

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ТРЕХМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ЛОКАЛЬНО ТРАНЗИТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА

Софус Ли в 1893 г. нашел все конечномерные группы преобразований плоскости R^2 [1], список которых воспроизведен также в монографии [2]. Но классификация групп преобразований необходима для отыскания феноменологически симметричных геометрических структур, в которых взаимные расстояния для определенного числа точек пространства функционально связаны [3]. В данной работе проводится полная с точностью до эквивалентности классификация трехмерных локальных групп Ли локально транзитивных преобразований пространства R^3 . Эта классификация может быть использована для нахождения всех 3-метрических феноменологически симметричных геометрий ранга 3 в R^3 , когда двум точкам из R^3 сопоставляются три числа, являющиеся двухточечными инвариантами соответствующих групп преобразований, причем девять взаимных “расстояний” для трех точек функционально связаны тремя независимыми уравнениями.

Рассмотрим две локальные r -мерные группы Ли $\mathfrak{G}^r(\lambda)$ и $\mathfrak{G}^r(\sigma)$ локальных преобразований n -мерных многообразий \mathfrak{M} и \mathfrak{N} с одной и той же параметрической группой \mathfrak{G}^r

$$x' = \lambda(x, a), \quad \xi' = \sigma(\xi, a), \quad (1)$$

где $a \in \mathfrak{G}^r$, $x, x' \in \mathfrak{M}$ и $\xi, \xi' \in \mathfrak{N}$, λ и σ — эффективные гладкие действия \mathfrak{G}^r в \mathfrak{M} и \mathfrak{N} .

Обозначим через

$$X_\omega = \lambda_\omega^\mu(x) \partial / \partial x^\mu, \quad \Xi_\omega = \sigma_\omega^\mu(\xi) \partial / \partial \xi^\mu, \quad (2)$$

где $\omega = 1, \dots, r$; $\mu = 1, \dots, n$, инфинитезимальные операторы групп $\mathfrak{G}^r(\lambda)$ и $\mathfrak{G}^r(\sigma)$ в некоторых локальных системах координат $x = (x^1, \dots, x^n)$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ и параметров $a = (a^1, \dots, a^r)$. Поскольку группа \mathfrak{G}^r действует эффективно, операторы X_ω и Ξ_ω линейно независимы с постоянными коэффициентами и образуют естественные сопряженные базисы соответствующих изоморфных r -мерных алгебр Ли преобразований \mathfrak{M} и \mathfrak{N} с совпадающими в этих базисах структурными константами.

Определение. Группы преобразований $\mathfrak{G}^r(\lambda)$ и $\mathfrak{G}^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу \mathfrak{G}^r , называются локально эквивалентными, если существует такое локально обратимое отображение $w : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, при котором действия (1) переходят друг в друга, т. е. имеет место равенство

$$w(\lambda(x, a)) = \sigma(w(x), a)$$

для всех x из некоторой области в \mathfrak{M} и всех a из некоторой окрестности единичного элемента $e \in \mathfrak{G}^r$.

Из теорем С. Ли о связи групп преобразований и их алгебр следует, что группы $\mathfrak{G}^r(\lambda)$ и $\mathfrak{G}^r(\sigma)$ локально эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая замена координат $x \rightarrow \xi$ в \mathfrak{M} , при которой операторы X_ω и Ξ_ω будут иметь одинаковые выражения. Имея это в виду, будем говорить, что эквивалентны сами алгебры Ли с базисами (2), если эквивалентны группы (1), которым эти алгебры соответствуют. Эквивалентные группы преобразований, очевидно, подобны в смысле С. Ли, но, как отмечено в [4], подобные группы не обязательно эквивалентны.

