Минобрнауки Росии
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
"Горно-Алтайский государственный университет"

Г.Г. Михайличенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Приложение
А.Н. Бородина

Горно-Алтайск
РИО Горно-Алтайского госуниверситета
2012

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Горно-Алтайского госуниверситета

УДК 514.1 ББК 22.3 М 69

Г.Г. Михайличенко

Математические основы и результаты теории физических структур: Монография / Михайличенко Г.Г. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012, - 146 с.

ISBN 978-5-91425-079-6

Р е ц е н з е т ы: доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.С. Владимиров (МГУ); доктор физ.-мат. наук, в.н.с. Е.Е. Витяев (ИМ СО РАН); кандидат физ.-мат. наук, доцент В.А. Кыров (ГАГУ)

Теория физических структур (ТФС) была предложена профессором Ю.И. Кулаковым для классификации законов физики. История возникновения и развития этой теории достаточно подробно изложена в его монографии [1]. Физическая структура представляет собой геометрию одного или двух множеств, метрическая функция которой паре точек сопоставляет число. Ее феноменологическая симметрия по Кулакову означает, что для любой совокупности некоторого конечного числа точек все их взаимные расстояния функционально связаны. Такие геометрии наделены групповой симметрией по Клейну, которая эквивалентна феноменологической симметрии, и многие из них имеют содержательную физическую интерпретацию. Поэтому, прежде всего, они должны быть точно определены и подробно изучены как чисто математические объекты. В данной книге представлены математические основы и полученные к настоящему времени классификационные результаты ТФС. Книга адресована научным сотрудникам и преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов, всем тем, чьи интересы лежат в области алгебры, геометрии и теоретической физики, которые хотели бы использовать ТФС в своих исследованиях или внести свой вклад в развитие ее математического аппарата.

ISBN 978-5-91425-079-6

© Г.Г. Михайличенко, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для иллюстрации феноменологической и групповой симметрий в обычной геометрии, а также связи между ними, рассмотрим сначала плоскость Евклида. В декартовой прямоугольной системе координат (x, y) квадрат расстояния $\rho(ij)$ между любыми двумя ее точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задается функцией

$$f(ij) = \rho^2(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2. \tag{B.1}$$

Возьмем четыре произвольные точки i, j, k, l и запишем для них шесть значений метрической функции (B.1): $f(ij)$, $f(ik)$, $f(il)$, $f(jk)$, $f(jl)$, $f(kl)$. Хорошо известно, что шесть взаимных расстояний между любыми четырьмя точками евклидовой плоскости функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) \\ 1 & f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) \\ 1 & f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) \\ 1 & f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{B.2}$$

Геометрический смысл соотношения (B.2) состоит в том, что объем тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю. В соответствии с терминологией Ю.И. Кулакова [2] соотношение (B.2), справедливое для любой четверки $<ijkl>$, выражает феноменологическую симметрию евклидовой плоскости.

По метрической функции (B.1) можно найти множество движений плоскости Евклида, то есть таких гладких и обратимых ее преобразований

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \tag{B.3}$$

относительно которых эта функция сохраняется: $f(i'j') = f(ij)$.

Действительно, если преобразование (B.3) является движением, то для его функций λ и σ получаем функциональное уравнение

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2,$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$. Сводя это уравнение к системе функционально-дифференциальных соотношений, можно найти все его решения:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y) &= ax - \varepsilon by + c, \\ \sigma(x,y) &= bx + \varepsilon ay + d\ , \end{aligned}\right\} \tag{B.4}$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные.

Множество всех движений (B.3) с функциями (B.4) является группой, определяющей групповую симметрию плоскости Евклида. С другой стороны, эта трехпараметрическая группа преобразований координатной плоскости (x, y) задает на ней по Ф.Клейну [3] евклидову геометрию. В частности, метрическая функция $f(ij)$ может быть найдена решением функционального уравнения

$$f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$$

как ее двухточечный инвариант. Общее решение этого уравнения совпадает с метрической функцией (B.1) с точностью до масштабного преобразования:

$$f(ij) = \psi((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2),$$

где ψ – произвольная функция одной переменной.

Выясним, имеется ли связь феноменологической и групповой симметрий для произвольной плоской геометрии, задаваемой метрической функцией

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{B.5}$$

обобщающей выражение (B.1).

Жесткая фигура на плоскости при любом разумном определении понятия движения имеет три степени свободы. Возьмем четырехточечную фигуру $<ijkl>$. Каждая ее точка задается двумя координатами, а вся фигура – восемью. Шесть значений функции (B.5) для этой фигуры должны быть зависимы, так как, иначе, число ее степеней свободы будет равно только двум: $8 - 6 = 2$. Таким образом, для любой четверки $<ijkl>$ должна существовать функциональная связь

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0, \tag{B.6}$$

выражающая *феноменологическую симметрию* плоской геометрии с метрической функцией (В.5).

Простые соображения приводят также к выводу о том, что если имеет место связь (В.6), то существует трехпараметрическая группа движений:

$$\left.\begin{aligned} x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3)\ , \end{aligned}\right\} \tag{В.7}$$

относительно которой метрическая функция (В.5) является двухточечным инвариантом: $f(i'j') = f(ij)$ или

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{В.8}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i; a^1, a^2, a^3)$.

Множество всех движений (В.7) определяет *групповую симметрию* плоской геометрии с метрической функцией (В.5).

Заметим, что приведенные выше соображения о связи феноменологической и групповой симметрий применимы не только в отношении плоскости Евклида, но и в отношении других двумерных геометрий (плоскости Лобачевского, плоскости Минковского, симплектической плоскости, обычной двумерной сферы и т.д.).

Г.Гельмгольц в своей работе "О фактах, лежащих в основании геометрии"[4] высказал предположение, что метрическая функция n-мерного пространства не может быть произвольной если в нем твердое тело имеет $n(n+1)/2$ степеней свободы. Но в таком случае между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ точек твердого тела должна существовать функциональная связь, так как при ее отсутствии число степеней свободы $(n+2)$-точечной жесткой фигуры с общим расположением точек, движение которой однозначно определяет движение всего твердого тела, уменьшится ровно на единицу. Поэтому естественно было предположить, что и феноменологическая симметрия n-мерного пространства невозможна при произвольной метрической функции. Для $n = 1$ и $n = 2$ это было установлено в работах автора [5] и [6], а для $n = 3$ – в работе В.Х.Лева [7].

Заметим еще, что задачу классификации всех плоских (двумерных) геометрий, в которых "положение фигуры задается тремя условиями", впервые сформулировал А.Пуанкаре в своей работе "Об основных гипотезах геометрии"[8].

Метрическая функция $f(ij)$ задает геометрию пространства. Действительно, по этой функции можно найти группу движений, относительно которой она является двухточечным инвариантом. Групповая же симметрия лежит в основе "Эрлангенской программы" Ф.Клейна 1872 года [3], согласно которой геометрия пространства есть теория инвариантов некоторой группы его преобразований. С другой стороны, в геометрии обнаруживает себя феноменологическая симметрия, выражаемая некоторой функциональной связью между всеми взаимными расстояниями для определенного числа точек пространства. На эту симметрию впервые особое внимание обратил Ю.И.Кулаков [2], сделав ее основным принципом своей теории физических структур [1].

Рассмотрим множество состояний некоторой термодинамической системы. Каждой паре состояний $< ij >$ сопоставим два числа, равные двум количествам тепла $Q^{TS}(ij)$ и $Q^{ST}(ij)$, которые система отдает внешним телам при ее переходе из состояния i в состояние j по двум различным путям TS и ST, состоящим из равновесных изотермического ($T = \mathrm{const}$) и адиабатического ($S = \mathrm{const}$) процессов:

$$\left.\begin{aligned} Q^{TS}(ij) &= (S_i - S_j)T_i, \\ Q^{ST}(ij) &= (S_i - S_j)T_j \ , \end{aligned}\right\} \tag{B.9}$$

где S – энтропия и T – температура системы.

Двухкомпонентная тепловая функция $Q = (Q^{TS}, Q^{ST})$ с выражениями (B.9) для ее компонент задает на плоскости (S, T) геометрию, которая, подобно евклидовой геометрии на плоскости, феноменологически симметрична, с одной стороны, и наделена групповой симметрией – с другой.

Возьмем произвольные три состояния i, j, k. Тогда дополнительно к двум количествам тепла, задаваемым выражениями (B.9), можно выписать еще четыре: $Q^{TS}(ik), Q^{ST}(ik)$ и $Q^{TS}(jk)$, $Q^{ST}(jk)$ для пар состояний $<ik>$ и $<jk>$. Из этих шести выражений можно исключить три энтропии S_i, S_j, S_k и три температуры T_i, T_j, T_k состояний i, j, k, в результате чего получаются две независимые функциональные связи между всеми количествами тепла, задаваемые следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0 & -Q^{ST}(ij) & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ij) & 0 & -Q^{ST}(jk) \\ Q^{TS}(ik) & Q^{TS}(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\
\\
&\begin{vmatrix} Q^{TS}(ij) & Q^{TS}(jk) & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ik) & 0 & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ik) & -Q^{ST}(ij) & -Q^{ST}(jk) \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (B.10)$$

Соотношения (B.10), справедливые для любой тройки состояний $< ijk >$, выражают феноменологическую симметрию двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости (S, T) двухкомпонентной тепловой функцией (B.9). Группа движений в этой геометрии состоит из всех тех гладких и обратимых преобразований

$$S' = \lambda(S, T), \quad T' = \sigma(S, T) \qquad (B.11)$$

плоскости (S, T), которые сохраняют обе компоненты функции (B.9):

$$\left.\begin{aligned} (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) = (S_i - S_j)T_i, \\ (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) = (S_i - S_j)T_j\ . \end{aligned}\right\} \qquad (B.12)$$

Решения этой системы функциональных уравнений легко находятся методом разделения переменных – координат состояний i и j:

$$\lambda(S, T) = aS + b, \quad \sigma(S, T) = T/a, \qquad (B.13)$$

где $a \neq 0$, b – произвольные постоянные.

Множество преобразований (B.11) с функциями (B.13) является группой всех движений, которая определяет групповую симметрию двумерной двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости (S, T) функцией (B.9). Таким образом, к плоскости термодинамических состояний тоже применима Эрлангенская программа Ф.Клейна [3]. В частности, тепловая функция $Q(ij)$ может быть найдена решением функционального уравнения

$$Q(S'_i, T'_i, S'_j, T'_j) = Q(S_i, T_i, S_j, T_j)$$

как двухточечный инвариант группы преобразований (В.11), который совпадает с ней с точностью до масштабного преобразования:

$$Q(ij) = \psi((S_i - S_j)T_i, (S_i - S_j)T_j),$$

где $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ – двухкомпонентная функция двух переменных.

Легко установить, что феноменологическая симметрия геометрии, задаваемой на плоскости (x, y) некоторой двухкомпонентной функцией

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{В.14}$$

где $f = (f^1, f^2)$, выражается соотношением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0, \tag{В.15}$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$. Групповая же симметрия этой геометрии определяется группой всех движений:

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2), \quad y' = \sigma(x, y; a^1, a^2), \tag{В.16}$$

зависящей от двух непрерывных параметров a^1, a^2, относительно которой обе компоненты метрической функции (В.14) сохраняются: $f(i'j') = f(ij)$, являясь ее двухточечными инвариантами. Заметим, что, как и в случае плоскости Евклида, здесь групповая симметрия также эквивалентна феноменологической симметрии.

Ю.И.Кулаков в своих исследованиях по основаниям физики [9] предложил математическую модель строения физического закона, рассматриваемого как феноменологически симметричная связь между измеряемыми в опыте величинами. Эта модель, названная им *физической структурой*, приложима к обычной геометрии и представляет собой своеобразную геометрию двух множеств с метрической функцией, сопоставляющей число паре точек, но не из одного множества, а из двух разных. В новой геометрии естественно вводится движение как пара таких преобразований исходных множеств, которые сохраняют метрическую функцию. Совокупность всех движений является группой и определяет групповую симметрию этой геометрии.

Следуя работе [9], рассмотрим второй закон Ньютона в механике и закон Ома в электродинамике, записав их в такой форме, которая позволит выявить их феноменологическую симметрию.

Пусть i – материальное тело, масса которого равна m_i, и α – ускоритель, характеризуемый силой F_α. Под ускорителем подразумевается какое-то другое тело, которое при взаимодействии с данным телом изменяет его скорость. Измеряемой в опыте величиной является ускорение $a_{i\alpha}$, которое телу i сообщает ускоритель α. Второй закон Ньютона в его традиционной форме утверждает, что произведение массы тела на сообщаемое ему ускорение равно действующей силе:

$$m_i a_{i\alpha} = F_\alpha. \tag{B.17}$$

Возьмем произвольные два тела i, j и произвольные два ускорителя α, β. Дополнительно к соотношению (B.17) запишем еще три:

$$m_i a_{i\beta} = F_\beta, \quad m_j a_{j\alpha} = F_\alpha, \quad m_j a_{j\beta} = F_\beta.$$

Из этих четырех соотношений можно исключить массы m_i,m_j тел i, j, силы F_α,F_β ускорителей α, β и получить функциональную связь только между ускорениями, задаваемую следующим уравнением:

$$a_{i\alpha} a_{j\beta} - a_{i\beta} a_{j\alpha} = 0. \tag{B.18}$$

По терминологии Ю.И.Кулакова [9] функциональная связь (B.18), имеющая место для любых двух тел i, j и любых двух ускорителей α, β, представляет уравнение второго закона Ньютона в феноменологически симметричной форме.

Перейдем к электродинамике. Проводнику i с сопротивлением R_i и источнику тока α с электродвижущей силой $\mathcal{E}_\alpha$ и внутренним сопротивлением r_α сопоставим ток $I_{i\alpha}$, измеряемый амперметром в замкнутой цепи:

$$I_{i\alpha} = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + r_\alpha}. \tag{B.19}$$

Возьмем произвольные три проводника i, j, k и произвольные два источника тока α, β. Тогда дополнительно к току $I_{i\alpha}$ по выражению (B.19) можно выписать еще пять его значений:

$$I_{i\beta}, I_{j\alpha}, I_{j\beta}, I_{k\alpha}, I_{k\beta}.$$

Из шести выражений для тока могут быть исключены сопротивления R_i, R_j, R_k проводников i, j, k, электродвижущие силы $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta$ и внутренние сопротивления r_α, r_β источников тока α, β, в результате чего получается функциональная связь только между токами, задаваемая следующим уравнением:

$$\begin{vmatrix} I_{i\alpha} & I_{i\beta} & I_{i\alpha}I_{i\beta} \\ I_{j\alpha} & I_{j\beta} & I_{j\alpha}I_{j\beta} \\ I_{k\alpha} & I_{k\beta} & I_{k\alpha}I_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{B.20}$$

Функциональная связь (B.20), справедливая для любых трех проводников i, j, k и любых двух источников тока α, β, представляет по терминологии Кулакова [9] закон Ома в феноменологически симметричной форме.

Обращает на себя внимание принципиальная общность уравнений (B.18), (B.20) и (B.2), (B.10), задающих феноменологически симметричные функциональные связи между измеряемыми в опыте величинами: для любых двух материальных тел i, j и любых двух ускорителей α, β четыре значения ускорения a связаны уравнением (B.18); для любых трех проводников i, j, k и любых двух источников тока α, β шесть значений тока I связаны уравнением (B.20); для любых четырех точек i, j, k, l евклидовой плоскости шесть значений квадрата расстояния $f = \rho^2$ между ними связаны уравнением (B.2); для любых трех состояний i, j, k термодинамической системы шесть количеств тепла $Q = (Q^{TS}, Q^{ST})$ связаны уравнением (B.10).

В каждом из четырех рассмотренных примеров мы имеем дело с *функцией пары точек*, определяющей в некотором обобщенном смысле расстояние между ними, то есть с *метрической функцией*: в уравнении (B.18) ускорение $a_{i\alpha}$ из второго закона Ньютона (B.17) есть такое расстояние между телом i и ускорителем α, которые являются точками (элементами) физически различных множеств – множества материальных тел и множества ускорителей; аналогично, в уравнении (B.20) ток $I_{i\alpha}$ из закона Ома (B.19) есть расстояние между проводником i и источником тока α, которые являются точками (элементами) физически различных множеств – множества проводников и множества источников тока; в уравнении (B.2) метрическая функция f сопоставляет, согласно формуле (B.1), паре точек i и j евклидовой плоскости число $f(ij)$, равное квадрату обычного расстояния $\rho(ij)$ между ними, а в уравнениях (В.10) тепловая функция Q сопоставляет паре состояний i и j, являющихся точками соответствующей плоскости термодинамических состояний, два количества тепла $Q^{TS}(ij)$, $Q^{ST}(ij)$, определяемые выражениями (В.9), которые естественно рассматривать как два расстояния между ними.

