, \alpha, \mu)] - \Psi[(i, \alpha, \nu)] - \Psi[(i, \beta, \mu)] + \Psi[(i, \beta, \nu)] - \\ & - \Psi[(j, \alpha, \mu)] + \Psi[(j, \alpha, \nu)] + \Psi[(j, \beta, \mu)] - \Psi[(j, \beta, \nu)] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $i, j \in P(i_1), \alpha, \beta \in Q(\alpha_1), \mu, \nu \in S(\mu_1), \Psi$  — строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки  $(i_1, \alpha_1, \mu_1) \in R$ .

**Доказательство.** В рассматриваемом случае  $m = n = l = 2$  уравнение (2) запишется в виде

$$\Phi[(ij, \alpha\beta, \mu\nu)] = 0 \quad (2')$$

для любого кортежа  $\langle ij, \alpha\beta, \mu\nu \rangle \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2$ .

Согласно условию А отображение  $\text{pr}_{(\alpha, \mu)} a[\alpha\beta, \mu\nu]: \mathfrak{M} \rightarrow R^3$ , задаваемое функцией  $i \rightarrow [(i, \alpha, \nu), (i, \beta, \mu), (i, \beta, \nu)] \in R^3$ , открыто для любого недиагонального кортежа  $\langle \alpha\beta, \mu\nu \rangle \in \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2$ . Проекция этого отображения на одномерное подпространство  $R$  также будет открытым отображением. Например, отображение  $a[\alpha, \mu]: \mathfrak{M} \rightarrow R$ , задаваемое функцией  $i \rightarrow (i, \alpha, \mu)$ , будет открытым для любых фиксированных элементов  $\alpha \in \mathfrak{N}$  и  $\mu \in \mathfrak{L}$ . Но в таком случае открытым будет также отображение  $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \rightarrow R$ , когда элементы  $\alpha$  и  $\mu$  не зафиксированы. Пусть  $i_0 \in \mathfrak{M}, \alpha_0 \in \mathfrak{N}, \mu_0 \in \mathfrak{L}$  — произвольные элементы. Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность точки  $(i_0, \alpha_0, \mu_0) \in R$ , определяемую неравенством  $|x - (i_0, \alpha_0, \mu_0)| < \varepsilon$ . Если  $i \in P(i_0, \varepsilon_1), \alpha \in Q(\alpha_0, \varepsilon_2), \mu \in S(\mu_0, \varepsilon_3)$ , где  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \varepsilon$ , то  $|(i, \alpha, \mu) - (i_0, \alpha_0, \mu_0)| < \varepsilon$  для любой тройки  $\langle i, \alpha, \mu \rangle \in P(i_0, \varepsilon_1) \times Q(\alpha_0, \varepsilon_2) \times S(\mu_0, \varepsilon_3)$ . Таким образом, мы показали, что исходное отображение  $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \rightarrow R$  является открытым и непрерывным. В соответствии с условием А отображение  $a^{(2, 2, 2)}: \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2 \rightarrow N \subset R^8$  открыто по индуцированной на  $N$  топологии. Легко проверить, что оно является также и непрерывным.

Возьмем произвольные точки  $i_0 \in \mathfrak{M}, \alpha_0 \in \mathfrak{N}, \mu_0 \in \mathfrak{L}$  и любые их окрестности  $P(i_0), Q(\alpha_0), S(\mu_0)$ . Множество  $N_0 \subset N$  значений функции  $a^{(2, 2, 2)}: [P(i_0)]^2 \times [Q(\alpha_0)]^2 \times [S(\mu_0)]^2 \rightarrow R^8$  содержит открытое относительно  $N$  подмножество. В соответствии с условием С в множестве  $N_0$  найдется точка, в которой градиент отличен от нуля. Это означает, что в самой точке и некоторой ее окрестности отлична от нуля хотя бы одна из частных производных функции  $\Phi$ . Условие В позволяет найти такой недиагональный кортеж  $\langle i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1 \rangle \in [P(i_0)]^2 \times [Q(\alpha_0)]^2 \times [S(\mu_0)]^2$ , для которого в соответствующей точке  $(i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1) \in N_0$  градиент  $\Phi$  не равен нулю. Предположим, что в точке  $(i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1)$  отлична от нуля производная функции  $\Phi$  по аргументу  $(j, \beta, \nu)$ . По теореме о неявных функциях уравнение (2') может быть однозначно разрешено относительно  $(j, \beta, \nu)$  в некоторой окрестности  $U = H \times V$  точки  $(i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1) \in R^8$ :