Рассмотрим трехмерную локальную группу Ли эффективных локальных преобразований трехмерного пространства $R^3 = \{x, y, z\}$. Инфинитезимальные операторы этой группы

$$X_\omega = \lambda_\omega(x, y, z)\partial_x + \sigma_\omega(x, y, z)\partial_y + \tau_\omega(x, y, z)\partial_z \quad (3)$$

линейно независимы и образуют естественный координатный базис трехмерной алгебры Ли преобразований R^3 . В выражениях (3) полагаем $\omega = 1, 2, 3$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$. Действие группы \mathfrak{G}^3 в R^3 будет, очевидно, локально транзитивным в том и только том случае, если

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

Полная с точностью до изоморфизма классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли была дана Бианки в 1918 г. Приведем ее здесь по монографии [5], записывая соответствующие выражения для трех возможных коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных операторов X_1, X_2, X_3

$$0, \quad 0, \quad 0; \quad (5)$$

$$0, \quad 0, \quad X_1; \quad (6)$$

$$0, \quad -X_1, \quad X_1 + X_2; \quad (7)$$

$$0, \quad -X_1, \quad pX_2; \quad (8)$$

$$0, \quad -X_2, \quad -X_1 + qX_2; \quad (9)$$

$$X_3, \quad X_2, \quad X_1; \quad (10)$$

$$X_3, \quad X_2, \quad -X_1, \quad (11)$$

где $-1 \leq p \leq 1$, $-2 < q < 2$.

Теорема. *Базисные операторы (3) трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локально транзитивных преобразований трехмерного пространства R^3 , имеющей в базисе X_1, X_2, X_3 структуру коммутационных соотношений (5)–(11), в надлежаще выбранной системе локальных координат $\{x, y, z\}$ задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z; \quad (5')$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \partial_z; \quad (6')$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \quad (7')$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y + \partial_z; \quad (8')$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x+qy)\partial_y + \partial_z; \quad (9')$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \operatorname{tg} y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \sec y \sin x \partial_z, \\ X_3 &= \operatorname{tg} y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \sec y \cos x \partial_z; \end{aligned} \quad (10')$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \exp y \sin x \partial_z, \\ X_3 &= \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \exp y \cos x \partial_z; \end{aligned} \quad (11')$$

где $-1 \leq p \leq +1$, $-2 < q < +2$.

Произведем в R^3 локально обратимую гладкую замену координат

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \psi(x, y, z), \quad \vartheta = \varkappa(x, y, z), \quad (12)$$

причем $\partial(\varphi, \psi, \varkappa)/\partial(x, y, z) \neq 0$. В новых координатах ξ, η, ϑ для операторов (3) будем иметь следующие выражения:

$$X_\omega = (\lambda_\omega \varphi_x + \sigma_\omega \varphi_y + \tau_\omega \varphi_z) \partial_\xi + (\lambda_\omega \psi_x + \sigma_\omega \psi_y + \tau_\omega \psi_z) \partial_\eta + (\lambda_\omega \varkappa_x + \sigma_\omega \varkappa_y + \tau_\omega \varkappa_z) \partial_\vartheta. \quad (13)$$

Пусть функции φ, ψ, \varkappa в (12) являются независимыми решениями системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_x + \sigma_1 \varphi_y + \tau_1 \varphi_z &= 1, \\ \lambda_1 \psi_x + \sigma_1 \psi_y + \tau_1 \psi_z &= 0, \\ \lambda_1 \varkappa_x + \sigma_1 \varkappa_y + \tau_1 \varkappa_z &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

в которой, очевидно, $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \tau_1^2 \neq 0$. Тогда для оператора X_1 получаем максимально простое выражение $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь в (13) к прежним обозначениям коэффициентов и координат, можем записать

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda_2(x, y, z) \partial_x + \sigma_2(x, y, z) \partial_y + \tau_2(x, y, z) \partial_z, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y, z) \partial_x + \sigma_3(x, y, z) \partial_y + \tau_3(x, y, z) \partial_z. \end{aligned} \quad (15)$$

В выражениях (15) $\lambda_1 = 1, \sigma_1 = 0, \tau_1 = 0$. Система уравнений (14) с такими коэффициентами значительно упрощается: $\varphi_x = 1, \psi_x = 0, \varkappa_x = 0$, и ее независимые решения

$$\xi = x + \varphi(y, z), \quad \eta = \psi(y, z), \quad \vartheta = \varkappa(y, z), \quad (16)$$

в которых $\partial(\psi, \varkappa)/\partial(y, z) \neq 0$, определяют такую замену координат в R^3 , в которой X_1 по-прежнему имеет простейшую форму.