Согласно определению Ю.И.Кулакова [9] функция ускорения (В.17) на множестве материальных тел и множестве ускорителей задает *физическую структуру ранга* (2,2), а функция тока (В.19) на множестве проводников и множестве источников тока задает *физическую структуру ранга* (3,2). Эти физические структуры представляют собой своеобразные геометрии двух множеств, феноменологическая симметрия которых выражается уравнениями (В.18) и (В.20) соответственно. Аналогично, метрическая функция (В.1) задает на плоскости *физическую структуру ранга* 4, то есть геометрию обычной евклидовой плоскости, феноменологическая симметрия которой выражается уравнением (В.2). И наконец, тепловая функция (В.9) задает на плоскости термодинамических состояний *физическую структуру ранга* 3 как двумерную двуметрическую геометрию, феноменологическая симметрия которой выражается уравнениями (В.10).

На примерах евклидовой плоскости и плоскости термодинамических состояний, задаваемых метрическими функциями (В.1) и (В.9), мы убедились в том, что их групповая симметрия, определяемая множеством всех движений, и их феноменологическая симметрия эквивалентны друг другу. Естественно предположить, что аналогичная ситуация имеет место и в геометрии двух множеств – физической структуре. Под движением в этой геометрии будем понимать совокупность двух одновременных преобразований каждого из множеств, сохраняющих обобщенное расстояние между точками любой пары, для которой оно определено.

Преобразования

$$m' = \lambda(m), \quad F' = \sigma(F) \qquad (B.21)$$

множества материальных тел и множества ускорителей составляют движение, если они сохраняют функцию ускорения $a = F/m$, определяемую вторым законом Ньютона (B.17):

$$\frac{\sigma(F)}{\lambda(m)} = \frac{F}{m}.$$

Относительно функций λ и σ получено простое функциональное уравнение, решение которого находится методом разделения переменных:

$$\lambda(m) = cm, \quad \sigma(F) = cF, \tag{$B.22$}$$

где $c \neq 0$ – произвольная постоянная. Множество всех преобразований (B.21) с функциями (B.22) является однопараметрической группой движений, определяющей групповую симметрию физической структуры ранга (2,2) как феноменологически симметричной геометрии, задаваемой на множестве материальных тел и множестве ускорителей функцией ускорения.

Если группа преобразований (B.21) известна, то функция ускорения $a = a(m, F)$ может быть найдена решением другого функционального уравнения

$$a(m', F') = a(m, F),$$

как ее двухточечный инвариант, который определяет закон Ньютона (B.17) с точностью до масштабного преобразования:

$$a = \chi(F/m),$$

где χ – функция одной переменной. Ее содержательный смысл состоит в возможности выбора шкалы акселерометра – прибора, измеряющего ускорение. Ясно, что физический смысл второго закона Ньютона, его феноменологическая и групповая симметрии не зависят от такого выбора.

Найдем преобразования множества проводников и множества источников тока:

$$R' = \lambda(R), \quad \mathcal{E}' = \sigma(\mathcal{E}, r), \quad r' = \rho(\mathcal{E}, r), \tag{B.23}$$

сохраняющих функцию тока $I = \mathcal{E}/(R+r)$, определяемую законом Ома (B.19):

$$\frac{\sigma(\mathcal{E}, r)}{\lambda(R) + \rho(\mathcal{E}, r)} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Относительно функций λ, σ, ρ получено функциональное уравнение, решение которого находится методом дифференцирования по независимым переменным $R, \mathcal{E}, r$ и последующего их разделения:

$$\lambda(R) = aR + b,\ \sigma(\mathcal{E}, r) = a\mathcal{E},\ \rho(\mathcal{E}, r) = ar - b, \qquad (B.24)$$

где $a \neq 0$ и b – произвольные постоянные.

Преобразования (B.23) с функциями (B.24) составляют двухпараметрическую группу движений, которая определяет групповую симметрию физической структуры ранга (3,2) как феноменологически симметричной геометрии, задаваемой на множестве проводников и множестве источников тока функцией тока. С другой стороны, по известной группе преобразований (B.23) можно, решая функциональное уравнение

$$I(R', \mathcal{E}', r') = I(R, \mathcal{E}, r),$$

найти функцию тока $I = I(R, \mathcal{E}, r)$ как ее двухточечный инвариант:

$$I = \chi(\frac{\mathcal{E}}{R + r}),$$

где χ – функция одной переменной. Таким образом, закон Ома (B.19) восстанавливается с точностью до масштабного преобразования, которое не меняет физический смысл закона, его феноменологическую и групповую симметрии, отражая возможность выбора шкалы амперметра – прибора для измерения тока.

Подводя итог вышеизложенному, приходим к выводу, что для введения геометрии двух множеств имеются не только физические, но и математические предпосылки. Дело в том, что метрическая функция такой геометрии допускает группу движений, которая ее однозначно определяет. Таким образом, "Эрлангенская программа" Ф. Клейна (1872) с обычной геометрии на одном множестве естественно переносится на геометрию двух множеств, причем групповая и феноменологическая симметрии оказываются эквивалентными в каждой из них.

Приложение написано А.Н.Бородиным, который исследовал физические структуры на абстрактных множествах. Их предварительное изучение показало, что такие известные алгебраические структуры, как груда и группа, являются естественным следствием *принципа фено-*

менологической симметрии – основного постулата теории физических структур.

ГЛАВА I
Геометрия как физическая структура на одном множестве

§1. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$, являющееся sn-мерным многообразием, где s и n – натуральные числа, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, сопоставляющая каждой паре $< ij > \in \mathfrak{S}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(ij) = (f^1(ij), \ldots, f^s(ij)) \in R^s$. Двухточечную функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем называть *метрической*, не требуя, однако, положительной определенности ее s компонент и выполнения для каждой из них аксиом обычной метрики. Заметим, что в общем случае $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, то есть, возможно, функция f не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляет s чисел, но в последующем изложении удобно в явной записи $f(ij)$ подразумевать, что $< ij > \in \mathfrak{S}_f$. Обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}$, через $U(< ij >)$ – окрестность пары $< ij > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}$ на себя.

Для некоторого кортежа $< k_1 \ldots k_n > \in \mathfrak{M}^n$ длины n введем функции $\bar{f}^n = \bar{f}[k_1 \ldots k_n]$ и $\bar{\bar{f}}^n = \bar{\bar{f}}[k_1 \ldots k_n]$, сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ точки $(f(ik_1), \ldots, f(ik_n)) \in R^{sn}$ и $(f(k_1 i), \ldots, f(k_n i)) \in R^{sn}$ соответственно, если $< ik_1 >, \ldots, < ik_n > \in \mathfrak{S}_f$ и $< k_1 i >, \ldots, < k_n i > \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения введенных функций $\bar{f}^n$ и $\bar{\bar{f}}^n$ могут не совпадать друг с другом и с самим множеством $\mathfrak{M}$.

В отношении пространства $\mathfrak{M}$ с s-компонентной метрической функцией $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множество.

II. Функция f в области своего определения есть достаточно гладкая функция.

III. В $\mathfrak{M}^n$ плотно множество таких кортежей длины n, для которых функция $\bar{f}^n(\bar{\bar{f}}^n)$ имеет максимальный ранг, равный sn, в точках плотного в $\mathfrak{M}$ множества.

Достаточная гладкость означает, что в области ее определения непрерывна как сама функция f, так и все ее производные достаточно высокого порядка. Гладкую метрическую функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$, для которой выполняется аксиома III, будем называть *невырожденной*. Заметим, что ограничения в аксиомах I, II, III открытыми и плотными множествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

Пусть, далее, $m = n + 2$. На основе исходной метрической функции f построим функцию F, сопоставляя кортежу $<ijk \ldots vw>$ длины m из $\mathfrak{M}^m$ точку $(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $sm(m-1)/2$ расстояний для следующих пар его точек: $< ij >, < ik >, \ldots, < vw >$, если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения функции F обозначим через $\mathfrak{S}_F$. Очевидно, что область $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}^m$ множество.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную геометрию* (физическую структуру) ранга $m = n + 2$, если, кроме аксиом I, II, III, дополнительно выполняется следующая аксиома:

IV. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $< ijk \ldots vw >$ длины $m = n + 2$ которого и некоторой его окрестности $U(< ijk \ldots vw >)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathcal{E} \to R^s$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $F(< ijk \ldots vw >)$, что в ней $rang\ \Phi = s$ и множество $F(U(< ijk \ldots vw >))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0 \tag{1.1}$$

для всех кортежей из $U(< ijk \ldots vw >)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Эта аксиома выражает требование, чтобы $sm(m-1)/2$ расстояний между точками любого кортежа длины $m = n+2$ из $U(< ijk \ldots vw >)$ были функционально связаны, удовлетворяя системе s уравнений (1.1). Условие $rang\ \Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_s = 0$) независимы.

Если $x = (x^1, \ldots, x^{sn})$ – локальные координаты в многообразии $\mathfrak{M}$, то для метрической функции $f = (f^1, \ldots, f^s)$ в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $< ij > \in \mathfrak{S}_f$ можно выписать ее локальное координатное представление

$$f(ij) = f(x_i, x_j) = f(x_i^1, \ldots, x_i^{sn}, x_j^1, \ldots, x_j^{sn}), \tag{1.2}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III. Поскольку в соответствии с аксиомой III ранги функций $\bar{f}^n$ и $\bar{\bar{f}}^n$, равные sn, максимальны, координаты x_i и x_j входят в представление (1.2) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально обратимая гладкая замена координат не приведет к уменьшению их числа в этом представлении, то есть не существует такой локальной системы координат, в которой оно может быть записано в виде

$$f(ij) = f(x_i^1, \ldots, x_i^{n'}, x_j^1, \ldots, x_j^{n''}),$$

где или $n' < sn$ или $n'' < sn$. Действительно, если, например, $n' < sn$, то для любого кортежа $< j_1 \ldots j_n > \in (U(j))^n$ длины n и для любой точки из $U(i)$ ранг функции $\bar{f}^n = \bar{f}[j_1 \ldots j_n]$ будет заведомо меньше sn, что противоречит аксиоме III. Заметим, однако, что существенная зависимость представления (1.2) от локальных координат x_i и x_j в общем случае не гарантирует выполнения аксиомы III.

Используя выражение (1.2), запишем локальное координатное представление построенной выше функции F:

$$\left.\begin{aligned} f(ij) = f(x_i, x_j), \\ f(ik) = f(x_i, x_k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(vw) = f(x_v, x_w)\ , \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

функциональная матрица для компонент которой

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \\ \frac{\partial f(ik)}{\partial x_i} & 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x_k} & \dots & 0 & 0 \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f(vw)}{\partial x_v} & \frac{\partial f(vw)}{\partial x_w} \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

имеет $sm(m-1)/2$ строк и smn столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ кратко обозначена функциональная матрица для s компонент метрической функции $f = (f^1, \dots, f^s)$ по координатам $x = (x^1, \dots, x^{sn})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{sn}} \\ \\ \dots & \dots & \dots \\ \\ \frac{\partial f^s}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^s}{\partial x^{sn}} \end{Vmatrix}. \tag{1.5}$$

Представление (1.3) задается системой $sm(m-1)/2$ функций $f(ij)$, $f(ik), \dots,$ $f(vw)$, зависящих специальным образом от smn координат $x_i^1, \dots, x_w^{sn}$ всех точек кортежа $< ijk \dots vw >$ длины $m = n + 2$. Поскольку общее число компонент метрической функций f в системе (1.3) не больше общего числа координат, наличие связи (1.1) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольной системы функций (1.3).

Функция F, согласно ее локальному координатному представлению (1.3), отображает окрестность $U(< ijk \dots vw >) \subset \mathfrak{S}_F$ в $R^{sm(m-1)/2}$. Матрицей этого отображения является функциональная матрица (1.4) системы функций (1.3), а его рангом называется ранг этой матрицы.

Теорема 1. *Для того, чтобы метрическая функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задавала на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга $m = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $sm(m-1)/2 - s$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство теоремы 1 можно найти в монографии автора [10] и его работе [11].

Рассмотрим теперь групповые свойства феноменологически симметричной геометрии, введенной выше определением 1.

Пусть U и U' – открытые области в многообразии $\mathfrak{M}$, не обязательно связные. Гладкое инъективное отображение

$$\lambda : U \to U' \tag{1.6}$$

называется локальным *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$. Последнее означает, что для любой пары $< ij > \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i, j \in U$, и соответствующей пары $< \lambda(i), \lambda(j) >$, если она принадлежит $\mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij), \tag{1.7}$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \dots, f^s$ метрической функции f.

Множество всех движений (1.6) есть локальная группа преобразований, для которой метрическая функция согласно равенству (1.7) является *двухточечным инвариантом.* Если метрическая функция f задана явно, например, в своем координатном представлении (1.2), то равенство (1.7) является функциональным уравнением, решая которое можно найти полную группу локальных движений (1.6). Нам же о метрической функции известно только то, что она невырождена и удовлетворяет некоторой системе s уравнений (1.1). Но этого оказывается достаточно для того, чтобы установить существование $sn(n+1)/2$ -параметрической группы ее движений.

Для большей ясности последующего изложения воспроизведем в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя монографии Л.С.Понтрягина "Непрерывные группы"(см. [12], стр. 435). Пусть G^r – r-мерная локальная группа Ли и U – некоторая область многообразия $\mathfrak{M}$. Допустим, что каждому элементу $a \in G^r$ поставлено в соответствие непрерывно зависящее от a инъективное отображение $\lambda_a : U \to U'$ области U в некоторую область U' многообразия $\mathfrak{M}$, относящее каждой точке $i \in U$ некоторую точку $i' \in U'$, то есть $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i, a)$. Будем говорить, что G^r есть локальная группа Ли преобразований области U, если выполнены следующие три условия:

1, Единице e группы G^r соответствует тождественное преобразование $i' = \lambda(i, e) = i$ области U на себя и $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, то есть произведению $ab \in G^r$ соответствует композиция преобразований: сначала λ_a и затем λ_b (возможен и другой порядок: $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ba)$).

2. Преобразование λ_a является тождеством лишь при условии, что a есть единица e группы G^r.

3. В координатной форме $\lambda(i, a)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция точки $i \in U$ и элемента $a \in G^r$.

Определенная только что группа преобразований по условию 2 эффективна и потому сами элементы группы G^r могут считаться преобразованиями. То есть можно говорить о r-мерной локальной группе преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, которую обозначим через $G^r(\lambda)$. Таким образом, в области U задано эффективное гладкое действие группы G^r, причем условия 1, 2, 3 выполняются для некоторой ее части, то есть некоторой, зависящей от U, окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

В последующем изложении удобно считать, что область $U \subset \mathfrak{M}$ не обязательно связна, например, может состоять из двух связных областей: $U = U_1 \cup U_2$, причем $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ *геометрию, наделенную групповой симметрией* степени $sn(n+1)/2$, если, кроме аксиом I, II, III, дополнительно выполняется следующая аксиома:

IV′. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$-мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i)$, $U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что функция $f(ij)$ по каждой из своих s компонент является двухточечным инвариантом соответствующей группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Группа преобразований, о которой говорится в аксиоме IV', определяет локальную подвижность жестких фигур в sn-мерном пространстве $\mathfrak{M}$, аналогичную подвижности твердых тел в евклидовом пространстве. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы $G^{sn(n+1)/2}$ определены согласно аксиоме IV' в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Множество пар $< ij >$, для которых метрическая функция f определена и является двухточечным инвариантом группы локальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Будем также говорить, что метрическая функция *допускает* $sn(n+1)/2$-мерную локальную группу Ли локальных движений.

Из аксиомы IV' следует также, что на открытом и плотном в $\mathfrak{M}$ множестве задано $sn(n+1)/2$-мерное линейное семейство гладких векторных полей X, замкнутое относительно операции коммутирования, то есть алгебра Ли преобразований (см. [12], §60). В некоторой локальной системе координат базисные векторные поля этого семейства запишем в операторной форме:

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu, \tag{1.8}$$

где $\omega = 1, 2, \ldots, sn(n+1)/2$, а по немому индексу μ производится суммирование в пределах от 1 до sn. Метрическая функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будет двухточечным инвариантом локальной группы Ли преобразований некоторых окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j в том и только в том случае, если она покомпонентно удовлетворяет системе $sn(n+1)/2$ уравнений

$$X_\omega(i)f(ij) + X_\omega(j)f(ij) = 0 \tag{1.9}$$

с операторами (1.8):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\partial f(ij)/\partial x^\mu_i + \lambda^\mu_\omega(j)\partial f(ij)/\partial x^\mu_j = 0,$$

где, например, $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(x_i) = \lambda^\mu_\omega(x^1_i, \ldots, x^{sn}_i)$ (см. [13], стр. 229 и 237).

Теорема 2. *Для того, чтобы функция* $f = (f^1, \ldots, f^s)$ *задавала на* sn*-мерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *геометрию, наделенную групповой симметрией степени* $sn(n+1)/2$*, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения* F *был равен* $sm(m-1)/2-s$*, где* $m = n+2$*, на плотном в* $\mathfrak{S}_F$ *множестве.*

Полное доказательство теоремы 2, а также следующей ниже теоремы 4, можно найти в монографии автора [10] и его работе [11].