$$(j, \beta, \nu) = \Gamma [(i, \alpha\beta, \mu\nu), (j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu)], \quad (4)$$

причем функция  $\Gamma$  аналитична в семимерной окрестности  $V$ . В силу доказанной непрерывности функции  $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \rightarrow R$  по введенной топологии, элементы  $i, j \in \mathfrak{M}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ ,  $\mu, \nu \in \mathfrak{L}$ , для которых имеет место разрешение (4), будут образовывать некоторые окрестности  $P(i_1), P(j_1) \subset \mathfrak{M}$ ,  $Q(\alpha_1), Q(\beta_1) \subset \mathfrak{N}$ ,  $S(\mu_1), S(\nu_1) \subset \mathfrak{L}$  точек  $i_1, j_1 \in P(i_0)$ ,  $\alpha_1, \beta_1 \in Q(\alpha_0)$ ,  $\mu_1, \nu_1 \in S(\mu_0)$  соответственно. Уравнение (4) задает некоторую окрестность  $N_1 = U \cap N$  точки  $(i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1)$ .

В окрестности  $N_1$  может быть найдена такая точка, в которой все производные функции  $\Gamma$ , кроме, может быть, одной, отличны от нуля. Действительно, выделим в правой части уравнения (4) три аргумента  $(j, \alpha, \mu)$ ,  $(j, \alpha, \nu)$ ,  $(j, \beta, \mu)$ , содержащие общий им всем элемент  $j$ . Если  $\alpha \neq \beta$ ,  $\mu \neq \nu$ , то отображение  $\text{pr}_{(\beta, \alpha)} a [\alpha\beta, \mu\nu]: \mathfrak{M} \rightarrow R^3$ , задаваемое функцией  $j \rightarrow [(j, \alpha, \mu), (j, \alpha, \nu), (j, \beta, \mu)] \in R^3$ , согласно условию А открыто в  $R^3$ , т. е. три числа  $(j, \alpha, \mu)$ ,  $(j, \alpha, \nu)$ ,  $(j, \beta, \mu)$  при фиксированных различных элементах  $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$  и  $\mu, \nu \in \mathfrak{L}$  могут рассматриваться как независимые переменные. Поскольку  $i_1 \neq j_1$ ,  $\alpha_1 \neq \beta_1$ ,  $\mu_1 \neq \nu_1$ , их окрестности  $P(i_1), P(j_1) \subset \mathfrak{M}$ ,  $Q(\alpha_1), Q(\beta_1) \subset \mathfrak{N}$ ,  $S(\mu_1), S(\nu_1) \subset \mathfrak{L}$  можно взять непересекающимися, т. е. для всех элементов из этих окрестностей имеем  $i \neq j$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $\mu \neq \nu$ . Предположим, что в окрестности  $V$  на множестве положительной меры обращаются в нуль производные по каким-либо двум аргументам из  $(j, \alpha, \mu)$ ,  $(j, \alpha, \nu)$ ,  $(j, \beta, \mu)$ , напр.,  $(j, \alpha, \mu)$  и  $(j, \alpha, \nu)$ . В силу аналитичности функции  $\Gamma$  и ее производных это обращение в нуль будет тождественным, т. е. в уравнении (4) функция  $\Gamma$  не зависит от переменных  $(j, \alpha, \mu)$  и  $(j, \alpha, \nu)$ :

$$(j, \beta, \nu) = \Gamma_1 [(i, \alpha\beta, \mu\nu), (j, \beta, \mu)]. \quad (4')$$