По классификации (5)–(11) коммутатор $[X_1, X_2]$ либо равен нулю, либо совпадает с оператором X_3 . Рассмотрим сначала первый случай

$$[X_1, X_2] = 0. \quad (17)$$

Подставим в коммутатор (17) выражения (15) для операторов X_1 и X_2 . В результате получаем уравнения $\lambda_{2x} = 0, \sigma_{2x} = 0, \tau_{2x} = 0$ с решениями $\lambda_2 = \lambda(y, z), \sigma_2 = \sigma(y, z), \tau_2 = \tau(y, z)$ и потому

$$X_2 = \lambda(y, z) \partial_x + \sigma(y, z) \partial_y + \tau(y, z) \partial_z. \quad (18)$$

Если в операторах (15) $\sigma_2 = 0$ и $\tau_2 = 0$, то не будет выполняться условие локальной транзитивности (4), т. е. в операторе (18) должно быть $\sigma^2 + \tau^2 \neq 0$. Осуществим в нем допустимую замену координат (16)

$$X_2 = (\lambda + \sigma \varphi_y + \tau \varphi_z) \partial_\xi + (\sigma \psi_y + \tau \psi_z) \partial_\eta + (\sigma \varkappa_y + \tau \varkappa_z) \partial_\vartheta.$$

Пусть функции φ, ψ, \varkappa являются решениями уравнений $\lambda + \sigma \varphi_y + \tau \varphi_z = 0, \sigma \psi_y + \tau \psi_z = 1, \sigma \varkappa_y + \tau \varkappa_z = 0$ с $\partial(\psi, \varkappa)/\partial(y, z) \neq 0$. Тогда для оператора X_2 получаем $X_2 = \partial_\eta$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к выражениям

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ X_3 &= \lambda(x, y, z) \partial_x + \sigma(x, y, z) \partial_y + \tau(x, y, z) \partial_z, \end{aligned} \quad (19)$$

с допустимой заменой координат

$$\xi = x + \varphi(z), \quad \eta = y + \psi(z), \quad \vartheta = \varkappa(z), \quad (20)$$

в которой $\varkappa'(z) \neq 0$.

Обратимся теперь ко второму коммутатору $[X_3, X_1]$, который для случая (17) согласно классификации (5)–(11) может быть равен 0, $-X_1$, $-X_2$. Пусть

$$[X_3, X_1] = 0. \quad (21)$$

Подставляя операторы (19) в коммутатор (21), получаем уравнения $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$ с решениями $\lambda = \lambda(y, z)$, $\sigma = \sigma(y, z)$, $\tau = \tau(y, z)$, т. е. вместо (19) можем записать

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, \\ X_3 &= \lambda(y, z)\partial_x + \sigma(y, z)\partial_y + \tau(y, z)\partial_z. \end{aligned} \quad (22)$$

Выясним теперь, какие возникают дополнительные ограничения на выражения (22), если третий коммутатор обращается в нуль: $[X_2, X_3] = 0$. Подставляя в это условие операторы (22), получаем уравнения $\lambda_y = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_y = 0$ и, соответственно для оператора X_3 выражение

$$X_3 = \lambda(z)\partial_x + \sigma(z)\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (20)

$$X_3 = (\lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (\sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

По условию (4) $\tau \neq 0$ и потому функции φ , ψ , κ можно взять из решений уравнений $\lambda + \tau\varphi' = 0$, $\sigma + \tau\psi' = 0$, $\tau\kappa' = 1$. В результате получаем $X_3 = \partial_\vartheta$ и в прежних обозначениях операторы (5').

Итак, для абелевой алгебры (5) получено с точностью до эквивалентности одно представление операторами локально транзитивных преобразований пространства R^3 , задаваемой выражениями (5') в формулировке теоремы.

Пусть, далее, операторы (22) удовлетворяют условию $[X_2, X_3] = X_1$ алгебры (6). Подставим в это условие операторы (22). В результате получаем уравнения $\lambda_y = 1$, $\sigma_y = 0$, $\tau_y = 0$, а после их интегрирования — выражение для оператора X_3

$$X_3 = (y + \lambda(z))\partial_x + \sigma(z)\partial_y + \tau(z)\partial_z.$$

Произведем допустимую замену координат (20)

$$X_3 = (y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (\sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку $\tau \neq 0$, функции φ , ψ , κ возьмем из решений уравнений $-\psi + \lambda + \tau\varphi' = 0$, $\sigma + \tau\psi' = 0$, $\tau\kappa' = 1$, т. е. $X_3 = \eta\partial_\xi + \partial_\vartheta$, и в прежних обозначениях координат получаем выражения (6') базисных операторов представления алгебры (6).