Итоговым и очевидным результатом изложенного выше является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий геометрии, задаваемой на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ функцией $f = (f^1, \ldots, f^s)$. Эта эквивалентность является следствием теорем 1 и 2 настоящего параграфа, необходимые и достаточные условия которых о ранге отображения F совпадают.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция* $f = (f^1, \ldots, f^s)$ *задавала на* sn*-мерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга* $m = n+2$*, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на* $\mathfrak{M}$ *геометрию, наделенную групповой симметрией степени* $sn(n+1)/2$*.*

Заметим, что условие о ранге отображения F можно сформулировать как четвертую аксиому в определении геометрии. Такая геометрия будет, с одной стороны, феноменологически симметрична, а с другой стороны – наделена групповой симметрией, причем обе симметрии в смысле теоремы 3 окажутся эквивалентными.

Теорема 4. *Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых метрической функцией* $f = (f^1, \ldots, f^s)$*, задающей на* sn*-мерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную геометрию ранга* $m = n+2$*, или геометрию, наделенную групповой симметрией степени* $sn(n+1)/2$*, не превышает этой степени.*

Таким образом, жесткие фигуры и твердые тела имеют не более

$sn(n+1)/2$ степеней свободы при своем движении в пространстве.

§2. Классификация одномерных, двумерных и трехмерных геометрий

В настоящем параграфе будут приведены полные классификации однометрических феноменологически симметричных геометрий, когда однокомпонентная метрическая функция f при $s=1$ паре точек сопоставляет одно число. К настоящему времени такие классификации построены только для одномерных, двумерных и трехмерных геометрий, то есть для $n=1,2,3$. Классификация феноменологически симметричных геометрий более высокой размерности в рамках разработанного метода наталкивается на серьезные трудности чисто технического характера, которые еще не преодолены. Возможно, что все эти трудности есть недостатки самого метода, однако новые и более эффективные методы классификации еще не найдены.

Координатное представление метрической функции при переходе от одной системы координат к другой меняется. Например, метрическая функция плоскости Евклида в прямоугольной декартовой системе координат (x,y) задается выражением (В.1), а в полярной системе координат (r,φ) – другим:

$$f(ij)=r_i^2+r_j^2-2r_ir_j\cos(\varphi_i-\varphi_j).$$

Дополнительное масштабное преобразование $\psi(f)\to f$, где ψ – произвольная функция одной переменной, еще более изменит исходное координатное представление (В.1), сделав его трудно узнаваемым. Естественно, выбрать такую систему координат в многообразии $\mathfrak{M}$ и провести такое масштабное преобразование самой метрической функции, при которых ее координатное представление будет наиболее простым. Поэтому, нижеследующие классификационные теоремы формулируются с точностью до замены координат и масштабного преобразования.

Расссмотрим сначала по работе [5] простейшую одномерную ($s=1,n=1$) феноменологически симметричную геометрию ранга 3. Такая геометрия задается на одномерном многообразии $\mathfrak{M}$ метрической функцией $f : \mathfrak{S}_f \to R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Ее координатное представление определяется выражением

$$f(ij) = f(x_i, x_j), \tag{2.1}$$

где x – локальная координата в многообразии. Метрическая функция (2.1) будет невырожденной, то есть удовлетворять аксиоме III из §1, при условии отличия от нуля обеих производных по координатам x_i и x_j для плотного в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множества пар $< ij >$. Уравнение, выражающее феноменологическую симметрию рассматриваемой геометрии, согласно аксиоме IV из §1 устанавливает функциональную связь трех расстояний $f(ij), f(ik), f(jk)$ для плотного в $\mathfrak{M}^3$ множества троек $< ijk >$:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0. \tag{2.2}$$

Теорема 1. *С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и в надлежаще выбранной системе локальной координаты x невырожденная метрическая функция* (2.1)*, задающая на одномерном многообразии феноменологически симметричную геометрию ранга три со связью* (2.2)*, может быть представлена следующим каноническим выражением:*

$$f(ij) = x_i - x_j. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2), выражающее феноменологическую симметрию этой геометрии, легко находится: $f(ij) - f(ik) + f(jk) = 0$. Локальное обратимое преобразование $x' = \lambda(x)$ одномерного многообразия $\mathfrak{M}$ с отличной от нуля производной $\lambda'(x)$ будет движением, если оно сохраняет метрическую функцию (2.3): $\lambda(x_i) - \lambda(x_j) = x_i - x_j$. Полученное функциональное уравнение на множество движений легко решается методом разделения переменных: $\lambda(x) = x + a$, где a – произвольная постоянная. Соответствующая однопараметрическая группа движений $x' = x + a$ определяет групповую симметрию степени 1 феноменологически симметричной геометрии ранга 3, задаваемой на одномерном многообразии $\mathfrak{M}$ метрической функцией (2.3). В заключение отметим, что двухточечный инвариант группы движений, удовлетворяет функциональному уравнению $f(x_i + a, x_j + a) = f(x_i, x_j)$. Это уравнение решается методом его сведения к линейному однородному дифференциальному уравнению в частных производных: $f(ij) = \psi(x_i - x_j)$, где ψ – произвольная функция одной переменной, откуда видно, что по группе движений метрическая функция восстанавливается однозначно с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$.

Перейдем к рассмотрению двумерых ($s = 1, n = 2$) феноменологически симметричных геометрий, которые задаются на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ метрической функцией $f : \mathfrak{S}_f \to R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Ее координатное представление определяется выражением

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{2.4}$$

где (x, y) – локальные координаты в многообразии. Если эта функция задает такую геометрию, то по аксиоме IV из §1 шесть ее значений для четверки $<ijkl>$ функционально связаны:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0. \tag{2.5}$$

Невырожденная метрическая функция (2.4) по аксиоме III из §1 должна, очевидно, удовлетворять следующим двум условиям:

$$\left.\begin{array}{r} \partial(f(ik), f(il))/\partial(x_i, y_i) \neq 0, \\ \partial(f(kj), f(lj))/\partial(x_j, y_j) \neq 0 \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^3$ множества троек $<ikl>$ и $<klj>$.

Плоскость Евклида с метрической функцией (B.1) и функциональной связью (B.2), выражающей ее феноменологическую симметрию, которая была рассмотрена во Введении в качестве примера, является одной из таких геометрий. Но сколько их может быть? На этот вопрос отвечает следующая теорема (см. [6]):

Теорема 2. *С точностью до масштабного преобразования* $\psi(f) \to f$ *и в надлежаще выбранной системе локальных координат* (x, y) *невырожденная метрическая функция* (2.4), *задающая на двумерном мно-*

гообразии феноменологически симметричную геометрию ранга четыре со связью (2.5)*, может быть представлена одним из следующих одиннадцати канонических выражений:*

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \tag{2.7}$$

$$f(ij) = \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \tag{2.8}$$

$$f(ij) = \mathrm{sh} y_i \mathrm{sh} y_j \cos(x_i - x_j) - \mathrm{ch} y_i \mathrm{ch} y_j, \tag{2.9}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2, \tag{2.10}$$

$$f(ij) = \mathrm{ch} y_i \mathrm{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \mathrm{sh} y_i \mathrm{sh} y_j, \tag{2.11}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i, \tag{2.12}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \tag{2.13}$$

$$f(ij) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\beta \mathrm{ar(c)th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.14}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.15}$$

$$f(ij) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\gamma \mathrm{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.16}$$

$$f(ij) = \frac{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon_i y_i^2 + \varepsilon_j y_j^2}{y_i y_j}, \tag{2.17}$$

где $\beta > 0$ *и* $\beta \neq 1$; $\gamma > 0$; $\varepsilon_i = 0, \pm 1$; $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, *причем не обязательно* $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Шесть выражений (2.7)–(2.12) определяют метрические функции хорошо известных двумерных геометрий: **(2.7)** – *плоскости Евклида*;

(2.8) – *двумерной сферы* в трехмерном евклидовом пространстве; **(2.9)** – *плоскости Лобачевского* как двумерного двухполостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; **(2.10)** – *плоскости Минковского*; **(2.11)** – *двумерного однополостного гиперболоида* в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; **(2.12)** – *симплектической плоскости.*

Существование четырех метрических функций (2.13)–(2.16), задающих двумерные феноменологически симметричные геометрии ранга четыре, впервые было установлено автором [6]. Профессор А.М.Широков (кафедра геометрии Казанского госуниверситета) обратил внимание автора на то, что три метрические функции: (2.14), (2.15) и (2.16) можно записать единообразно, используя три типа комплексных чисел:

$$f(ij) = (z_i - z_j)\overline{(z_i - z_j)} \exp\ 2\gamma \mathrm{arg}(z_i - z_j),$$

где $z = x+ey$, $\bar{z} = x-ey$, причем $e^2 = +1$, $\gamma > 0$ и дополнительно $\gamma \neq 1$ для выражения (2.14); $e^2 = 0$ и $\gamma = 1$ для выражения (2.15); $e^2 = -1$ и $\gamma > 0$ для выражения (2.16). Таким образом, все три возможные типа комплексных чисел на плоскости, а именно: двойные ($e^2 = +1$), дуальные ($e^2 = 0$) и обычные ($e^2 = -1$), естественно вписались в полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий ранга четыре. По-видимому, соответствующие геометрии никогда геометрами не изучались и потому специального общепринятого названия не имеют. Двумерную геометрию с метрической функцией **(2.16)** автор назвал *плоскостью Гельмгольца*, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко сообщает Гельмгольц в своей работе [4], считая это отрицательной характеристикой такой геометрии. Соответственно метрическая функция **(2.14)** задает *псевдогельмгольцеву плоскость*, а метрическая функция **(2.15)** – *дуальногельмгольцеву* плоскость. Метрическая функция **(2.13)** задает так называемую *симплициальную плоскость*, название которой было подсказано автору известным геометром Р.Пименовым, в исследованиях которого такое выражение встречалось. Последнее выражение **(2.17)** определяет метрическую функцию, задающую двумерную феноменологически симметричную геометрию *на несвязном двумерном многооб-*

разии, на связных компонентах которого будет либо симплектическая плоскость ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$), либо плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = +1$), либо двумерный однополостной гиперболоид ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$).

Феноменологическая симметрия ранга 4, выражаемая уравнением (2.5), для всех двумерных геометрий, перечисленных в теореме 2, легко устанавливается по рангу функциональной матрицы для шести функций $f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl)$,$f(kl)$, специальным образом зависящих от восьми переменных – координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$ четырех точек кортежа $< ijkl >$. Ранг этой матрицы, как показывает компьютерная проверка, равен 5, что свидетельствует о наличии функциональной связи, задаваемой уравнением (2.5) и выражающей феноменологическую симметрию всех одиннадцати геометрий (2.7) – (2.17). Что же касается самого уравнения (2.5), то в явном виде оно найдено для всех двумерных геометрий, кроме гельмгольцевых, задаваемых метрическими функциями (2.14), (2.15) и (2.16). Например, для плоскости Евклида – (2.7) и псевдоевклидовой плоскости Минковского – (2.10) таким уравнением будет общее для них уравнение (В.2) из Введения, обращающее в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка для четверки $< ijkl >$ точек этих плоскостей. Для следующих пяти двумерных геометрий, а именно: двумерной сферы – (2.8), плоскости Лобачевского – (2.9), однополостного гиперболоиды – (2.11), симплектической плоскости – (2.12) и геометрии на несвязном двумерном многообразии – (2.17), в уравнении (2.5) слева стоит определитель Грама четвертого порядка для четверки $< ijkl >$, причем диагональными элементами определителя являются значения метрической функции для диагональных пар $< ii >, < jj >, < kk >, < ll >$. Например, для двумерной сферы – (2.8) и однополостного гиперболоида – (2.11) уравнение (2.5) будет таким:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(ij) & f(ik) & f(il) \\ f(ij) & 1 & f(jk) & f(jl) \\ f(ik) & f(jk) & 1 & f(kl) \\ f(il) & f(jl) & f(kl) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Найдено в явном виде уравнение (2.5) также и для симплициальной плоскости, задаваемой метрической функцией (2.13):

$$\begin{vmatrix} f(ij)-f(jk) & f(jk)-f(ik) & 0 \\ f(ij)-f(jl) & 0 & f(il)-f(jl) \\ 0 & f(ik)-f(kl) & f(il)-f(kl) \end{vmatrix} = 0.$$

Как отмечалось выше, для гельмгольцевых плоскостей – (2.14), (2.15) и (2.16) уравнение (2.15) не найдено. Есть предположение, что его нельзя записать через известные элементарные функции.

Групповая симметрия двумерных геометрий является естественным следствием феноменологической симметрии согласно теореме 3 из §1. Локально обратимое преобразование

$$x' = \lambda(x,y), \quad y' = \sigma(x,y),$$

удовлетворяющее условию $\partial(\lambda,\sigma)/\partial(x,y) \neq 0$, будет движением, если оно сохраняет метрическую функцию (2.4):

$$f(\lambda(i),\sigma(i),\lambda(j),\sigma(j)) = f(x_i,y_i,x_j,y_j), \tag{2.18}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i,y_i)$. Решением функционального уравнения (2.18) для каждой двумерной геометрии (2.7) – (2.17) находится полная локальная трехпараметрическая группа движений, которая и определяет ее групповую симметрию степени 3. Метрическая функция (2.4) является также решением дифференциального уравнения

$$X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0, \tag{2.19}$$

с операторами $X = \lambda(x,y)\partial/\partial x + \sigma(x,y)\partial/\partial y$ соответствующей трехмерной алгебры Ли. Уравнение же (2.19) можно рассматривать как функциональное на коэффициенты λ и σ оператора X. Оказывается, что так трактуемое при известной метрической функции (2.4) уравнение (2.19) решается более простыми методами (см. [14]), чем исходное функциональное уравнение (2.18). Напомним, что согласно известным теоремам Ли между группой Ли и соответствующей ей алгеброй Ли имеется взаимно однозначное соответствие.

Рассмотрим еще трехмерные ($s = 1, n = 3$) феноменологически симметричные геометрии, которые задаются на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ метрической функцией $f : \mathfrak{S}_f \to R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Ее координатное представление определяется выражением

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \tag{2.20}$$

где (x, y, z) – локальные координаты в многообразии. Если эта функция задает такую геометрию, то по аксиоме IV из §1 десять ее значений для пятерки $<ijklm>$ функционально связаны:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(im), f(jk), f(jl), f(jm), f(kl), f(km), f(lm)) = 0. \tag{2.21}$$

Невырожденная метрическая функция (2.20) по аксиоме III из §1 должна, очевидно, удовлетворять следующим двум условиям:

$$\left.\begin{array}{r} \partial(f(ik), f(il), f(im))/\partial(x_i, y_i, z_i) \neq 0, \\ \partial(f(kj), f(lj), f(mj))/\partial(x_j, y_j, z_j) \neq 0 \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^4$ множества четверок $< iklm >$ и $< klmj >$.

Примером трехмерной феноменологически симметричной геометрии является трехмерное пространство Евклида. Для метрической функции $f(ij)$, сопоставляющей паре точек $<ij>$ квадрат обычного расстояния, в декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) представление будет следующим:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.$$

Хорошо известно, что в пространстве Евклида десять взаимных расстояний для пятерки $< ijklm >$ точек функционально между собой связаны, обращая в ноль определитель Кэли-Менгера шестого порядка, строение которого аналогично строению определителя пятого порядка

(B.2):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) & f(im) \\ 1 & f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) & f(jm) \\ 1 & f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) & f(km) \\ 1 & f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 & f(lm) \\ 1 & f(im) & f(jm) & f(km) & f(lm) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Полная классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий ранга пять была построена В.Х. Левом. Приведем ее по его работе [7]:

Теорема 3. *С точностью до масштабного преобразования* $\psi(f) \to f$ *и в надлежаще выбранной системе локальных координат* (x, y, z) *невырожденная метрическая функция* (2.20)*, задающая на трехмерном многообразии феноменологически симметричную геометрию ранга пять со связью* (2.21)*, может быть представлена одним из следующих пятнадцати канонических выражений:*

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \tag{2.23}$$

$$f(ij) = \sin z_i \sin z_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] + \cos z_i \cos z_j, \tag{2.24}$$

$$f(ij) = \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] - \mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j, \tag{2.25}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2, \tag{2.26}$$

$$f(ij) = \mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] - \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j, \tag{2.27}$$

$$f(ij) = \mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j [\mathrm{ch} y_i \mathrm{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \mathrm{sh} y_i \mathrm{sh} y_j] - \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j, \tag{2.28}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j, \tag{2.29}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j, \tag{2.30}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \exp(z_i + z_j), \tag{2.31}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] \exp 2(z_i + z_j), \tag{2.32}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp 2(z_i + z_j), \tag{2.33}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] \exp[2(\beta \mathrm{ar(c)th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j)], \tag{2.34}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp[2(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j)], \tag{2.35}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp[2(\gamma \mathrm{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j)], \tag{2.36}$$

$$f(ij) = \frac{(x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2 + \varepsilon_i z_i^2 + \varepsilon_j z_j^2}{z_i z_j}, \tag{2.37}$$

где $\beta > 0$ *и* $\beta \neq 1$; $\gamma > 0$; $\varepsilon_i = 0, \pm 1$; $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, *причем не обязательно* $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Семь выражений (2.23)–(2.29) определяют метрические функции хорошо известных трехмерных геометрий: **(2.23)** – *пространства Евклида* как естественного трехмерного расширения плоскости Евклида с метрической функцией (2.7); **(2.24)** – *трехмерной сферы* в четырехмерном евклидовом пространстве; **(2.25)** – *пространства Лобачевского* как трехмерного двухполостного гиперболоида в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $<+++->$; **(2.26)** – *пространства Минковского* как естественного трехмерного расширения плоскости Минковского с метрической функцией (2.10); **(2.27)** – *трехмерного однополостного гиперболоида* I в четырехмерном псевдоевклидовом пространнстве той же сигнатуры $<+++->$; **(2.28)** – *трехмерного однополостного гиперболоида* II в четырехмерном псевдоевклидовом прстранстве, но другой сигнатуры $<++-->$; **(2.29)** – *симплектического пространства* как естественного расширения симплектической плоскости с метрической функцией (2.12) на нечетную размерность, равную трем.