В окрестности  $Q(\beta_1)$  точки  $\beta_1$ , где возможно представление (4'), возьмем два различных элемента  $\beta', \beta''$ , и в окрестности  $S(\nu_1)$  точки  $\nu_1$  также возьмем два различных элемента  $\nu'$  и  $\nu''$ . Запишем уравнение (4') для кортежей  $\langle ij, \alpha\beta', \mu\nu' \rangle$ ,  $\langle ij, \alpha\beta', \mu\nu'' \rangle$ ,  $\langle ij, \alpha\beta'', \mu\nu' \rangle \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2$ :

$$(j, \beta', \nu') = \Gamma_1 [(i, \alpha\beta', \mu\nu'), (j, \beta', \mu)],$$

$$(j, \beta', \nu'') = \Gamma_1 [(i, \alpha\beta', \mu\nu''), (j, \beta', \mu)],$$

$$(j, \beta'', \nu') = \Gamma_1 [(i, \alpha\beta'', \mu\nu'), (j, \beta'', \mu)].$$

В соответствии с условием А отображение  $\text{pr}_{(\beta'', \nu'')} a [\beta'\beta'', \nu'\nu'']: \mathfrak{M} \rightarrow R^3$ , задаваемое функцией  $j \rightarrow [(j, \beta', \nu'), (j, \beta', \nu''), (j, \beta'', \nu')]$ , должно быть открыто для недиагонального кортежа  $\langle \beta'\beta'', \nu'\nu'' \rangle \in \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2$ . Однако это невозможно, т. к. три координаты  $(j, \beta', \nu')$ ,  $(j, \beta', \nu'')$ ,  $(j, \beta'', \nu')$  являются аналитическими функциями только от двух параметров  $(j, \beta', \mu)$  и  $(j, \beta'', \mu)$ , т. е. совокупность точек  $[(j, \beta', \nu'), (j, \beta', \nu''), (j, \beta'', \nu')]$  при фиксированных элементах  $\beta', \beta''$  и  $\nu', \nu''$  образует в  $R^3$  аналитическое множество нулевой меры, которое не открыто в  $R^3$ , что противоречит условию А. Таким образом, производные функции  $\Gamma$  по переменным  $(j, \alpha, \mu)$  и  $(j, \alpha, \nu)$  могут одновременно обращаться в нуль только на множестве нулевой меры и на множестве полной меры в  $V$  одновременно в нуль не обращаются. Аналогично можно показать невозможность одновременного обращения в нуль на множестве полной меры производных

по другим парам аргументов из  $(j, \alpha, \mu)$ ,  $(j, \alpha, \nu)$ ,  $(j, \beta, \mu)$ . Это означает, что в окрестности  $V$  можно найти такую подокрестность  $V'$ , в которой, по крайней мере, по двум аргументам из трех, содержащих элемент  $j$ , производные функции  $\Gamma$  отличны от нуля всюду. Тогда в окрестности  $H \times V'$  функция  $\Phi$  уравнения (2') будет иметь отличные от нуля производные уже по трем аргументам, содержащим элемент  $j$ , т. к. между производными функций  $\Phi$  и  $\Gamma$  имеется связь, напр.,

$$\Gamma_{(j, \alpha, \mu)} = -\Phi_{(j, \alpha, \mu)} / \Phi_{(j, \beta, \nu)}.$$

Аналогичные рассуждения внутри окрестности  $H \times V'$  можно провести относительно переменных, содержащих элементы  $i \in \mathfrak{M}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ ,  $\mu, \nu \in \mathfrak{L}$ . В результате оказывается, что в  $N_1$  существует такая точка, в которой функция  $\Phi$  будет иметь отличные от нуля производные по всем аргументам, кроме, может быть, одного. Не внося дополнительных усложнений в обозначение, будем предполагать, что именно точка  $(i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1)$  обладает этим свойством. Пусть, для определенности, в точке  $(i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1)$  может обращаться в нуль только производная по переменной  $(j, \beta, \mu)$ .