Выше был полностью рассмотрен случай коммутирования по условию (21) операторов X_1 и X_3 . Перейдем ко второму случаю из трех возможных, когда по классификации (5)–(11) при условии (17) коммутатор

$$[X_3, X_1] = -X_1. \quad (23)$$

Подставим операторы (19), удовлетворяющие условию (17), в коммутатор (23). Интегрируя получающиеся при этом уравнения $\lambda_x = 1$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$, приходим к выражениям

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, \\ X_3 &= (x + \lambda(y, z))\partial_x + \sigma(y, z)\partial_y + \tau(y, z)\partial_z \end{aligned} \quad (24)$$

с допустимой заменой координат (20).

Операторы (24) удовлетворяют двум коммутационным соотношениям (17) и (23). По общей классификации (5)–(11) третий коммутатор $[X_2, X_3]$ может принимать при этом значения $X_1 + X_2$ и pX_2 , где $-1 \leq p \leq +1$. Рассмотрим отдельно эти два случая. Предположим сначала, что

$[X_2, X_3] = X_1 + X_2$. Подставляя в это условие операторы (24) и интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 1$, $\sigma_y = 1$, $\tau_y = 0$, для оператора X_3 получаем выражение

$$X_3 = (x + y + \lambda(z))\partial_x + (y + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем замену координат (20)

$$X_3 = (x + y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (y + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

По условию локальной транзитивности (4) $\tau \neq 0$, и поэтому функции φ , ψ , κ можно взять из решений системы уравнений $\lambda - \varphi - \eta + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - \psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\kappa' = 1$. Для оператора X_3 имеем тогда выражение $X_3 = (\xi + \eta)\partial_\xi + \eta\partial_\eta + \partial_\vartheta$, и в прежних обозначениях координат получаем базисные операторы (7') представления алгебры (7).

Предположим теперь, что $[X_2, X_3] = pX_2$, где $-1 \leq p \leq 1$. Подставим в этот коммутатор операторы (24). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 0$, $\sigma_y = p$, $\tau_y = 0$, для оператора X_3 приходим к выражению

$$X_3 = (x + \lambda(z))\partial_x + (py + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (20)

$$X_3 = (x + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (py + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку по условию (4) для операторов (24) $\tau \neq 0$, функции φ , ψ , κ можно взять из решений системы уравнений $\lambda - \varphi + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - p\psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\kappa' = 1$. Для оператора X_3 приходим к выражению $X_3 = \xi\partial_\xi + p\eta\partial_\eta + \partial_\vartheta$, а после возвращения к прежним обозначениям координат получаем базисные операторы (8') представления алгебры (8).

Вернемся к операторам (19), подчиняющимся коммутационному соотношению (17), и потребуем, чтобы они удовлетворяли также соотношению

$$[X_3, X_1] = -X_2, \quad (25)$$

входящему в алгебру (9). Поставим в соотношение (25) операторы (19). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 1$, $\tau_x = 0$, получаем выражения

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y \\ X_3 &= \lambda(y, z)\partial_x + (x + \sigma(y, z))\partial_y + \tau(y, z)\partial_z \end{aligned} \quad (26)$$

с допустимой заменой координат (20).

Операторы (26) удовлетворяют соотношениям (17) и (25). Потребуем для них выполнения третьего коммутационного соотношения $[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2$, где $-2 < q < +2$, входящего в алгебру (9). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 1$, $\sigma_y = q$, $\tau_y = 0$, приходим к следующему выражению для оператора X_3 :

$$X_3 = (-y + \lambda(z))\partial_x + (x + qy + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (20)

$$X_3 = (-y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (x + qy + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку $\tau \neq 0$, функции φ , ψ , κ можно взять из решений системы уравнений $\lambda + \psi + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - \varphi + q\psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\kappa' = 1$ и тогда $X_3 = -\eta\partial_\xi + (\xi + q\eta)\partial_\eta + \partial_\vartheta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (9') представления алгебры (9).