Следующие семь выражений (2.30)–(2.36) определяют метрические функции таких трехмерных геометрий, которые впервые были обнаружены В.Х.Левом [15], никогда геометрами не изучались и потому специального названия не имеют: **(2.30)** – *симплициального пространства* I как аддитивного трехмерного феноменологически симметричного расширения симплициальной плоскости с метрической функцией (2.13); **(2.31)** – *симплициального пространства* II как мультипликативного трехмерного феноменологически симметричного расширения симплициальной плоскости с метрической функцией (2.13); **(2.32)** – *особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Минковского* с метрической функцией (2.10); **(2.33)** – *особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Евклида* с метрической функцией (2.7); **(2.34)** – *псевдогельмгольцева пространства* как трехмерного феноменологически симметричного расширения псевдогельмгольцевой плоскости с метрической функцией (2.14); **(2.35)** – *дуальногельмгольцева пространства* как трехмерного феноменологически симметричного расширения дуальногельмгольцевой плоскости с метрической функцией (2.15); **(2.36)** – *пространства Гельмгольца* как трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Гельмгольца с метрической функцией (2.16).

Последнее выражение **(2.37)** определяет метрическую функцию трехмерной геометрии *на несвязном трехмерном многообразии*, на связных компонентах которого она задает либо расширения (2.32), (2.33), либо сферы (2.25), (2.27), (2.28) в четырехмерных псевдоевклидовых пространствах.

Феноменологическая симметрия каждой из пятнадцати перечисленных выше трехмерных геометрий, задаваемых метрическими функциями (2.23)–(2.37), подтверждается рангом соответствующей функциональной матрицы для десяти функций $f(ij), f(ik), f(il), f(im), f(jk)$, $f(jl), f(jm), f(kl), f(km), f(lm)$, специальным образом зависящих от пятнадцати переменных – координат $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j, x_k, y_k, z_k, x_l, y_l, z_l$, x_m, y_m, z_m всех точек пятерки $< ijklm >$, который оказывается равным девяти. Тем самым доказывается, что для каждой трехмерной геометрии существует некоторое уравнение (2.21), выражающее ее феноменологическую симметрию. Явный вид этого уравнения найден для всех трехмерных геометрий, кроме симплициальных и гельмгольцевых пространств: (2.30), (2.31) и (2.34), (2.35), (2.36). Для всех других геометрий уравнение (2.21) записывается в виде обращения в ноль или определителя Кэли-Менгера шестого порядка или определителя Грама пятого порядка, диагональными элементами которых являются значения метрической функции для диагональных пар $< ii >, < jj >, < kk >$, $< ll >, < mm >$.

Групповая симметрия трехмерных геометрий, как и двумерных, эквивалентна феноменологической симметрии согласно теореме 3 из §1. Локально обратимое преобразование

$$x' = \lambda(x, y, z), \quad y' = \sigma(x, y, z), \quad z' = \tau(x, y, z),$$

удовлетворяющее условию $\partial(\lambda, \sigma, \tau)/\partial(x, y, z) \neq 0$, будет локальным движением, если оно сохраняет метрическую функцию (2.20):

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \tau(i), \lambda(j), \sigma(j), \tau(j)) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j),$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i, z_i)$. Решением этого функционального уравнения для каждой трехмерной геометрии (2.23)–(2.37) находится полная локальная шестипараметрическая группа движений, которая и определяет ее групповую симметрию степени шесть. Метрическая функция (2.20) является также решением дифференциального уравнения (2.19) с операторами

$$X = \lambda(x, y, z)\partial/\partial x + \sigma(x, y, z)\partial/\partial y + \tau(x, y, z)\partial/\partial z$$

соответствующей шестимерной алгебры Ли. Кроме того, это уравнение можно, в свою очередь, рассматривать как функциональное на коэффициенты λ, σ, τ оператора X. Так трактуемое при известной метрической функции (2.20) уравнение (2.19) решается достаточно простыми методами (см. [14]). По известной же группе движений трехмерной геометрии или ее шестимерной алгебре Ли исходная метрическая функция как двухточечный инвариант восстанавливается однозначно с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$.

В заключение заметим, что феноменологически симметричные геометрии более высокой размерности ($s = 1, n > 3$) задаются на n-мерном многообразии невырожденной однокомпонентной функцией с координатным представлением

$$f(ij) = f(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n, x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n),$$

причем для кортежа $<ijk \ldots vw>$ длины $n+2$ и некоторой его окрестности, таких, что множество пар $<ij>, <ik>, \ldots, <vw>$ принадлежит области ее определения, соответствующее множество значений $f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)$ функционально связаны некоторым уравнением (1.1). Классификации таких геометрий еще не построены, однако можно выписать некоторые выражения для метрической функции n-мерной феноменологически симметричной геометрии ранга $n+2$ как естественные и особые расширения отдельных выражений из классификации геометрий меньшей размерности. Например, для четырехмерной феноменологически симметричной геометрии ($s = 1, n = 4$) ранга 6 предварительная, но пока не окончательная, классификация с точностью до замены локальных координат x, y, z, t в многообразии и масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ будет (см. [15]) следующей:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 + (t_i - t_j)^2, \tag{2.38}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (t_i - t_j)^2, \tag{2.39}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2 - (t_i - t_j)^2, \tag{2.40}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2] \exp 2(t_i + t_j), \tag{2.41}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2] \exp 2(t_i + t_j), \tag{2.42}$$

$$\begin{split} f(ij) = \sin t_i \sin t_j [\sin z_i \sin z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ + \cos y_i \cos y_j) + \cos z_i \cos z_j] + \cos t_i \cos t_j, \end{split} \tag{2.43}$$

$$\begin{split} f(ij) = &\mathrm{ch} t_i \mathrm{ch} t_j [\sin z_i \sin z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ &+ \cos y_i \cos y_j) + \cos z_i \cos z_j] - \mathrm{sh} t_i \mathrm{sh} t_j, \end{split} \tag{2.44}$$

$$\begin{split} f(ij) = &\mathrm{sh} t_i \mathrm{sh} t_j [\sin z_i \sin z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ &+ \cos y_i \cos y_j) + \cos z_i \cos z_j] - \mathrm{ch} t_i \mathrm{ch} t_j, \end{split} \tag{2.45}$$

$$\begin{split} f(ij) = &\mathrm{ch} t_i \mathrm{ch} t_j [\mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ &+ \cos y_i \cos y_j) - \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j] - \mathrm{sh} t_i \mathrm{sh} t_j, \end{split} \tag{2.46}$$

$$\begin{split} f(ij) = &\mathrm{sh} t_i \mathrm{sh} t_j [\mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ &+ \cos y_i \cos y_j) - \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j] - \mathrm{ch} t_i \mathrm{ch} t_j, \end{split} \tag{2.47}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i t_j - z_j t_i, \tag{2.48}$$

$$f(ij) = \frac{(x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2 \pm (z_i - z_j)^2 + \varepsilon_i t_i^2 + \varepsilon_j t_j^2}{t_i t_j}, \tag{2.49}$$

где $\varepsilon_i = 0, \pm 1$; $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, *причем не обязательно* $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Заметим, что в приведенном списке (2.38)–(2.49) отсутствуют четырехмерные симплициальные и гельмгольцевы пространства. По-видимому, их среди феноменологически симметричных четырехмерных геометрий ранга шесть просто нет. Для приведенных же четырехмерных геометрий легко находятся уравнения, выражающие их феноменологическую симметрию. Соответствующие определители Кэли-Менгера седьмого порядка и определители Грама шестого порядка обращаются в ноль. Групповая же симметрия степени 10 определяется согласно теореме 3 из §1 десятипараметрической группой движений, сохраняющих метрическую функцию.

§3. Двуметрические геометрии на плоскости и триметричекие геометрии в пространстве

Согласно общим определениям §1 двуметрическая двумерная геометрия ($s = 2, n = 1$) задается на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ двухкомпонентной метрической функцией $f = (f^1, f^2)$, сопоставляющей любой паре $<ij>$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ два действительных числа $f(ij) = (f^1(ij), f^2(ij)) \in R^2$. Предполагается, что область определения $\mathfrak{S}_f$ метрической функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ множество.

Если x, y – локальные координаты в $\mathfrak{M}$, то ее координатное представление

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{3.1}$$

или в более подробной по компонентам записи:

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) = f^1(x_i, y_i, x_j, y_j), \\ f^2(ij) = f^2(x_i, y_i, x_j, y_j), \end{aligned}\right\}$$

является гладкой невырожденной функцией координат x_i, y_i и x_j, y_j, которые должны входить в нее существенным образом. Условие невырожденности метрической функции $f = (f^1, f^2)$ математически выражается двумя неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} \partial(f^1(ij), f^2(ij))/\partial(x_i, y_i) \neq 0, \\ \partial(f^1(ij), f^2(ij))/\partial(x_j, y_j) \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ множества пар $<ij>$.

Если двухкомпонентная метрическая функция (3.1), удовлетворяющая перечисленным выше трем условиям, задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга три, то для любой тройки $<ijk>$ из плотного и открытого в $\mathfrak{M}^3$ множества, такой что пары $<ij>, <ik>, <jk>$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$, шесть взаимных расстояний $f(ij)$, $f(ik)$, $f(jk)$ функционально связаны двумя независимыми уравнениями:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0, \tag{3.3}$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – двухкомпонентная функция шести переменных. В более подробной записи по компонентам имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(f^1(ij), f^2(ij), f^1(ik), f^2(ik), f^1(jk), f^2(jk)) = 0, \\ \Phi_2(f^1(ij), f^2(ij), f^1(ik), f^2(ik), f^1(jk), f^2(jk)) = 0, \end{aligned}\right\}$$

причем независимость этих уравнений означает, что $\mathrm{rang}\ \Phi = 2$.

Мы хорошо уже знаем, что феноменологическая симметрия геометрии тесно связана с ее групповой симметрией. В частности, плоскость термодинамических состояний, рассмотренная во Введении, с одной стороны, феноменологически симметрична с рангом 3, а с другой – наделена групповой симметрией степени 2. Такое соотношение ранга одной симметрии и степени другой не случайно и является следствием их эквивалентности, устанавливаемой теоремой 3 из §1. Действительно, в рассматриваемом случае трехточечная жесткая фигура должна свободно двигаться с двумя степенями свободы и не более, так как ее положение задается шестью координатами $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$, на которые наложены четыре связи, происходящие от сохранения шести расстояний, удовлетворяющих двум соотношениям (3.3). Эквивалентность феноменологической и групповой симметрий двуметрических двумерных геометрий выразим для большей ясности отдельной теоремой:

Теорема 1. *Для того, чтобы невырожденная двухкомпонентная метрическая функция $f = (f^1, f^2)$ задавала на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга три, необходимо и достаточно, чтобы она задавала на том же многообразии двуметрическую двумерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени два.*

Таким образом, двухкомпонентная метрическая функция (3.1) феноменологически симметричной ранга три двумерной геометрии допускает двухпараметрическую группу движений, то есть таких эффективных гладких локальных действий в двумерном многообразии некоторой локальной группы Ли G^2:

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2), \quad y' = \sigma(x, y; a^1, a^2), \tag{3.4}$$

что каждая компонента метрической функции сохраняется:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{3.5}$$

где $(a^1, a^2) \in G^2$ и, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i; a^1, a^2)$.

Запишем базисные векторные поля X_1, X_2 двумерной алгебры Ли локальных преобразований (3.4) двумерного многообразия $\mathfrak{M}$ в операторной форме:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \lambda_1(x, y)\partial_x + \sigma_1(x, y)\partial_y, \\ X_2 = \lambda_2(x, y)\partial_x + \sigma_2(x, y)\partial_y, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$ и, например, $\lambda_1(x, y) = \partial\lambda(x, y; a^1, a^2)/\partial a^1|_{a^1=a^2=0}$, предполагая, что при $a^1 = a^2 = 0$ имеем тождественное преобразование в группе (3.4). Метрическая функция (3.1), будучи по равенству (3.5) двухточечным инвариантом группы преобразований (3.4), необходимо является решением следующей системы двух дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

с операторами (3.6).

В свое время (1893) Софус Ли дал полную классификацию конечномерных локальных групп преобразований двумерного многообразия [16]. Из этой классификации можно выделить и записать в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) базисные операторы (3.6) четырех соответствующих двумерных алгебр Ли:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x; \tag{3.8}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y; \tag{3.9}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x; \tag{3.10}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + \partial_y. \tag{3.11}$$

Теорема 2. *Существуют две и только две не сводимые друг к другу двухкомпонентные метрические функции $f = (f^1, f^2)$, задающие на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричные геометрии ранга три. С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$, где $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) эти метрические функции могут быть представлены следующими двумя каноническими выражениями:*

$$f^1(ij) = x_i - x_j, \quad f^2(ij) = y_i - y_j; \tag{3.12}$$

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(ij) = (x_i - x_j)y_j. \tag{3.13}$$

Компоненты метрической функции $f = (f^1, f^2)$ являются независимыми решениями системы уравнений (3.7). Поскольку в этих уравнениях с операторами (3.8) и (3.10) отсутствует оператор дифференцирования $\partial/\partial y_i$, их независимыми решениями будут функции y_i и $\varphi(ij)$. То есть для метрической функции получаем выражение $f(ij) = \psi(y_i, \varphi(ij))$, где $\psi : R^2 \to R^2$. Но для нее не выполняется второе из условий (3.2), и она оказывается вырожденной. Решения системы (3.7) с операторами (3.9) легко находятся методом характеристик, совпадают в своем явном координатном представлении с компонентами метрической функции (3.12). Решения системы (3.7) с операторами (3.11) также легко находятся, Но совпадают в своем явном координатном представлении с компонентами метрической функции (3.13) только при дополнительной замене координат $x \to x, \exp(-y) \to y$. Обе метрические функции невырождены, так как каждый из двух якобианов условия (3.2) для них отличен от нуля.

Метрическую функцию (3.12) можно интерпретировать, например, проекциями вектора $\vec{ji}$ на координатные оси. Соответствующая функциональная связь (3.3) для нее задается двумя независимыми уравнениями

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\ f^2(ij) - f^2(ik) + f^2(jk) = 0. \end{array}\right\}$$

Метрическая функция (3.13) допускает содержательную физическую интерпретацию в термодинамике, подробно рассмотренную во Введении. Соответствующая функциональная связь (3.3) для нее задается двумя независимыми уравнениями

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} 0 & -f^2(ij) & -f^2(ik) \\ f^1(ij) & 0 & -f^2(jk) \\ f^1(ik) & f^1(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\[2em]
\begin{vmatrix} f^1(ij) & f^1(jk) & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & 0 & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & -f^2(ij) & -f^2(jk) \end{vmatrix} = 0.
\end{array}\right\}$$

Далее рассмотрим триметрические феноменологически симметричные геометрии ранга три, задаваемые на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ трехкомпонентной метрической функцией $f = (f^1, f^2, f^3)$, которая каждой паре $<ij>$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляет три числа $f(ij) = (f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij)) \in R^3$.

Пусть (x, y, z) – локальные координаты в $\mathfrak{M}$. Для метрической функции f в некоторой окрестности пары $<ij> \in \mathfrak{S}_f$ можно записать ее гладкое координатное представление:

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j). \tag{3.14}$$

Невырожденность метрической функции (3.14), в частности, ее существенная зависимость от координат x_i, y_i, z_i и x_j, y_j, z_j точек i и j, означает необращение в нуль двух якобианов третьего порядка:

$$\left.\begin{array}{r}
\partial(f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij))/\partial(x_i, y_i, z_i) \neq 0, \\
\partial(f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij))/\partial(x_j, y_j, z_j) \neq 0
\end{array}\right\} \tag{3.15}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множества пар $< ij >$.