В некоторой окрестности точки  $(i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1)$  возможно разрешение (4), причем функция  $\Gamma$  будет иметь отличные от нуля производные по всем аргументам, кроме, может быть,  $(j, \beta, \mu)$ . В окрестности  $P(i_1)$  точки  $i_1$ , где возможно представление (4), возьмем элемент  $i'$  и запишем уравнение (4) для кортежа  $(i' j, \alpha \beta, \mu \nu)$ :

$$(j, \beta, \nu) = \Gamma[(i', \alpha \beta, \mu \nu), (j, \alpha, \mu \nu), (j, \beta, \mu)]. \quad (4'')$$

Сравнивая уравнения (4) и (4''), получаем

$$\Gamma[(i, \alpha \beta, \mu \nu), (j, \alpha, \mu \nu), (j, \beta, \mu)] = \Gamma[(i', \alpha \beta, \mu \nu), (j, \alpha, \mu \nu), (j, \beta, \mu)]. \quad (5)$$

В соответствии с условием А аргументы  $(j, \alpha, \mu \nu)$ ,  $(j, \beta, \mu)$  можно рассматривать как независимые переменные. Фиксируя их и вводя обозначение

$$\Omega_1[(i, \alpha \beta, \mu \nu)] = \Gamma[(i, \alpha \beta, \mu \nu), (j, \alpha, \mu \nu), (j, \beta, \mu)]|_{(j, \alpha, \mu \nu), (j, \beta, \mu) = \text{const}},$$

приходим к уравнению

$$\Omega_1[(i, \alpha \beta, \mu \nu)] - \Omega_1[(i', \alpha \beta, \mu \nu)] = 0, \quad (6)$$

которое задает множество  $N$  в некоторой окрестности точки  $(i_1 j_1, \alpha_1 \beta_1, \mu_1 \nu_1)$ . Заметим, что любая производная левой части уравнения (6) отлична от нуля, как это следует из свойств функции  $\Omega_1$ .

Уравнение (6) можно разрешить относительно аргумента  $(i', \beta, \nu)$ . Возьмем элемент  $\alpha' \in Q(\alpha_1)$ . Повторив процесс получения уравнения (6) будем иметь уравнение

$$\Xi_1[(ii', \alpha, \mu \nu)] - \Xi_1[(ii', \alpha', \mu \nu)] = 0, \quad (7)$$

задающее множество  $N$  уже в окрестности точки  $(i_1 j_1, \alpha_1 \alpha_1, \mu_1 \nu_1)$ . Наконец, аналогичное преобразование уравнения (7) с использованием элемента  $\mu' \in S(\mu_1)$  приводит к уравнению

$$\Sigma[(ii', \alpha \alpha', \mu)] - \Sigma[(ii', \alpha \alpha', \mu')] = 0, \quad (8)$$

которое задает множество  $N$  в некоторой окрестности точки  $(i_1 j_1, \alpha_1 \alpha_1, \mu_1 \mu_1)$ , соответствующей диагональному кортежу  $(i_1 j_1, \alpha_1 \alpha_1, \mu_1 \mu_1)$ .

В дальнейшем будет удобно ввести переобозначение элементов и уравнение (8) записывать в виде

$$\Sigma[(ij, \alpha\beta, \mu)] - \Sigma[(ij, \alpha\beta, \nu)] = 0, \quad (9)$$