Выше был полностью рассмотрен случай, когда по классификации (5)–(11) первый коммутатор $[X_1, X_2]$ обращается в нуль. Перейдем к исследованию второго возможного случая, когда этот коммутатор отличен от нуля

$$[X_1, X_2] = X_3. \quad (27)$$

При подстановке операторов (15) в коммутационное соотношение (27) устанавливаются следующие связи: $\lambda_{2x} = \lambda_3$, $\sigma_{2x} = \sigma_3$, $\tau_{2x} = \tau_3$, используя которые перепишем эти операторы, опустив для упрощения записи индекс “2”,

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(x, y, z)\partial_x + \sigma(x, y, z)\partial_y + \tau(x, y, z)\partial_z, \\ X_3 &= \lambda_x(x, y, z)\partial_x + \sigma_x(x, y, z)\partial_y + \tau_x(x, y, z)\partial_z, \end{aligned} \quad (28)$$

причем замена координат (16) по-прежнему остается допустимой.

Пусть еще для операторов (28) выполняется второе коммутационное соотношение алгебр (10) и (11)

$$[X_3, X_1] = X_2. \quad (29)$$

При подстановке операторов (28) в соотношение (29) получаем уравнения $\lambda_{xx} + \lambda = 0$, $\sigma_{xx} + \sigma = 0$, $\tau_{xx} + \tau = 0$, общие решения которых хорошо известны

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= \lambda(y, z) \sin x + \mu(y, z) \cos x, \\ \sigma(x, y, z) &= \sigma(y, z) \sin x + \nu(y, z) \cos x, \\ \tau(x, y, z) &= \tau(y, z) \sin x + \rho(y, z) \cos x, \end{aligned} \quad (30)$$

где по условию локальной транзитивности (4) $\sigma^2 + \nu^2 \neq 0$, $\tau^2 + \rho^2 \neq 0$.

Произведем в операторах (28) с коэффициентами (30) допустимую замену координат (16). Функцию φ возьмем из решений уравнения $\mu \cos \varphi - \lambda \sin \varphi + (\nu \cos \varphi - \sigma \sin \varphi)\varphi_y + (\rho \cos \varphi - \tau \sin \varphi)\varphi_z = 0$. Если $\nu \sin \varphi + \sigma \cos \varphi = 0$ и $\rho \sin \varphi + \tau \cos \varphi = 0$ (и потому, очевидно, $\nu \cos \varphi - \sigma \sin \varphi \neq 0$ и $\rho \cos \varphi - \tau \sin \varphi \neq 0$), то, беря функцию \varkappa из решений уравнения $(\nu \cos \varphi - \sigma \sin \varphi)\varkappa_y + (\rho \cos \varphi - \tau \sin \varphi)\varkappa_z = 0$, приходим к противоречию с условием (4). Аналогичная ситуация возникает и при $\nu \cos \varphi - \sigma \sin \varphi = 0$ и $\rho \cos \varphi - \tau \sin \varphi = 0$. Поэтому будем предполагать, что $\nu \sin \varphi + \sigma \cos \varphi \neq 0$ или $\rho \sin \varphi + \tau \cos \varphi \neq 0$ и $\nu \cos \varphi - \sigma \sin \varphi \neq 0$ или $\rho \cos \varphi - \tau \sin \varphi \neq 0$. Функции ψ и \varkappa возьмем из решений уравнений

$$\begin{aligned} (\nu \sin \varphi + \sigma \cos \varphi)\psi_y + (\rho \sin \varphi + \tau \cos \varphi)\psi_z &= 0, \\ (\nu \cos \varphi - \sigma \sin \varphi)\varkappa_y + (\rho \cos \varphi - \tau \sin \varphi)\varkappa_z &= 1, \end{aligned}$$

которые всегда имеют независимые решения. Действительно, если $\nu\tau - \sigma\rho \neq 0$, то независимы отличное от постоянной решение ψ первого уравнения и любое решение \varkappa второго уравнения. Если же $\nu\tau - \sigma\rho = 0$, то независимы отличные от постоянных решения ψ и \varkappa_0 первого уравнения и однородной части второго. Поэтому, если решение ψ и некоторое частное решение \varkappa_1 второго уравнения окажутся зависимыми, то независимыми, очевидно, будут решения ψ и $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1$. Для оператора X_2 , например, в прежних обозначениях можем записать тогда следующее выражение:

$$X_2 = \lambda(y, z) \sin x \partial_x + \nu(y, z) \cos x \partial_y + (\tau(y, z) \sin x + \cos x) \partial_z. \quad (31)$$