Если трехкомпонентная метрическая функция (3.14) задает на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга три, то найдется такая трехкомпонентная функция $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ от девяти переменных, что девять взаимных расстояний между точками открытого и плотного в $\mathfrak{M}^3$ множества троек $<ijk>$

функционально связаны тремя независимыми уравнениями

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0. \tag{3.16}$$

Метрическая функция (3.14) допускает трехпараметрическую группу движений:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ z' &= \tau(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

относительно которой она является невырожденным двухточечным инвариантом, удовлетворяя следующему функциональному уравнению:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \tau(i), \lambda(j), \sigma(j), \tau(j)) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \tag{3.18}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i, z_i; a^1, a^2, a^3)$. Вследствие локальной обратимости преобразований (3.17) должно выполняться условие:

$$\partial(\lambda, \sigma, \tau)/\partial(x, y, z) \neq 0.$$

Обозначим через

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1(x, y, z)\partial_x + \sigma_1(x, y, z)\partial_y + \tau_1(x, y, z)\partial_z, \\ X_2 &= \lambda_2(x, y, z)\partial_x + \sigma_2(x, y, z)\partial_y + \tau_2(x, y, z)\partial_z, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y, z)\partial_x + \sigma_3(x, y, z)\partial_y + \tau_3(x, y, z)\partial_z \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

базисные операторы трехмерной алгебры Ли группы (3.17). Тогда для метрическрй функции (3.14) как двухточечного инварианта получаем из функционального уравнения (3.18) систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0, \\ X_3(i)f(ij) + X_3(j)f(ij) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

с операторами (3.19).

Таким образом, задача классификации метрических функций (3.14) сводится к классификации трехмерных алгебр Ли преобразований трехмерного многообразия с базисными операторами (3.19) и к интегрированию соответствующих систем уравнений (3.20). Легко убедиться в том, что решение этой системы определит невырожденную метрическую функцию только в том случае, если группа преобразований (3.17) транзитивна, для чего, как известно, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы коэффициентов операторов (3.19) был равен трем.

Теорема 3. *Базисные операторы* (3.19) *трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локально транзитивных преобразований трехмерного многообразия с точностью до изоморфизма и в надлежаще выбранной системе локальных координат* (x, y, z) *задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z; \tag{3.21}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{3.22}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{3.23}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y + \partial_z; \tag{3.24}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x+qy)\partial_y + \partial_z; \tag{3.25}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \operatorname{tg} y\ \sin x\ \partial_x + \cos x\ \partial_y + \sec y\ \sin x\ \partial_z, \\ X_3 &= \operatorname{tg} y\ \cos x\ \partial_x - \sin x\ \partial_y + \sec y\ \cos x\ \partial_z; \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \sin x\ \partial_x + \cos x\ \partial_y + \exp y\ \sin x\ \partial_z, \\ X_3 &= \cos x\ \partial_x - \sin x\ \partial_y + \exp y\ \cos x\ \partial_z, \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

где $-1 \leqslant p \leqslant 1$, $0 \leqslant q < 2$.

Приведенная в теореме 3 классификация построена автором и приведена по его работе [17].

Теорема 4. *С точностью до масштабного преобразования* $\psi(f) \to f$, *где* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, *и в надлежаще выбранной системе локальных координат* (x, y, z) *метрическая функция* $f = (f^1,\ f^2, f^3)$, *задающая* *на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга три, может быть представлена одним из следующих одиннадцати канонических выражений:*

$$f^1(ij) = x_i - x_j,\ f^2(ij) = y_i - y_j,\ f^3(ij) = z_i - z_j; \tag{3.28}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= y_i - y_j, \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)y_i + z_i - z_j, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)y_j + z_i - z_j; \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= (x_i - x_j)^2\ \exp\left(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i,\ f^3(ij) = (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= (x_i - x_j)(y_i - y_j), \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= y_i - y_j, \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= \frac{(x_i - x_j)^p}{y_i - y_j}, \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \\ f^2(ij) &= z_i + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\ f^3(ij) &= z_j + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right); \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

$$\left.\begin{aligned}
f^1(ij) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)\times \\
\times \exp\left(2\gamma \operatorname{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\
f^2(ij) = z_i + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\
f^3(ij) = z_j + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right);
\end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

$$\left.\begin{aligned}
f^1(ij) = \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \\
f^2(ij) = z_i - \arcsin\left(\frac{\sin(x_i - x_j)\sin y_j}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right), \\
f^3(ij) = z_j + \arcsin\left(\frac{\sin(x_i - x_j)\sin y_i}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right);
\end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

$$\left.\begin{aligned}
f^1(ij) = (x_i - x_j)y_i y_j, \\
f^2(ij) = z_i + \frac{1}{(x_i - x_j)y_i^2}, \\
f^3(ij) = z_j - \frac{1}{(x_i - x_j)y_j^2},
\end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

причем здесь $0 < |p| < 1$ *и* $0 < \gamma < \infty$, *где* $\gamma = q/\sqrt{4 - q^2}$ *при* $0 < q < 2$.

Подробное доказательство теоремы 4 можно найти в §5 монографии автора [10]. Оно состоит в последовательном решении всех систем уравнений (3.20) с операторами (3.21)–(3.27), что в техническом отношении особых трудностей не представляет. При окончательной записи приведенных выше канонических выражений произведена в некоторых случаях удобная замена координат и выделены случаи $p = 0, \pm 1$; $\gamma = 0$.

Феноменологическая симметрия всех одиннадцати геометрий, задаваемых метрическими функциями (3.28)–(3.38), устанавливается по рангу функциональной матрицы для девяти функций $f(ij), f(ik), f(jk)$, специальным образом зависящих от девяти переменных – координат точек тройки $< ijk >$, который оказывается равен шести. Соответствующие функциональные уравнения (3.16), выражающие эту симметрию, могут быть найдены в явном виде, что утверждается следующей теоремой, доказанной Р.М. Мурадовым в работе, отправленной в печать:

Теорема 5. *Если трехкомпонентная метрическая функция* (3.14) *задает на трехмерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную геометрию ранга 3, то с точностью до замены локальных координат в многообразии и масштабного преобразования* $\psi(f) \to f$, *где* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, *она определяет в* R^3 *такую локальную квазигрупповую операцию с правой единицей, что правый обратный элемент совпадает с исходным и уравнение, выражающее феноменологическую симметрию, имеет подобный самой метрической функции вид:*

$$f(ij) = f(f^1(ik), f^2(ik), f^3(ik), f^1(jk), f^2(jk), f^3(jk)). \tag{3.39}$$

В указанной работе для каждой из метрических функций (3.28)–(3.38) найдены такие, соответствующие теореме 5, ее координатные представления, которые позволяют записать уравнение (3.16) по формуле (3.39) в явном виде.

Компоненты метрической функции (3.28) можно интерпретировать проекциями вектора $\vec{ji}$ на координатные оси. Соответствующая функциональная связь (3.16) задается системой трех независимых уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\ f^2(ij) - f^2(ik) + f^2(jk) = 0, \\ f^3(ij) - f^3(ik) + f^3(jk) = 0. \end{array}\right\}$$

Метрическая функция (3.29) допускает содержательную физическую интерпретацию в термодинамике. Первую ее компоненту представим как разность температур T_i и T_j термодинамической системы в состояниях i и j, а вторую и третью – как работы $A^{TS}(ij)$ и $A^{ST}(ij)$ внешних тел над ней при ее переходе из состояния i в состояние j по двум путям, составленным из равновесных изотермического ($T = \text{const}$) и адиабатического ($S = \text{const}$) процессов:

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= T_i - T_j, \\ f^2(ij) = A^{TS}(ij) &= (S_i - S_j)T_i - U_i + U_j, \\ f^3(ij) = A^{ST}(ij) &= (S_i - S_j)T_j - U_i + U_j, \end{aligned}\right\}$$

где S, T и U - энтропия, температура и внутренняя энергия системы. Соответствующая функциональная связь (3.16) задается тремя независимыми уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) &= 0, \\ \frac{f^2(ij) - f^3(ij)}{f^1(ij)} - \frac{f^2(ik) - f^3(ik)}{f^1(ik)} + \frac{f^2(jk) - f^3(jk)}{f^1(jk)} &= 0, \\ \frac{f^3(ij) - f^3(ik) + f^2(jk)}{f^1(jk)} - \frac{f^2(ik) - f^3(ik)}{f^1(ik)} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

В термодинамике же можно интерпретировать еще и компоненты метрической функции (3.33) разностью температур и работами среды над системой при ее переходе из состояния i в состояние j по путям PV и VP, где P и V – давление и объем системы. Вопрос об интерпретации остальных триметрических геометрий остается пока открытым. Их нетривиальные симметрии, групповая и феноменологическая, обуславливающие друг друга, дают основание надеяться, что такие интерпретации будут найдены и для других метрических функций классификационного списка (3.28)–(3.38).

К настоящему времени В.А.Кыровым построена классификация четыреметрических (s=4, n=1) феноменологически симметричных геометрий ранга три, которую приведем по его работе [18]:

Теорема 6. *С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$, где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$, и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y, z, t) метрическая функция $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$, задающая на четырехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга три, может быть представлена* **явно** *одним из следующих двенадцати канонических выражений:*

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp[\varepsilon(t_i + t_j)],\ f^2(ij) = (y_i - y_j)^2 \exp[k(t_i + t_j)], \\ f^3(ij) = (z_i - z_j)^2 \exp[l(t_i + t_j)],\ f^4(ij) = t_i - t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp\left(-2k\ \mathrm{arctg}\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\ f^2(ij) = 2\mathrm{arctg}\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + t_i + t_j, \\ f^3(ij) = (z_i - z_j)^2 \exp[l(t_i + t_j)],\ f^4(ij) = t_i - t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(-2k\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right),\ f^2(ij) = 2\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + t_i + t_j, \\ f^3(ij) = (z_i - z_j)^2 \exp[\varepsilon(t_i + t_j)],\ f^4(ij) = t_i - t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = x_i - x_j,\ f^2(ij) = 2\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} - (t_i + t_j), \\ f^3(ij) = z_i - z_j - \dfrac{(y_i - y_j)^2}{2(x_i - x_j)},\ f^4(ij) = t_i - t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = x_i - x_j,\ f^2(ij) = 2\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} - (t_i + t_j), \\ f^3(ij) = (x_i - x_j)\ln(z_i - z_j + y_i - y_j + x_i - x_j) - y_i + y_j,\ f^4(ij) = t_i - t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(-2k\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right),\ f^2(ij) = 2\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} - (t_i + t_j), \\ f^3(ij) = k(y_i - y_j) - (x_i - x_j) - k^2(z_i - z_j),\ f^4(ij) = t_i - t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(-2k\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right),\ f^2(ij) = 2\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} - (t_i + t_j), \\ f^3(ij) = 2\dfrac{z_i - z_j}{x_i - x_j} - k\left(\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)^2,\ f^4(ij) = t_i - t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = (x_i - x_j - z_i(y_i - y_j))^2 \exp[c(t_i + t_j)], \\ f^2(ij) = (x_i - x_j - z_j(y_i - y_j))^2 \exp[c(t_i + t_j)], \\ f^3(ij) = (y_i - y_j)^2 \exp(t_i + t_j),\ f^4(ij) = t_i - t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = (x_i - x_j)e^{z_i},\ f^2(ij) = (x_i - x_j)e^{z_j}, \\ f^3(ij) = (y_i - y_j)e^{t_i},\ f^4(ij) = (y_i - y_j)e^{t_j}; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]\exp(z_i+z_j),\\ f^2(ij)=2\mathrm{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}+t_i+t_j,\ f^3(ij)=z_i-z_j,\ f^4(ij)=t_i-t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=\sin y_i\sin y_j\cos(x_i-x_j)+\cos y_i\cos y_j,\\ f^2(ij)=z_i-\arcsin\dfrac{\sin(x_i-x_j)\sin y_j}{\sqrt{1-(f^1(ij))^2)}},\\ f^3(ij)=z_j+\arcsin\dfrac{\sin(x_i-x_j)\sin y_i}{\sqrt{1-(f^1(ij))^2)}},\\ f^4(ij)=t_i-t_j; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=(x_i-x_j)y_iy_j,\ f^2(ij)=z_i+\dfrac{1}{(x_i-x_j)y_i^2},\\ f^3(ij)=z_j-\dfrac{1}{(x_i-x_j)y_j^2},\ f^4(ij)=t_i-t_j; \end{array}\right\}$$

а также **неявно** *еще двумя выражениями:*

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=f^1(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,t_i,t_j),\\ f^2(ij)=f^2(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,t_i,t_j),\\ f^3(ij)=f^3(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,t_i,t_j),\\ f^4(ij)=t_i-t_j, \end{array}\right\}$$

в которых четыре компоненты функции $f=f(u,v,w,t_i,t_j)$ *являются независимыми интегралами либо уравнения*

$$\left(qu-\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{w}\right)^2\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(qu+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{w}\right)^2\right)\frac{\partial f}{\partial v}-$$

$$-\frac{v-u}{w}\frac{\partial f}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial t_i}+\frac{\partial f}{\partial t_j}=0,$$

либо уравнения

$$\left(2u-\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{w}\right)^2\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(2v+\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{w}\right)^2\right)\frac{\partial f}{\partial v}+\left(2v+\frac{v-u}{w}\right)\frac{\partial f}{\partial w}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial t_i}+\frac{\partial f}{\partial t_j}=0,$$

где k, l, c, q – *произвольные числа,* $\varepsilon = 0, 1$.

В отношении этой классификации в общих чертах можно сказать тоже самое, что и в отношении классификации, содержащейся в теореме 4. В частности, феноменологическая симметрия четыреметрических геометрий устанавливается по рангу функциональной матрицы для 12 компонент $f(ij), f(ik), f(jk)$ метрической функции f, специальным образом зависящих от 12 переменных – координат тройки $< ijk >$, который оказывается равен 8. Некоторые четырехкомпонентные метрические функции имеют содержательную физическую интерпретацию.

Классификация s-метрических феноменологически симметричных геометрий ранга три для $s > 4$ к настоящему моменту никем не проводилась вследствие возникающих трудностей чисто технического характера. Они большей частью связаны с особенностью применяемого метода, в котором предварительно проводится классификация s-мерных групп Ли преобразований пространства R^s, а затем только находятся метрические функции как невырожденные двухточечные инварианты. Возможно, что эти трудности удастся преодолеть, если при проведении классификации групп преобразований сразу ввести условие существования у них невырожденных двухточечных инвариантов.

§4. К вопросу о симметрии расстояния в геометрии

Обычно расстояние между точками пространства $\mathfrak{M}$ определяется с помощью функции $\rho : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, сопоставляющей каждой паре точек $< ij >$ некоторое число $\rho(ij)$ и удовлетворяющей известной системе аксиом: **1.** $\rho(ij) \geqslant 0$, причем $\rho(ij) = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$; **2.** $\rho(ij) = \rho(ji)$; **3.** $\rho(ik) + \rho(jk) \geqslant \rho(ij)$. Согласно аксиоме **2.** расстояние симметрично. Однако в геометрии нельзя исключить из рассмотрения так называемые симплектические пространства, в которых определяемое между двумя точками расстояние антисимметрично. С другой стороны, симметричный интервал между двумя событиями в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского, не удовлетворяющий аксиомам **1.** и **3.**, тоже можно рассматривать как расстояние. Естественно возникает вопрос: почему в геометрии допускаются только симметричные или антисимметричные расстояния? Оказывается, если предположить существование функциональной связи между расстояниями $\rho(ij)$ и $\rho(ji)$, то будут возможны только такие два типа симметрии. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть имеются множество $\mathfrak{M} = \{i, j, k, \ldots\}$ произвольной природы и функция $f : G_f \to R$, где $G_f \subseteq \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$, сопоставляющая упорядоченной паре $< ij > \in G_f$ вещественное число $f(ij) \in R$, рассматриваемое как расстояние в некотором обобщенном смысле. Двухточечную функцию f будем называть метрической, не требуя от нее выполнения аксиом обычной метрики. В общем случае область определения G_f функции f не обязательно совпадает со всем прямым произведением $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Однако естественно предположить, что если $< ij > \in G_f$, то и $< ji > \in G_f$, то есть расстояния $f(ij)$ и $f(ji)$ определены или не определены одновременно.

Определение. Будем говорить, что метрические функции f и g эквивалентны, если совпадают их области определения G_f и G_g в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ и существует строго монотонная функция $\psi : f(G_f) \to R$ такая, что для любой пары $< ij > \in G_f$ имеет место равенство $g(ij) = \psi(f(ij))$.