имея в виду, что  $i, j \in P(i_1)$ ,  $\alpha, \beta \in Q(\alpha_1)$ ,  $\mu, \nu \in S(\mu_1)$ . Повторяя переход от уравнения (4) к уравнению (9) в другой последовательности, приходим еще к двум уравнениям, задающим множество  $N$  в окрестности той же точки  $(i_1 i_1, \alpha_1 \alpha_1, \mu_1 \mu_1)$ :

$$\Omega[(i, \alpha\beta, \mu\nu)] - \Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)] = 0, \quad (10)$$

$$\Xi[(ij, \alpha, \mu\nu)] - \Xi[(ij, \beta, \mu\nu)] = 0. \quad (11)$$

Отметим, что функции  $\Omega$ ,  $\Xi$ ,  $\Sigma$  в уравнениях (10), (11), (9) имеют отличными от нуля все производные. Предположение о том, что уравнение (2') могло быть разрешено относительно последнего аргумента, не вносило дополнительных ограничений. Как легко видеть, уравнения (9) — (11) могут быть получены и при других предположениях.

Каждое из уравнений (9) — (11) задает некоторую окрестность точки  $(i_1 i_1, \alpha_1 \alpha_1, \mu_1 \mu_1)$ , представляющую собой множество значений функции  $a^{(2, 2, 2)}: [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2 \rightarrow R^8$ . Очевидно, что это обстоятельство налагает на функции  $\Omega$ ,  $\Xi$ ,  $\Sigma$  дополнительные ограничения.

Разрешим уравнения (10), (11) относительно аргумента  $(i, \alpha, \mu)$ :

$$(i, \alpha, \mu) = X \{ \Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)], (i, \beta, \mu\nu), (i, \alpha, \nu) \}, \quad (12)$$

$$(i, \alpha, \mu) = X_1 \{ \Xi[(ij, \beta, \mu\nu)], (j, \alpha, \mu\nu), (i, \alpha, \nu) \},$$

откуда получаем функциональное уравнение

$$X \{ \Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)], (i, \beta, \mu\nu), (i, \alpha, \nu) \} = X_1 \{ \Xi[(ij, \beta, \mu\nu)], (j, \alpha, \mu\nu), (i, \alpha, \nu) \}, \quad (13)$$

т. к. все аргументы, входящие в равенство (13), могут рассматриваться как независимые переменные в соответствии с условием А.

Продифференцируем уравнение (13) по переменным  $(j, \beta, \nu)$   $(i, \beta, \nu)$  и разделим один результат на другой:

$$\frac{X_{\xi} \{ \Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)], (i, \beta, \mu\nu), (i, \alpha, \nu) \} \Omega_{(j, \beta, \nu)} [(j, \alpha\beta, \mu\nu)]}{X_{(i, \beta, \nu)} \{ \Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)], (i, \beta, \mu\nu), (i, \alpha, \nu) \}} = \\ = \Xi_{(j, \beta, \nu)} [(ij, \beta, \mu\nu)] / \Xi_{(i, \beta, \nu)} [(ij, \beta, \mu\nu)], \quad (14)$$

где  $X_{\xi}$  — производная функции  $X$  по первому аргументу. Относительно функции  $X$  получено функционально-дифференциальное уравнение. Если в уравнении (14) зафиксировать переменные  $(j, \beta, \mu\nu)$ ,  $(j, \alpha, \nu)$  и ввести обозначение

$$\xi = \Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)] |_{(j, \beta, \mu\nu), (j, \alpha, \nu) = \text{const}}$$

то оно переходит в однородное уравнение в частных производных для функции  $X$ :

$$X_{\xi} [\xi, (i, \beta, \mu\nu), (i, \alpha, \nu)] A_1(\xi) + \\ + X_{(i, \beta, \nu)} [\xi, (i, \beta, \mu\nu), (i, \alpha, \nu)] B_1[(i, \beta, \mu\nu)] = 0.$$

Поскольку коэффициенты  $A_1$ ,  $B_1$  не обращаются в нуль, полученное уравнение не имеет особенностей и может быть решено методом характеристик:

$$X[\xi, (i, \beta, \mu\nu), (i, \alpha, \nu)] = X_2\{A(\xi) + B[(i, \beta, \mu\nu)], (i, \alpha, \nu), (i, \beta, \mu)\}, \quad (15)$$

где  $X_2, A, B$  — аналитические функции, причем из свойств функции  $X$  вытекает, что  $A_\xi(\xi) \neq 0, B_{(i, \beta, \nu)}[(i, \beta, \mu\nu)] \neq 0$  и отлична от нуля производная функции  $X_2$  по первому аргументу.