Произведем в операторе (31) допустимую замену координат (16) с $\varphi(y, z) = 0$:

$$X_2 = \lambda \sin x \partial_\xi + (\tau \psi_z \sin x + (\nu \psi_y + \psi_z) \cos x) \partial_\eta + (\tau \varkappa_z \sin x + (\nu \varkappa_y + \varkappa_z) \cos x) \partial_\theta. \quad (31')$$

Если $\tau = 0$, то полагаем $\nu \varkappa_y + \varkappa_z = 0$. Если же $\tau \neq 0$, но $\nu = 0$, то полагаем $\varkappa_z = 0$. В обоих случаях приходим к противоречию с условием локальной транзитивности (4). Поэтому будем ниже предполагать, что одновременно $\tau \neq 0$ и $\nu \neq 0$.

Забегая несколько вперед, подставим операторы (28) с явным выражением (31) в третий коммутатор $[X_2, X_3] = \varepsilon X_1$ алгебр (10) и (11), где $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$ соответственно. При такой подстановке, в частности, получаем уравнение $\tau \nu_z = 0$, из которого при $\tau \neq 0$ следует $\nu_z = 0$, т. е.

$\nu(y, z) = \nu(y)$. Поэтому функции ψ и \varkappa в операторе (31') возьмем из независимых решений уравнений $\psi_z = 0$, $\nu\psi_y = 1$, $\nu\kappa_y + \kappa_z = 0$ с $\kappa_z \neq 0$ и тогда $X_2 = \lambda(\eta, \vartheta) \sin \xi \partial_\xi + \cos \xi \partial_\eta + \tilde{\tau}(\eta, \vartheta) \sin \xi \partial_\vartheta$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, для операторов X_1, X_2, X_3 , получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(y, z) \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \tau(y, z) \sin x \partial_z, \\ X_3 &= \lambda(y, z) \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \tau(y, z) \cos x \partial_z, \end{aligned} \quad (32)$$

где, очевидно, $\tau \neq 0$.

Операторы (32) удовлетворяют первым двум коммутационным соотношениям (27) и (29) алгебр (10), (11). Предположим, что они удовлетворяют еще третьему коммутационному соотношению $[X_2, X_3] = X_1$ алгебры (10). Уравнения $\lambda_y = \lambda^2 + 1$ и $\tau_y - \lambda\tau = 0$, возникающие при этом, легко интегрируются

$$\lambda(y, z) = \operatorname{tg}(y + a(z)), \quad \tau(y, z) = \tau(z) \operatorname{sec}(y + a(z)), \quad (33)$$

где $a(z)$ и $\tau(z)$ — произвольные функции одной переменной, причем $\tau(z) \neq 0$.

Произведем в операторах (32) с коэффициентами (33) замену координат (20), полагая $\varphi(z) = 0$, $\tau(z)\varkappa'(z) = 1$, $\psi(z) = a(z)$. Для оператора X_2 , например, в прежних обозначениях получаем такое выражение

$$X_2 = \operatorname{tg} y \sin x \partial_x + (\cos x + \sigma(z) \operatorname{sec} y \sin x) \partial_y + \operatorname{sec} y \sin x \partial_z,$$

где $\sigma(z)$ — произвольная функция одной переменной. В последнем выражении произведем общую допустимую замену координат (16). Функции φ, ψ, \varkappa при этом возьмем из решений следующей системы шести уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_y &= \sin \varphi \operatorname{tg} \psi, & \psi_y &= \cos \varphi, & \varkappa_y &= \sin \varphi \operatorname{sec} \psi, \\ \varphi_z &= \cos y \cos \varphi \operatorname{tg} \psi - \sigma(z) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi - \sin y, \\ \psi_z &= -\sin \varphi \cos y - \sigma(z) \cos \varphi, \\ \varkappa_z &= \cos y \cos \varphi \operatorname{sec} \psi - \sigma(z) \sin \varphi \operatorname{sec} \psi, \end{aligned}$$

которая интегрируема, т. к. $\varphi_{yz} = \varphi_{zy}$, $\psi_{yz} = \psi_{zy}$, $\varkappa_{yz} = \varkappa_{zy}$, и, кроме того, $\partial(\psi, \varkappa)/\partial(y, z) \neq 0$. В результате получаем базисные операторы (10') представления алгебры (10).