Исходя из замечания в работе [2], аксиому симметрии будем формулировать следующим образом [19]:

A.S. Для любых точек $i, j \in \mathfrak{M}$ таких, что пары $< ij >$ и $< ji >$ принадлежат G_f, расстояния $f(ij)$ и $f(ji)$ связаны соотношением

$$f(ij) = \varTheta(f(ji)), \qquad (4,1)$$

где $\varTheta$ – некоторая строго монотонная функция одной переменной, область определения и область значений которой совпадают с областью значений $f(G_f))$ исходной метрической функции.

Теорема. *Если расстояние между точками пространства* $\mathfrak{M}$*, определяемое метрической функцией* $f : G_f \to R$*, где* $G_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$*, удовлетворяет аксиоме симметрии* **A.S.**, *то это расстояние может быть либо симметричным, либо, с точностью до эквивалентности,* *антисимметричным.*

Из соотношения (4,1) для любой пары $< ij > \in G_f$ получаем тождество $\Theta(\Theta(f(ij))) = f(ij)$, означающее, что функция Θ является решением функционального уравнения

$$\Theta(\Theta(x)) = x, \tag{4.2}$$

где $x \in f(G_f) \subseteq R$. По предположению функция Θ строго монотонная и поэтому имеет к себе обратную. Если функция Θ монотонно возрастает, то $\Theta(x) = x$ и расстояние оказывается симметричным. Если же функция Θ монотонно убывает, то, перейдя к эквивалентной метрической функции $g = \psi(f)$, где $\psi(f) = f - \Theta(f)$, имеем в силу (4.1): $g(ij) = f(ij) - \Theta(f(ij)) = f(ij) - f(ji) = -g(ji)$, то есть антисимметричное расстояние. Теорема доказана.

Симметрия или антисимметрия расстояния в геометрии при наличии связи (4.1) ранее были установлены автором в работе "Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства"[20] для того случая, когда это расстояние определялось с помощью функции $F : G_F \to R$, где $G_F \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, задающей на n-мерных многообразиях $\mathfrak{M} = \{i, j, k, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга $(n+1, n+1)$, и некоторого локального диффеоморфизма $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$:

$$f(ij) = F(i, \varphi(j)). \tag{4.3}$$

Для расстояния (4.3) соотношение (4.1) при известной функции F становится функциональным уравнением относительно функции Θ и диффеоморфизма φ:

$$F(i, \varphi(j)) = \Theta(F(j, \varphi(i))).$$

Решая это уравнение для функций

$$F(i\alpha) = x_i^1 \xi_\alpha^1 + \cdots + x_i^n \xi_\alpha^n,$$
$$F(i\alpha) = x_i^1 \xi_\alpha^1 + \cdots + x_i^{n-1} \xi_\alpha^{n-1} + x_i^n + \xi_\alpha^n,$$

где $x^1, \ldots, x^n$ и $\xi^1, \ldots, \xi^n$ локальнве координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, можно найти одновременно и диффеоморфизм φ и функцию Θ, определяющую тип симметрии расстояния (4.3). В надлежаще выбранной в многообразии $\mathfrak{M}$ системе локальных координат выражения для расстояния $f(ij)$ с точностью до локальной эквивалентности можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} f(ij) = g_{\lambda\sigma} x_i^\lambda x_j^\sigma, \\ f(ij) = h_{\mu\nu} x_i^\mu x_j^\nu + x_i^n + a x_j^n, \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

где $a = +1, -1$; $g_{\lambda\sigma} = a g_{\sigma\lambda}$, $\lambda, \sigma = 1, \ldots, n$; $h_{\mu\nu} = a h_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n-1$, причем для $a = -1$ размерность n многообразия $\mathfrak{M}$ четна в первом из выражений (4.4) и нечетна во втором.

Из выражений (4.4) при некоторых естественных дополнительных условиях в случае $a = +1$ можно получить симметричные метрические функции римановых и псевдоримановых пространств постоянной кривизны. В случае же $a = -1$ выражения (4.4) определяют антисимметричные метрические функции симплектических пространств *четной* и, обратим внимание, *нечетной* размерности.

§5. Бинарные и тернарные геометрии

Бинарные феноменологически симметричные геометрии определяются на одном множестве. Двухточечная функция, задающая такую геометрию, допускает нетривиальную группу движений с конечным числом непрерывных параметров, которое было названо степенью групповой симметрии. При определенных соотношениях между рангом феноменологической симметрии, числом существенных параметров группы движений и размерностью многообразия групповая и феноменологическая симметрии оказываются эквивалентными. Эти соотношения были заложены в определение геометрии, ее феноменологической и групповой симметрий. Естественно возникает вопрос об их происхождении и обосновании. Кроме того, имеется много возможностей обобщения и развития понятия геометрии, одна из которых была реализована в §1, когда двум точкам сопоставлялось несколько действительных чисел. Другая возможность обобщения реализуется в определении, например, тернарных геометрий, когда метрическая функция сопоставляет число не двум точкам, а трем. Однако уже предварительное исследование показало, что тернарные геометрии, в отличие от бинарных, не могут быть наделены групповой симметрией, то есть трехточечная метрическая функция не допускает нетривиальную группу движений. Поэтому возникает еще вопрос о причинах такого различия между бинарными и тернарными геометриями.

Для ответа на эти вопросы необходимо исходить из более общего определения полиарных геометрий. Тогда можно будет установить, при каких соотношениях между основными характеристиками геометрии она может быть наделена групповой симметрией, а при каких – не может. Естественно предположить, что только те геометрии содержательны в физическом и математическом смыслах, группы движений которых нетривиальны.

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$ произвольной природы, которое в математическом смысле представляет собой гладкое многообразие размерности m. Пусть также имеется функция

$$f : \mathfrak{S}_f \to R^s, \tag{5.1}$$

где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}^q$, сопоставляющая каждому кортежу длины q из $\mathfrak{S}_f$ некоторую точку из R^s, то есть s действительных чисел. Предполагается, что область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f открыта и плотна в q-арном прямом произведении $\mathfrak{M}^q$ множества $\mathfrak{M}$ на себя, а ее координатное представление достаточно гладкое. Число q назовем арностью, а q-арную и s-компонентную функцию (5.1) – метрической.

Пусть, далее, $M > q$ – произвольное целое число. Построим отображение

$$F : \mathfrak{S}_F \to R^{sC_M^q}, \tag{5.2}$$

где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M$, сопоставляя каждому кортежу длины M из $\mathfrak{S}_F$ упорядоченную по нему совокупность sC_M^q чисел, соответствующих всем кортежам длины q, которые являются проекциями исходного кортежа на область $\mathfrak{S}_f$. Область определения $\mathfrak{S}_F$ функции (5.2) будет, очевидно, открытой и плотной в прямом произведении $\mathfrak{M}^M$. Аналогично построим второе отображение

$$F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sC^q_{M'}}, \tag{5.2$'$}$$

где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'}$ и $M' \geq M$. Проекцию отображения F' получим, опуская из области его определения $\mathfrak{S}_{F'}$ некоторую совокупность кортежей длины q, а из области его значений соответствующие по функции (5.1) числа.

Определение 1. Будем говорить, что функция (5.1) задает на m-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ *q-арную s-метрическую феноменологически симметричную геометрию ранга M*, если на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве ранг отображения F равен $s(C^q_M - 1)$, а ранг любой проекции отображения F', не включающей в себя область отображения F, максимален на плотном в $\mathfrak{S}_{F'}$ множестве.

Другими словами, локально множество значений отображения F в $R^{sC^q_M}$ принадлежит множеству нулей системы s независимых функций $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ от sC^q_M переменных, причем s функциональных связей

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s) = 0 \tag{5.3}$$

являются порождающими в том смысле, что любые другие нетривиальные связи будут только их следствием.

Определение 2. Будем говорить, что определенная выше феноменологически симметричная геометрия *наделена групповой симметрией конечной степени* r, если задано такое эффективное гладкое локальное действие некоторой r-мерной локальной группы Ли G^r в многообразии $\mathfrak{M}$, что компоненты метрической функции (5.1), задающей эту геометрию, являются q-точечными инвариантами.

Поскольку преобразуемое многообразие конечномерно, естественно в определении 2 условие, что максимальное число существенных параметров группы локальных движений конечно.

Запишем систему $sC^q_{M'}$ уравнений, следующих из условия сохранения компонент метрической функции (5.1):

$$Df|_{F'} = 0 \tag{5.4}$$

относительно $M'm$ дифференциалов координат точек кортежа из $\mathfrak{S}_{F'}$. Если введенная определением 1 феноменологически симметричная геометрия наделена групповой симметрией конечной степени, то однородная система (5.4), с одной стороны, должна иметь хотя бы одно ненулевое решение, а с другой, число ее линейно независимых ненулевых решений для любого числа M' не должно превышать некоторого конечного значения, равного степени групповой симметрии. Число таких решений равно, как известно, числу неизвестных в системе минус ранг ее матрицы. Но матрица системы уравнений (5.4) есть функциональная матрица для системы функций f, соответствующих всем упорядоченным проекциям области определения $\mathfrak{S}_{F'}$ отображения (5.2′) на область определения $\mathfrak{S}_f$ исходной функции (5.1). Ранг матрицы системы уравнений (5.4), очевидно, не изменится, если из системы функций $f|_{F'}$ исключить зависимые по связи (5.3). Исключив их, получим максимальную проекцию отображения (5.2′), не содержащую в себе отображения (5.2). Обозначим число функций f в этой максимальной проекции через $N(M')$. Тогда по определению 1 ранг матрицы системы уравнений (5.4) будет равен

$$\min(M'm;\ N(M')). \tag{5.5}$$

Если найдется такое значение числа M', для которого $M'm \leq N(M')$, то ранг матрицы системы уравнений (5.4) для него будет равен $M'm$, то есть числу неизвестных в ней. Но тогда система (5.4) будет иметь только нулевое решение, что означает отсутствие нетривиальной группы движений в рассматриваемой феноменологически симметричной геометрии. Если же для любого значений M' выполняется строгое неравенство $N(M') < M'm$, то ранг матрицы системы уравнений (5.4) будет равен $N(M')$ и число ее линейно независимых ненулевых решений окажется равным

$$r' = M'm - N(M') > 0. \tag{5.6}$$

Число r', как было отмечено выше, в случае наделения феноменологически симметричной геометрии групповой симметрией конечной степени не должно превышать некоторого конечного значения. Из этого условия установим, при каком соотношении между размерностью множества и рангом феноменологической симметрии задаваемая по определению 1 метрической функцией (5.1) геометрия может быть наделена групповой симметрией и определить степень r этой симметрии.

Рассмотрим сначала бинарные (q=2) геометрии.

Бинарная s-метрическая феноменологически симметричная геометрия ранга $M \geq 3$ на одном множестве $\mathfrak{M}$, которое является m-мерным многообразием, задается метрической функцией (5.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, причем по определению 1 ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sM(M-1)/2}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M$, равен $sM(M-1)/2 - s$. Найдем, сколько в системе $sM'(M'-1)/2$ функций отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'(M'-1)/2}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'}$ и $M' \geq M$, при этом будет зависимых. На матрицу пар для кортежа длины M' из $\mathfrak{S}_{F'}$ будем последовательно налагать матрицу пар для кортежа длины F из $\mathfrak{S}_F$. При каждом полном наложении вычеркнем одну пару, например, последнюю. Эта процедура повторяется до тех пор, пока возможно наложение без пропуска. Число зависимых функций будет равно, очевидно, числу состоявшихся наложений, умноженному на число s. Нетрудно установить, что искомое число равно $s(M'-M+1)(M'-M+2)/2$ и потому ранг функциональной матрицы всей системы функций $f|_{F'}$ по определению 1 будет равным

$$\min(M'm;\ sM'(M'-2)/2 - s(M'-M+1)(M'-M+2)/2).$$

Если $m < s(M-2)$, то для достаточно больших значений M' ранг матрицы системы уравнений (5.4) в рассматриваемом случае равен $M'm$, то есть числу неизвестных в ней, и потому она имеет для этих значений M' только нулевое решение. Следовательно при $m < s(M-2)$ бинарная s-метрическая феноменологически симметричная геометрия ранга M не может быть наделена групповой симметрией. Если же $m \geq s(M-2)$, то для всех $M' \geq M$ ранг матрицы системы (5.4) меньше $M'm$ и она по формуле (5.6) имеет

$$r' = M'm - sM'(M-2) + s(M-1)(M-2)/2$$

линейно независимых ненулевых решений. При $m > s(M-2)$ с ростом M' число решений r' может стать сколь угодно большим, что противоречит условию конечности степени групповой симметрии согласно определению 2. Поэтому, если рассматриваемая бинарная геометрия наделена групповой симметрией конечной степени, то размерность m

многообразия $\mathfrak{M}$ и ее ранг должны быть связаны соотношением

$$\mathbf{m} = \mathbf{s}(\mathbf{M} - \mathbf{2}). \tag{5.7}$$

При соотношении (5.7) число линейно независимых ненулевых решений r' системы уравнений (5.4) равно числу существенных и независимых параметров группы движений, то есть степени r групповой симметрии:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{M} - \mathbf{1})(\mathbf{M} - \mathbf{2})/\mathbf{2} = \mathbf{m}(\mathbf{m} + \mathbf{s})/\mathbf{2s}. \tag{5.8}$$

Полученные соотношения (5.7) и (5.8) между размерностью m многообразия $\mathfrak{M}$, рангом M феноменологической симметрии задаваемой на нем функцией (5.1) бинарной ($q = 2$) s-метрической геометрии и степенью ее групповой симметрии r были использованы в определениях §1 настоящей монографии, а также в монографии автора [10] и в его работах [11], [21]. [22]. При сопоставлении соотношений (5.7) и (5.8) с соответствующими соотношениями §1 и других указанных выше источников необходимо, очевидно, сделать следующие замены: $m \to sn, M \to m$.

Перейдем к рассмотрению тернарных (q=3) геометрий.

Для тернарной феноменологически симметричной геометрии ранга M, где $M \geq 4$, задаваемой на одном множестве $\mathfrak{M}$, представляющем собой m-мерное многообразие, метрической функцией (5.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}^3$, ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sM(M-1)(M-2)/6}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M$, по определению 1 равен $sM(M-1)(M-2)/6 - s$. Найдем ранг отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'(M'-1)(M'-2)/6}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'}$ и $M' \geq M$. Среди всех $sM'(M'-1)(M'-2)/6$ функций $f|_{F'}$ этого отображения число зависимых определяется методом наложения матрицы троек для кортежа длины M из $\mathfrak{S}_F$ на матрицу троек для кортежа длины M' из $\mathfrak{S}_{F'}$. Этот метод был описан выше при рассмотрении бинарных геометрий на одном множестве. Для числа зависимых функций отображения F' аналогично получаем значение $s(M'-M+1)(M'-M+2)(M'-M+3)/6$. По определению 1 ранг матрицы системы уравнений (5.4) будет равен

$$\min(M'm;\ sM'(M'-1)(M'-2)/6 -$$
$$- s(M'-M+1)(M'-M+2)(M'-M+3)/6).$$

Поскольку $M > 3$, для достаточно больших значений M' этот ранг равен $M'm$, то есть числу неизвестных в системе уравнений (5.4) и она поэтому для таких значений M' имеет только нулевое решение. Таким образом, тернарные феноменологически симметричные геометрии на одном множестве не могут быть наделены групповой симметрией. Аналогичный результат и аналогичным методом может быть получен для любой q-арной феноменологически симметричной геометрии, арность которой больше трех.

Окончательный вывод по результатам проведенного выше исследования выражает следующая

Теорема. *Групповой симметрией конечной степени могут быть наделены только бинарные* ($q = 2$) *феноменологически симметричные геометрии, в то время как для q-арных феноменологически симметричных геометрий с $q \geq 3$ задающая их метрическая функция* (5.1) *не допускает никаких нетривиальных локальных движений.*

Только что сформулированной теореме об отсутствии групповой симметрии у всех q-арных феноменологически симметричных геометрий с $q \geq 3$ как будто бы противоречит следующий простой пример. Сопоставим каждой тройке точек $< ijk >$ координатной плоскости (x, y) ориентированную площадь треугольника с вершинами в этих точках:

$$S(ijk) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5.9}$$

Для произвольной четверки $< ijkl >$ точек этой плоскости четыре площади треугольников $< ijk >$, $< ijl >$, $< ikl >$, $< jkl >$ функционально связаны следующим очевидным соотношением:

$$S(ijk) - S(ijl) + S(ikl) - S(jkl) = 0. \tag{5.10}$$

Кроме того, функция (5.9) допускает пятипараметрическую группу движений:

$$x' = ax + by + c, \quad y' = gx + hy + d, \tag{5.11}$$

где $ah - bg = 1$.

Таким образом, вроде бы приходим к выводу, что трехточечная функция площади (5.9) все-таки задает на координатной плоскости (x, y) тернарную геометрию, которая, с одной стороны, феноменологически симметрична, а с другой – наделена групповой симметрией степени пять.