Подставим решение (15) в уравнение (12)

$$(i, \alpha, \nu) = X_2\{A[\Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)]] + B[(i, \beta, \mu\nu)], (i, \alpha, \nu), (i, \beta, \mu)\}$$

и разрешим результат подстановки относительно суммы  $A + B$ :

$$A[\Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)]] = -B[(i, \beta, \mu\nu)] + \Theta_1[(i, \alpha, \mu\nu), (i, \beta, \mu)].$$

Сравнивая последний результат с уравнением (10), получим

$$B[(i, \beta, \mu\nu)] - B[(j, \beta, \mu\nu)] = \Theta_1[(i, \alpha, \mu\nu), (i, \beta, \mu)] - \Theta_1[(j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu)]. \quad (16)$$

Уравнение (16) запишем для кортежей  $\langle ij, \alpha\gamma, \mu\nu \rangle, \langle ij, \beta\gamma, \mu\nu \rangle \in \in [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2$ , где элемент  $\gamma$  взят из той же окрестности  $Q(\alpha_1)$ , которой принадлежат элементы  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$B[(i, \gamma, \mu\nu)] - B[(j, \gamma, \mu\nu)] = \Theta_1[(i, \alpha, \mu\nu), (i, \gamma, \mu)] - \Theta_1[(j, \alpha, \mu\nu), (j, \gamma, \mu)],$$

$$B[(i, \gamma, \mu\nu)] - B[(j, \gamma, \mu\nu)] =$$

$$= \Theta_1[(i, \beta, \mu\nu), (i, \gamma, \mu)] - \Theta_1[(j, \beta, \mu\nu), (j, \gamma, \mu)].$$

Левые части выписанных уравнений совпадают, а потому должны быть равны правые. Фиксируя переменные  $\langle ij, \gamma, \mu \rangle$  при условии  $\langle i, \gamma, \mu \rangle = \langle j, \gamma, \mu \rangle$ , получим

$$\Theta[(i, \alpha, \mu\nu)] - \Theta[(i, \beta, \mu\nu)] - \Theta[(j, \alpha, \mu\nu)] + \Theta[(j, \beta, \mu\nu)] = 0. \quad (17)$$

Заметим, что аналитическая функция  $\Theta$  от двух переменных имеет отличные от нуля производные по каждой переменной в некоторой окрестности точки  $(i_1, \alpha_1, \mu_1) \in R^2$ . Уравнение (17) является естественным следствием исходных уравнений (10) и (11).

Аналогично, рассматривая совместно уравнения (9) и (10), можно получить еще одно уравнение

$$\Lambda[(i, \alpha\beta, \mu)] - \Lambda[(i, \alpha\beta, \nu)] - \Lambda[(j, \alpha\beta, \mu)] + \Lambda[(j, \alpha\beta, \nu)] = 0, \quad (18)$$

где аналитическая функция  $\Lambda$  имеет отличную от нуля производную по каждой переменной из двух в некоторой окрестности точки  $(i_1, \alpha_1, \mu_1) \in R^2$ .

Уравнения (17) и (18) задают одно и то же множество значений функции  $a^{(2, 2, 2)}: [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2 \rightarrow R^8$ . Если эти уравнения представить в виде, разрешенном относительно аргумента  $\langle j, \alpha, \mu \rangle$ , то полученные выражения должны совпасть, т. е. уравнения (17) и (18) определяют неявно  $\langle j, \alpha, \mu \rangle$  как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности  $\langle i, \alpha, \mu \rangle$ . Из неявных заданий (17) и (18) можно получить

$$\frac{\partial \langle j, \alpha, \mu \rangle}{\partial \langle i, \alpha, \mu \rangle} = \frac{\Theta_{(i, \alpha, \mu)}[\langle i, \alpha, \mu \nu \rangle]}{\Theta_{(j, \alpha, \mu)}[\langle j, \alpha, \mu \nu \rangle]} = \frac{\Lambda_{(i, \alpha, \mu)}[\langle i, \alpha \beta, \mu \rangle]}{\Lambda_{(j, \alpha, \mu)}[\langle j, \alpha \beta, \mu \rangle]}. \quad (19)$$