В заключение подставим операторы (32) в третий коммутатор $[X_2, X_3] = -X_1$ алгебры (11). Возникающие при этом уравнения $\lambda_y = \lambda^2 - 1$, $\tau_y - \lambda\tau = 0$ имеют следующие четыре решения:

$$\lambda(y, z) = 1, \quad \tau(y, z) = \tau(z) \exp y; \quad (34)$$

$$\lambda(y, z) = -1, \quad \tau(y, z) = \tau(z) \exp(-y); \quad (35)$$

$$\lambda(y, z) = -\operatorname{th}(y + a(z)), \quad \tau(y, z) = \tau(z) / \operatorname{ch}(y + a(z)); \quad (36)$$

$$\lambda(y, z) = -\operatorname{cth}(y + a(z)), \quad \tau(y, z) = \tau(z) / \operatorname{sh}(y + a(z)), \quad (37)$$

где $a(z)$ и $\tau(z)$ — произвольные функции одной переменной, причем $\tau(z) \neq 0$.

Произведем в операторах (32) с коэффициентами (34) замену координат $\xi = x$, $\eta = y$, $\vartheta = \varkappa(z)$, полагая $\tau(z)\varkappa'(z) = 1$. В прежних обозначениях координат получаем базисные операторы (11') представления алгебры (11). Аналогично, если в операторах (32) с коэффициентами (35) произвести замену координат $\xi = x + \pi$, $\eta = -y$, $\vartheta = \varkappa(z)$ и положить $\tau(z)\varkappa'(z) = -1$, то в прежних обозначениях координат снова получим базисные операторы (11').

В операторах (32) с коэффициентами (36) и (37) предварительно произведем замену координат (20), полагая $\varphi(z) = 0$, $\psi(z) = a(z)$ и $\tau(z)\varkappa'(z) = 1$. В прежних обозначениях для оператора X_2 , например, получаем такое выражение

$$X_2 = \lambda(y) \sin x \partial_x + (\cos x + \sigma(z)\tau(y) \sin x) \partial_y + \tau(y) \sin x \partial_z,$$

где либо $\lambda(y) = -\operatorname{th} y$ и $\tau(y) = 1/\operatorname{ch} y$, либо $\lambda(y) = -\operatorname{cth} y$ и $\tau(y) = 1/\operatorname{sh} y$, а $\sigma(z)$ — произвольная функция одной переменной.

Далее, в последнем выражении произведем общую допустимую замену координат (16). Функции φ , ψ , \varkappa при этом возьмем из решений следующей интегрируемой системы шести уравнений:

$$\begin{aligned}\varphi_y &= \sin \varphi, & \psi_y &= \cos \varphi, & \varkappa_y &= \sin \varphi \exp \psi, \\ \varphi_z &= \cos \varphi / \tau(y) - \sigma(z) \sin \varphi - \lambda(y) / \tau(y), \\ \psi_z &= -\sin \varphi / \tau(y) - \sigma(z) \cos \varphi, \\ \varkappa_z &= \cos \varphi \exp \psi / \tau(y) - \sigma(z) \sin \varphi \exp \psi,\end{aligned}$$

для которой якобиан $\partial(\psi, \varkappa) / \partial(y, z)$ отличен от нуля. В результате снова получаем базисные операторы (11') представления алгебры (11). Этим утверждением и завершается доказательство основной теоремы данной работы, сформулированной сразу после классификации (5)–(11) трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли.

Литература

1. Lie S., Engel F. *Teorie der Transformations gruppen*. Bd. 3. – Leipzig: Teubner, 1893.
2. Владимиров С.А. *Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля*. – М.: Атомиздат, 1979. – 167 с.
3. Михайличенко Г.Г. *О групповой и феноменологической симметрии в геометрии* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 269. – № 2. – С. 284–288.
4. Бредон Г.Э. *Введение в теорию компактных групп преобразований*. – М.: Наука, 1980. – 440 с.
5. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности*. – М.: Наука, 1966. – 496 с.

Горно-алтайский государственный университет

Поступили
первый вариант 11.05.1995
окончательный вариант 22.08.1996