Однако в соответствии с определением 1 наличие функциональной связи (5.10) не является достаточным условием того, чтобы функция (5.9) задавала на плоскости тернарную феноменологически симметричную геометрию ранга 4. Необходимо еще по нему, чтобы связь (5.10) была порождающей в следующем смысле: *всякая другая нетривиальная связь должна быть ее следствием.*

Покажем, что именно этому условию уравнение (5.10) и не удовлетворяет. Возьмем на плоскости семерку точек $< ijklpmn >$, которой по функции (5.9) сопоставим все тридцать пять площадей $S(ijk), S(ijl), \ldots,$ $S(imn)$; $S(jkl), S(jkp), \ldots,$ $S(pmn)$ соответствующих треугольников $< ijk >, \ldots, < pmn >$. Из этих тридцати пяти площадей по связи (5.10) можно исключить двадцать: $S(jkl), \ldots, S(pmn)$. Между оставшимися пятнадцатью площадями $S(ijk), S(ijl), \ldots,$ $S(imn)$ имеется одна тривиальная связь, так как они зависят только от четырнадцати координат $x_i, y_i, x_j, y_j, \ldots, x_n, y_n$. Если связь (5.10) порождающая, то, исключая, например, площадь $S(ijk)$, получаем четырнадцать площадей

$$S(ijl), S(ijp), \ldots, S(imn), \tag{5.12}$$

которые должны быть независимыми. Тривиальной связи между ними быть не может, так как они являются функциями четырнадцати координат точек семерки $< ijklpmn >$, но нетривиальные связи между ними, в действительности, есть, в чем можно убедиться из следующих простых соображений. Если бы таких связей не было, то семиточечная фигура $< ijklpmn >$ не имела бы для своего движения ни одной степени свободы, так как на четырнадцать координат ее точек было бы наложено столько же независимых соотношений, обусловленных инвариантностью четырнадцати площадей (5.12). В действительности же, семиточечная фигура $< ijklpmn >$, сохраняя площади всех тридцати пяти треугольников, может перемещаться по плоскости с пятью степенями свободы: одно вращение, два параллельных переноса и два сдвига. Соответствующая пятипараметрическая группа движений задается уравнениями (5.11). Установленное противоречие и доказывает, что между четырнадцатью площадями (5.12) должны существовать дополнительные нетривиальные функциональные связи, не являющиеся следствием основной связи (5.10), которая, таким образом, не является порождающей. Поэтому функция (5.9) не задает на плоскости $\mathfrak{M} = R^2$ тернарную феноменологически симметричную геометрию ранга 4 в смысле определения 1, несмотря на наличие функциональной связи (5.10), так как ранг проекции отображения $F' : \mathfrak{M}^7 \to R^{35}$, задаваемой четырнадцатью площадями (5.12) и не содержащей отображения $F : \mathfrak{M}^4 \to R^4$, меньше четырнадцати, то есть не максимален.

Групповая симметрия бинарных феноменологически симметричных геометрий, которым было уделено основное внимание в монографии автора "Полиметрические геометрии"[10] и в первой главе настоящей его монографии, является определяющей. То есть функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}^2$, будет задавать феноменологически симметричную геометрию в том и только в том случае, если она допускает нетривиальную конечномерную группу движений. Условие наделения феноменологически симметричной геометрии групповой симметрией конечной степени определяет эту степень, устанавливая ее связь с размерностью многообразия и рангом феноменологической симметрии соотношениями (5.7) и (5.8). С другой стороны, без предположения о групповой симметрии в смысле определения 2 даже соотношение (5.7), устанавливающее связь размерности многообразия и ранга феноменологической симметрии и не содержащее степень групповой симметрии, должно оговариваться дополнительно без достаточно убедительного обоснования этой связи.

§6. Функциональные уравнения в геометрии

Рассмотрим одномерную геометрию, которая задается невырожденной метрической функцией

$$f(ij) = f(x_i, x_j). \tag{6.1}$$

Согласно определению 1 из §1 ее феноменологическая симметрия ранга 3, выражается уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0. \tag{6.2}$$

Уравнение (6.2) должно обращаться в тождество по координатам x_i, x_j, x_k точек тройки $< ijk >$ при подстановке в него функции (6.1). Таким образом, уравнение (6.2) фактически является функциональным уравнением как относительно метрической функции (6.1), так и относительно функции Φ, с помощью которой выражается феноменологическая симметрия одномерной геометрии.

Ниже кратко опишем метод решения функционального уравнения (6.2). Сначала представим его в виде, разрешенном относительно одного из аргументов:

$$f(ij) = \varphi(f(ik), f(jk)), \tag{6.3}$$

где $\varphi(u, v)$ – гладкая функция двух переменных с отличными от нуля производными φ_u и φ_v.

Возьмем, далее, упорядоченную четверку точек $< ijkl >$ и запишем уравнение (6.3) для троек $< ijk >$, $< ijl >$, $< ikl >$, $< jkl >$:

$$\left.\begin{aligned} f(ij) = \varphi(f(ik), f(jk)), \\ f(ij) = \varphi(f(il), f(jl)), \\ f(ik) = \varphi(f(il), f(kl)), \\ f(jk) = \varphi(f(jl), f(kl)), \end{aligned}\right\}$$

откуда легко получаем равенство

$$\varphi[\varphi(f(il), f(kl)), \varphi(f(jl), f(kl))] = \varphi(f(il), f(jl)),$$

в котором, очевидно, независимы переменные $f(il), f(jl), f(kl)$. Если для них ввести обозначения $x = f(il), y = f(jl), z = f(kl)$, то приходим к функциональному уравнению

$$\varphi(\varphi(x, z), \varphi(y, z)) = \varphi(x, y). \tag{6.4}$$

имеющему следующее нетривиальное решение:

$$\varphi(u,v) = \psi(\psi^{-1}(u) - \psi^{-1}(v)), \tag{6.5}$$

где ψ – произвольная гладкая функция одной переменной с $\psi' \neq 0$, ψ^{-1} – обратная к ней функция.

С поиощью решения (6.5) от уравнения (6.3) приходим к уравнению (6.2):

$$\psi^{-1}(f(ij)) - \psi^{-1}(f(ik)) + \psi^{-1}(f(jk)) = 0. \tag{6.6}$$

Явный вид самой метрической функции (6.1) можно найти из того же уравнения (6.3) с решением (6.5), если в нем зафиксировать координату x_k точки k:

$$f(ij) = \psi(\varphi(x_i) - \varphi(x_j)), \tag{6.7}$$

где $\varphi(x) = \psi^{-1}(f(x, x_k))|_{x_k=const}$.

В совокупности уравнение (6.6) и функция (6.7) являются общим решением функционального уравнения (6.2). С точностью до замены координаты $\varphi(x) \to x$ в одномерном многообразии и масштабного преобразования $\psi^{-1}(f) \to f$ метрической функции это решение может быть записано в следующей канонической форме:

$$\left.\begin{array}{c} f(ij) = x_i - x_j, \\ f(ij) - f(ik) + f(jk) = 0. \end{array}\right\} \tag{6.8}$$

Гладкое обратимое преобразование одномерного многообразия

$$x' = \lambda(x) \tag{6.9}$$

называется движением, если оно сохраняет метрическую функцию: $f(i'j') = f(ij)$. Отсюда при известной метрической функции (6.1) получаем функциональное уравнение на множество движений:

$$f(\lambda(x_i), \lambda(x_j)) = f(x_i, x_j), \tag{6.10}$$

решением которого для одномерной феноменологически симметричной геометрии является однопараметрическая группа

$$x' = \lambda(x; a). \tag{6.11}$$

Обратно, если известна однопараметрическая группа преобразований (6.11), то метрическая функция одномерной геометрии, для которой эта группа будет группой движений, найдется как ее двухточечный инвариант решением следующего функционального уравнения

$$f(\lambda(x_i;a),\lambda(x_j;a))=f(x_i,x_j). \qquad (6,12)$$

Пусть инфинитезимальный оператор

$$X=\lambda(x)\partial/\partial x \qquad (6.13)$$

принадлежит алгебре Ли группы движений (6.11). Тогда метрическая функция одновременно является решением дифференциального уравнения

$$X(i)f(ij)+X(j)f(ij)=0, \qquad (6.14)$$

которое, в свою очередь, при известной метрической функции (6.1) является функциональным уравнением на коэффициент $\lambda(x)$ оператора (6.13).

Двумерная геометрия задается невырожденной метрической функцией

$$f(ij)=f(x_i,y_i,x_j,y_j), \qquad (6.15)$$

а ее феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\Phi(f(ij),f(ik),f(il),f(jk),f(jl),f(kl))=0. \qquad (6.16)$$

При подстановке метрической функции (6.15) в уравнение (6.16) оно по восьми координатам $x_i,y_i,x_j,y_j,x_k,y_k,x_l,y_l$ точек четверки $<ijkl>$ должно обратиться в тождество. Таким образом, это уравнение в действительности является особого рода функциональным уравнением относительно как самой метрической функции f, так и относительно функции Φ, с помощью которой выражается феноменологическая симметрия двумерной геометрии. С точностью до замены координат в двумерном многообразии и масштабного преобразования $\psi(f)\to f$ все возможные решения уравнения (6.16) относительно метрической функции (6.15) могут быть записаны в одиннадцати канонических формах (2.7) – (2.17). Что же касается функции Φ, то не всегда ее можно записать в явном виде, о чем более подробно было сказано в §2 после указанной классификации.

Множество обратимых движений

$$x' = \lambda(x, y),\ y' = \sigma(x, y), \tag{6.17}$$

сохраняющих метрическую функцию (6.15), является совокупностью решений функционального уравнения

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \tag{6.18}$$

Согласно теореме 3 из §1 это множество есть трехпараметрическая группа преобразований многообразия:

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3),\ y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3), \tag{6.19}$$

определяющая групповую симметрию соответствующей двумерной геометрии. Если же группа преобразований (6.19) известна, то с точностью до масштабного преобразования метрическая функция (6.15) восстанавливается как ее невырожденный двухточечный инвариант решением другого функционального уравнения:

$$f(\lambda(i; a), \sigma(i; a), \lambda(j; a), \sigma(j; a)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{6.20}$$

где, например, $\lambda(i; a) = \lambda(x_i, y_i; a^1, a^2, a^3)$.

Пусть

$$X = \lambda(x, y)\partial/\partial x + \sigma(x, y)\partial/\partial y \tag{6.21}$$

есть инфинитезимальный оператор трехмерной алгебры Ли группы движений (6.19). Тогда метрическая функция (6.15) является также решением дифференциального уравнения

$$X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0. \tag{6.22}$$

Однако при известной метрической функции (6.15) оно уже будет функциональным уравнением на коэффициенты λ и σ оператора (6.21).

Циклом двумерной геометрии назовем такую гладкую невырожденную кривую

$$x = x(t),\ y = y(t), \tag{6.23}$$

по которой свободно может катиться жесткий треугольник $< ijk >$. Ясно, что на множестве точек этой кривой метрическая функция (6.15) должна задавать феноменологически симметричную одномерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени 1. В результате получаем следующее функциональное уравнение на цикл [23, §12]:

$$f(x(t_i), y(t_i), x(t_j), y(t_j)) = \psi(t_i - t_j). \tag{6.24}$$

Например, для плоскости Евклида функциональное уравнение

$$(x(t_i) - x(t_j))^2 + (y(t_i) - y(t_j))^2 = \psi(t_i - t_j)$$

имеет два решения [23, §15]:

$$\mathbf{1)}\;\; x = at + b,\; y = ct + d; \quad \mathbf{2)}\;\; x = R\cos t + x_0,\; y = R\sin t + y_0,$$

где $a^2 + c^2 \neq 0$, $R > 0$, которые задают на ней множество прямых и множество окружностей.

Заметим, что функциональные уравнения, аналогичные уравнениям (6.18), (6.20), (6.22), (6.24), могут быть записаны для любой геометрии, задаваемой метрической функцией (1.2). Например, для трехмерной геометрии, задаваемой метрической функцией (2.20), функциональное уравнение на цикл будет следующим:

$$f(x(t_i), y(t_i), z(t_i), x(t_j), y(t_j), z(t_j)) = \psi(t_i - t_j),$$

а для трехмерной геометрии, задаваемой трехкомпонентной метрической функцией (3.14), система функциональных уравнений на цикл запишется точно также, но в ней уже $f = (f^1, f^2, f^3)$ и $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$. Метод решения большинства геометрических функциональных уравнений состоит в сведении их к дифференциальным и разделении переменных.

§7. Вопросы классификации феноменологически симметричных геометрий

В теории физических структур классификация феноменологически симметричных геометрий является одной из наиболее важных задач. Дело в том, что и сами метрические функции (1.2), задающие такие геометрии, и уравнения (1.1), выражающие их феноменологическую симметрию, могут иметь содержательную физическую интерпретацию.

В §2 и §3 приведены построенные к настоящему времени полные классификации одномерных, двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий соответствующих рангов 3, 4 и 5, а также двуметрических, триметрических и четыреметрических феноменологически симметричных геометрий минимального ранга, равного 3. Другие классификации пока не построены, так как еще не найдены новые методы решения подобных задач.

Ниже будут перечислены те классификационные задачи, которые, с одной стороны, являются естественным продолжением уже решенных, а с другой – могут привлечь тех читателей, которым удастся найти более эффективные методы их решения.

1. *Четырехмерные геометрии*

Четырехмерная геометрия задается на четырехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ невырожденной метрической функцией

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, t_i, x_j, y_j, z_j, t_j), \tag{7.1}$$

а ее феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(im), f(in), f(jk), f(jl), f(jm), f(jn), ..., f(mn)) = 0, \tag{7.2}$$

устанавливающим связь 15 взаимных расстояний между шестью точками кортежа $< ijklmn >$ из некоторого открытого и плотного в $\mathfrak{M}^6$ множества. Наделена же такая геометрия групповой симметрией степени 10.

Предварительная классификация четырехмерных геометрий была приведена в конце §2. Но эту классификацию нельзя считать окончательной, так как используемые методы не позволили преодолеть встретившиеся трудности технического характера. В настоящее время В.А. Кыровым разрабатывается новый метод их классификации, опирающийся на гипотезу о вложении. Суть этой гипотезы иллюстрирует классификация (2.23) – (2.37) трехмерных феноменологически симметричных геометрий, из которой видно, что каждая ее метрическая функция содержит внутри себя как целое метрическую функцию, задающую двумерную феноменологически симметричную геометрию:

$$f(ij) = f(g(ij), z_i, z_j),$$

где выражение для $g(ij) = g(x_i, y_i, x_j, y_j)$ берется из классификации (2.7) – (2.17). К сожалению, строгого доказательства гипотезы о вложении пока нет, однако уже имеющимися полными классификациями она подтверждается.

2. *Двуметрические и триметрические геометрии*

Двуметрические и триметрические феноменологически симметричные геометрии минимального ранга 3 были рассмотрены в §3 и для них построены полные классификации (3.12) - (3.13) и (3.28) - (3.38). Естественно поэтому перейти к классификации двуметрических и триметрических феноменологически симметричных геометрий более высокого ранга равного четырем. Например двуметрическая феноменологически симметричная геометрия ранга 4 задается на четырехмерном многообразии двухкомпонентной метрической функцией

$$f(ij) = (f^1(ij), f^2(ij)) = f(x_i, y_i, z_i, t_i, x_j, y_j, z_j, t_j), \qquad (7.3),$$

а ее феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0, \qquad (7.4)$$

где Φ – двухкомпонентная функция 12 переменных. Степень ее групповой симметрии равна 6.

В полную классификацию таких геометрий, очевидно, входят все пары метрических функций из классификации (2.7) – (2.17), причем $f^1(ij) = f^1(x_i, y_i, x_j, y_j)$, $f^2(ij) = f^2(z_i, t_i, z_j, t_j)$. Например, сочетание функций (2.7) и (2.12), задающих плоскость Евклида и симплектическую плоскость:

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \; f^2(ij) = z_i t_j - z_j t_i$$

есть двухкомпонентная метрическая функция, задающая одну из двуметрических четырехмерных феноменологически симметричных геометрий ранга 4. Общее число сочетаний, включая диагональные, равно 65. Но, возможно, существуют и такие двуметрические геометрии, метрические функции (7.3) которых подобными сочетаниями не являются.

3. *Полиметрические геометрии*

Классификации некоторых феноменологически симметричных полиметрических геометрий минимального ранга, равного 3, были представлены в §3. Такие геометрии задаются в пространстве R^s s-компонентной метрической функцией

$$f(ij) = (f^1(ij), ..., f^s(ij)) = f(x_i^1, ..., x_i^s, x_j^1, ..., x_j^s),$$

а их феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0,$$

где Φ – s-компонентная функция $3s$ переменных. Полная классификация построена только для $s = 1, 2, 3, 4$ и отсутствует для $s \geq 5$.