Вследствие отсутствия в равенстве (19) аргументов  $(ij, \beta, \nu)$ , оно представляет собой тождество по всем переменным, входящим в него. Зафиксируем в тождестве (19) все переменные, кроме  $(i, \alpha, \mu\nu)$ :

$$\Theta_{(i, \alpha, \mu)} [(i, \alpha, \mu\nu)] = \Psi_{(i, \alpha, \mu)} [(i, \alpha, \nu)],$$

откуда после интегрирования имеем

$$\Theta [(i, \alpha, \mu\nu)] = \Psi [(i, \alpha, \mu)] + \Psi_1 [(i, \alpha, \nu)]. \quad (20)$$

Из свойств функции  $\Theta$  следует, что аналитические функции  $\Psi$  и  $\Psi_1$  имеют отличные от нуля производные в некоторой окрестности точки  $(i_1, \alpha_1, \mu_1) \in R$ .

Подставим функцию (20) в уравнение (17):

$$\begin{aligned} & \Psi [(i, \alpha, \mu)] - \Psi [(i, \beta, \mu)] - \Psi [(j, \alpha, \mu)] + \Psi [(j, \beta, \mu)] = \\ & = -\Psi_1 [(i, \alpha, \nu)] + \Psi_1 [(i, \beta, \nu)] + \Psi_1 [(j, \alpha, \nu)] - \Psi_1 [(j, \beta, \nu)]. \end{aligned} \quad (21)$$

В уравнении (21) можно положить  $\mu = \nu$ , т. к.  $\mu, \nu \in S(\mu_1)$ :

$$\begin{aligned} & \Psi [(i, \alpha, \nu)] - \Psi [(i, \beta, \nu)] - \Psi [(j, \alpha, \nu)] + \Psi [(j, \beta, \nu)] = \\ & = -\Psi_1 [(i, \alpha, \nu)] + \Psi_1 [(i, \beta, \nu)] + \Psi_1 [(j, \alpha, \nu)] - \Psi_1 [(j, \beta, \nu)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Сопоставляя уравнение (21) и соотношение (22), приходим к уравнению (3), которое задает множество значений функции  $a^{(2, 2, 2)}: [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2 \rightarrow R^3$ , при этом  $i, j \in P(i_1)$ ,  $\alpha, \beta \in Q(\alpha_1)$ ,  $\mu, \nu \in S(\mu_1)$ . Теорема доказана.

В заключение отметим, что в схеме тернарных физических структур ранга  $(m, n, l)$  полученный здесь результат, как показывают предварительные исследования, является единственно возможным, т. е. тернарные физические структуры существуют только в простейшем случае  $m = n = l = 2$ , в противоположность бинарным физическим структурам ранга  $(m, n)$ , которые существуют для  $m = n \geq 2$ ,  $m = n + 1 \geq 3$ ,  $n = m + 1 \geq 3$ ,  $m = n + 2 = 4$ ,  $n = m + 2 = 4$  (см. [2]). Указанное отличие бинарных и тернарных структур позволяет понять особую роль, которую играют бинарные отношения в физике и математике.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Г. Решетняку за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю. И. Математическая формулировка теории физических структур. Сиб. матем. журн., т. XII, № 5, 1971, с. 1142—1145.
2. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. ДАН СССР, т. 206, № 5, 1972, с. 1056—1058.
3. Михайличенко Г. Г. Тернарная физическая структура ранга (3, 2) Укр. матем. журн., т. 22, № 6, 1970, с. 837—841.

г. Новосибирск

Поступила  
6 XII 1972