Классификация феноменологически симметричных геометрий еще не завершена. Поэтому имеет смысл представить в обозримом виде перечень задач, как решенных, так и не решенных. Тогда каждый, у кого появится желание испытать свои силы и способности, сможет выбрать для этого любую из них (в том числе и решенную – для разработки новых методов классификации и проверки уже полученных результатов). Приведем этот перечень в виде следующей таблицы:

Классификация феноменологически симметричных геометрий							
№	s	n	sn	$m = n + 2$	$sn(n+1)/2$	реш.	ист.
1	1	1	1	3	1	+	§2
2	1	2	2	4	3	+	§2
3	1	3	3	5	6	+	§2
4	1	4	4	6	10	—	—
5	1	$\geqslant 5$	$5, 6, \ldots$	$7, 8, \ldots$	$15, 21, \ldots$	—	—
6	2	1	2	3	2	+	§3
7	2	$\geqslant 2$	$4, 6, \ldots$	$4, 5, \ldots$	$6, 12, \ldots$	—	—
8	3	1	3	3	3	+	§3
9	3	$\geqslant 2$	$6, 9, \ldots$	$4, 5, \ldots$	$9, 18, \ldots$	—	—
10	4	1	4	3	4	+	§3
11	4	$\geqslant 2$	$8, 12, \ldots$	$4, 5, \ldots$	$12, 24, \ldots$	—	—
12	$\geqslant 5$	$\geqslant 1$	$\geqslant 5$	$\geqslant 3$	$\geqslant 5$	—	—

Напомним, что s – число компонент метрической функции $f = (f^1, \ldots, f^s)$, которая на sn-мерном многообразии задает феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n+2$, группа движений которой зависит от $sn(n+1)/2$ непрерывных параметров. В последних двух столбцах таблицы знаком плюс сделана отметка о решении данной задачи и указан параграф, в котором находится соответствующая полная классификация.

Метрические функции, задающие на многообразии феноменологически симметричные геометрии, являются невырожденными двухточечными инвариантами некоторых групп преобразований этого многообразия. Задача их классификации предполагала предварительную классификацию групп преобразований с определенным числом непрерывных параметров. Однако с ростом числа компонент метрической функции и ранга феноменологической симметрии задаваемой ею геометрии проведение классификации групп преобразований становится технически очень сложной задачей. Поэтому естественно возникает вопрос: является ли предварительная классификация групп преобразований многообразия действительно необходимой. Ведь для многих из них двухточечные инварианты оказываются вырожденными. Следовательно, имеет смысл сначала установить, какому условию должна удовлетворять группа преобразований, чтобы ее двухточечный инвариант был невырожденным. Например, при построении классификации (3.28)–(3.38) трехмерных триметрических феноменологически симметричных геометрий ранга 3 таким условием была транзитивность группы преобразований. В целом же вопрос о дополнительных ограничениях на группы преобразований, следующих из невырожденности их двухточечных инвариантов, пока остается открытым. Отметим еще, что все определения и результаты главы 1 локальны. Их глобализация требует качественно нового шага в развитии методов исследования и является новой проблемой, значимость которой обусловливается содержательной интерпретацией феноменологически симметричных геометрий не только в самой геометрии, но и в физике.

ГЛАВА II
Физическая структура как геометрия двух множеств

§8. Феноменологическая и групповая симметрии физических структур

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся sm-мерным и sn-мерным многообразиями, где s, m и n – натуральные числа, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R^s$, сопоставляющая паре $<i\alpha>$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in R^s$. Заметим, что в общем случае $\mathfrak{S}_f \neq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, то есть функция f не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляет s чисел, но в последующем изложении удобно в явной записи значения $f(i\alpha)$ этой функции для пары $<i\alpha>$ подразумевать, что $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$. Обозначим через $U(i)$ и $U(\alpha)$ окрестности точек $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, через $U(<i\alpha>)$ – окрестность пары $<i\alpha> \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на себя или друг на друга.

Для некоторых кортежей $< \alpha_1 \ldots \alpha_m > \in \mathfrak{N}^m$ и $< i_1 \ldots i_n > \in \mathfrak{M}^n$ введем функции $f^m = f[\alpha_1 \ldots \alpha_m]$ и $f^n = f[i_1 \ldots i_n]$, сопоставляя точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ точки $(f(i\alpha_1), \ldots, f(i\alpha_m)) \in R^{sm}$ и $(f(i_1\alpha), \ldots, f(i_n\alpha)) \in R^{sn}$, если пары $< i\alpha_1 >, \ldots, < i\alpha_m >$ и $< i_1\alpha >, \ldots, < i_n\alpha >$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Заметим, что функции f^m и f^n не обязательно определены всюду на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.

II. Функция f в области своего определения достаточно гладкая.

III. В $\mathfrak{N}^m$ и $\mathfrak{M}^n$ плотны множества таких кортежей длины m и n для которых функции f^m и f^n имеют максимальные ранги, равные sm и sn, в точках плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств соответственно.

Достаточная гладкость означает, что в области своего определения непрерывна как сама функция f, так и все ее производные достаточно высокого порядка. Гладкую функцию f, для которой выполняется условие III, будем называть *невырожденной.* Заметим также, что ограничения в аксиомах I, II, III открытыми и плотными подмножествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

Введем еще функцию F, сопоставляя кортежу $<ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau>$ длины $m+n+2$ из $\mathfrak{M}^{n+1}\times\mathfrak{N}^{m+1}$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \dots, f(v\tau)) \in R^{s(m+1)(n+1)}$, координаты которой в $R^{s(m+1)(n+1)}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов $(< i\alpha >, < i\beta >, \dots, < v\tau >)$, если эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения введенной функции есть, очевидно, открытое и плотное в $\mathfrak{M}^{n+1}\times\mathfrak{N}^{m+1}$ множество, которое обозначим через $\mathfrak{S}_F$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга* $(n+1, m+1)$, если, кроме аксиом I, II, III, дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $<ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau>$ длины $m+n+2$ которого и некоторой его окрестности $U(<i\dots\tau>)$ найдется такая достаточно гладкая s-компонентная функция $\Phi : \mathcal{E}\to R^s$, определенная в некоторой области $\mathcal{E}\subset R^{s(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(< i\dots\tau >)$, что в ней $\mathrm{rang}\ \Phi = s$ и множество $F(U(< i\dots\tau >))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \dots, f(v\tau)) = 0 \qquad (8.1)$$

для всех кортежей из $U(<ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau>)$.

Аксиома IY составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Уравнения (8.1) задают s функциональных связей между $s(m+1)(n+1)$ измеряемыми в опыте значениями s физических величин $f = (f^1, \dots, f^s)$ и являются аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически симметричной форме. Условие rang $\Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_s = 0$) независимы.

Пусть $x = (x^1, \ldots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{sn})$ – локальные координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для исходной функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$ каждой пары $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$ получаем тогда локальное координатное представление

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha) = f(x_i^1, \ldots, x_i^{sm}, \xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^{sn}), \tag{8.2}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III. Поскольку по аксиоме III ранги функций f^m и f^n максимальны, координаты x и ξ входят в представление (8.2) существенным образом. Последнее означает, что никакая гладкая локально обратимая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (8.2), то есть ни для какой локальной системы координат его невозможно записать в виде

$$f(i\alpha) = f(x_i^1, \ldots, x_i^{m'}, \xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^{n'}),$$

где или $m' < sm$, или $n' < sn$. Действительно, если, например, $m' < sm$, то для любого кортежа $<\alpha_1 \ldots \alpha_m> \in (U(\alpha))^m$ длины m и для любой точки из $U(i)$ ранг функции $f^m = f[\alpha_1 \ldots \alpha_m]$ будет заведомо меньше sm, что противоречит аксиоме III. Заметим, однако, что существенная зависимость представления (8.2) от локальных координат x_i и ξ_α еще не гарантирует выполнения аксиомы III. То есть при наличии всех координат в любом таком представлении функция f может оказаться вырожденной.

Функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем рассматривать как метрическую в геометрии двух множеств. Но поскольку s расстояний $f(i\alpha)$ определены для точек разных множеств, обычные аксиомы метрики здесь не имеют смысла.

Используя представление (8.2), запишем локальное координатное задание для введенной выше функции F:

$$\left.\begin{array}{c} f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha), \\ f(i\beta) = f(x_i, \xi_\beta), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(v\tau) = f(x_v, \xi_\tau), \end{array}\right\} \tag{8.3}$$

функциональная матрица которого

$$\left\| \begin{array}{ccccccccccc} \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i} & 0 & ... & 0 & 0 & \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & \dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial x_v} & 0 & 0 & ... & 0 & \dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial \xi_\tau} \end{array} \right\| \tag{8.4}$$

имеет $s(m+1)(n+1)$ строк и $s(2mn+m+n)$ столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ кратко обозначены соответствующие функциональные матрицы для компонент функции $f = (f^1, \dots, f^s)$ по координатам $x = (x^1, \dots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{sn})$ соответственно:

$$\partial f/\partial x = \left\| \begin{array}{ccc} \partial f^1/\partial x^1 & \cdots & \partial f^1/\partial x^{sm} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f^s/\partial x^1 & \cdots & \partial f^s/x^{sm} \end{array} \right\|,$$

$$\partial f/\partial \xi = \left\| \begin{array}{ccc} \partial f^1/\partial \xi^1 & \cdots & \partial f^1/\partial \xi^{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f^s/\partial \xi^1 & \cdots & \partial f^s/\partial \xi^{sn} \end{array} \right\|.$$

Задание (8.3) для функции F представляет собой систему $s(m+1)(n+1)$ функций $f^1(i\alpha), \dots, f^s(i\alpha), \dots, f^1(v\tau), \dots, f^s(v\tau)$, специальным образом зависящих от $s(2mn+m+n)$ переменных $x_i^1, \dots, x_i^{sm}$, $\dots, \xi_\tau^1, \dots, \xi_\tau^{sn}$ – координат всех точек кортежа $<ijk...v, \alpha\beta\gamma...\tau>$ длины $m+n+2$. Поскольку число функций в системе (8.3) не больше общего числа переменных, наличие связи (8.1) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций в этой системе.

Рассмотренные в первой главе геометрии одного множества показывают, что их феноменологическая и групповая симметрии взаимно обуславливают друг друга. Так, связь между шестью расстояниями для любых четырех точек в двумерной геометрии, не обязательно евклидовой, приводит к существованию в ней трехпараметрической группы движений. Но движение в геометрии двух множеств имеет свою специфику, отличную от привычных свойств движения в геометрии одного множества. Поэтому необходимо дать соответствующие точные определения.

Под локальным движением в геометрии двух множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем понимать такую пару взаимно однозначных гладких отображений (преобразований)

$$\lambda : U \to U' \ \text{ и } \ \sigma : V \to V', \tag{8.5}$$

где $U, U' \subset \mathfrak{M}$ и $V, V' \subset \mathfrak{N}$ – открытые области, при которых функция f сохраняется. Последнее означает, что для каждой пары $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i \in U,\ \alpha \in V$ и $<i'\alpha'> \in \mathfrak{S}_f$, где $i' = \lambda(i) \in U'$, $\alpha' = \sigma(\alpha) \in V'$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha), \tag{8.6}$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \ldots, f^s$ функции f.

Множество всех движений (8.5) есть локальная группа преобразований, для которой функция f, согласно равенству (8.6), является *двухточечным инвариантом.* Преобразования λ и σ в движениях (8.5) сами составляют две отдельные группы, а группа движений есть их взаимное расширение. Если функция f известна, например, в своем локальном координатном представлении (8.2), то равенство (8.6) представляет собой функциональное уравнение относительно преобразований λ и σ. Нам же о функции f известно только, что она невырождена и удовлетворяет некоторой системе s независимых уравнений (8.1). Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы ее движений, зависящей от smn параметров.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени smn*, если, кроме аксиом I, II, III, дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY$'$. Существуют открытые и плотные в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия smn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, такие что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ и $U(\alpha), U(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$ и что функция f является двухточечным инвариантом по каждой из своих s компонент.

Напомним, что группы Ли преобразований гладких многообразий были описаны в §1 перед формулировкой аналогичной аксиомы IV$'$ в геометрии одного множества. Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IY$'$ настоящего параграфа, определяют своеобразную локальную подвижность жестких фигур ("твердых тел") в пространстве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ с smn степенями свободы. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть. Множество пар $<i\alpha>$, для которых функция f определена и одновременно является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Согласно аксиоме IY$'$, на открытых и плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествах заданы smn-мерные линейные семейства гладких векторных полей X и Ξ, замкнутые относительно операции коммутирования, то есть алгебры Ли преобразований. В некоторых локальных системах координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ базисные векторные поля этих семейств запишем в операторной форме:

$$\left.\begin{aligned} X_\omega &= \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu, \\ \Xi_\omega &= \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial \xi^\nu, \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

где $\omega = 1, \ldots, smn$, а по "немым"индексам μ и ν производится суммирование от 1 до sm и от 1 до sn соответственно. По критерию инвариантности функция $f(i\alpha)$ будет инвариантом локальной группы преобразований некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$, то есть двухточечным инвариантом, в том и только в том случае, если она покомпонентно удовлетворяет системе smn уравнений

$$X_\omega(i)f(i\alpha) + \Xi_\omega(\alpha)f(i\alpha) = 0 \tag{8.8}$$

с операторами (8.7):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x^\mu_i} + \sigma^\nu_\omega(\alpha)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi^\nu_\alpha} = 0, \tag{8.9}$$

где $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(x_i) = \lambda^\mu_\omega(x^1_i, \ldots, x^{sm}_i)$ и $\sigma^\nu_\omega(\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\xi_\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\xi^1_\alpha, \ldots, \xi^{sn}_\alpha)$.

Теорема 1. *Если функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени smn, то она на тех же мно-*

гообразиях задает физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n+1, m+1)$.

Теорема 2. *Если функция* $f = (f^1, \dots, f^s)$ *задает на* sm*-мерном и* sn*-мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга* $(n+1, m+1)$, *то она на тех же многообразиях задает геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени* smn.

Полные доказательства сформулированных выше теорем 1 и 2, каждая из которых является обратной по отношению к другой, можно найти в §1 монографии автора [24]. Их следствием является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий геометрии двух множеств, задаваемой на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-компонентной метрической функцией $f = (f^1, \dots, f^s)$.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция* $f = (f^1, \dots, f^s)$ *задавала на* sm*-мерном и* sn*-мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени* smn, *необходимо и достаточно, чтобы она на тех же многообразиях задавала физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга* $(n+1, m+1)$.

В следующем §9 приведена полная классификация однометрических ($s = 1$) физических структур произвольного ранга $(n+1, m+1)$. Заметим, что для $s \geq 2$ полная классификация полиметрических физических структур ранга $(n+1, m+1)$ еще не построена. Однако и по ним получены некоторые предварительные результаты. В частности, устанавливаемая теоремой 3 эквивалентность феноменологической и групповой симметрий была использована автором [25], [26] при построении классификации двуметрических физических структур ранга $(n+1, 2)$, то есть для случая $s = 2$ и $m = 1$, $n \geq 1$. Эта классификация приведена в §10 настоящей монографии. Кроме того, поскольку триметрические физические структуры ранга (2,2) допускают трехмерные группы движений, оказалось возможным по имеющейся классификации трехмерных алгебр Ли транзитивных преобразований пространства [17] построить в монографии [24] и их классификацию, которая приведена в том же §10.

Особый интерес представляют комплексные физические структуры. Например, Ю.С. Владимиров [27] комплексную структуру ранга (3,3) использовал для обоснования размерности и сигнатуры классического пространства-времени. Комплексные физические структуры более высокого ранга были применены им для построения единой теории физических взаимодействий.

С математической точки зрения комплексные физические структуры есть частный случай вещественных двуметрических физических структур. Поэтому, если бы была построена полная классификация последних, то по ней можно было бы воспроизвести соответствующую классификацию первых. Комплексные физические структуры могут быть также получены из вещественных одноформетрических с помощью их комплексификации, состоящей в замене вещественных координат и функций комплексными. Однако при этом нет никакой гарантии того, что получающаяся классификация комплексных физических структур окажется полной.

§9. Классификация одноформетрических физических структур

Согласно §8 одноформетрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (физическая структура) ранга $(n+1, m+1)$ в общих чертах и кратко может быть определена следующим образом. Пусть множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ есть соответственно m-мерное и n-мерное гладкие многообразия. Обозначим локальные координаты этих многообразий через $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, считая для определенности, что $m \leq n$. Пусть, далее, имеется функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ с открытой и плотной в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ областью определения, сопоставляющая каждой паре из нее некоторое число. Функцию f будем называть метрической, не требуя от нее выполнения обычных аксиом метрики, тем более, что расстояния для двух точек только из $\mathfrak{M}$ или двух точек только из $\mathfrak{N}$ не определены. Предполагается, что ее локальное координатное представление задается достаточно гладкой функцией (8.2), которую удобно записать, не конкретизируя обозначения точек i и α:

$$f = f(x, \xi) = f(x^1, \ldots, x^m, \xi^1, \ldots, \xi^n). \tag{9.1}$$

Вследствие невырожденности метрической функции f, в представление (9.1) координаты x и ξ входят существенным образом. Последнее означает, что никакая гладкая локально обратимая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (9.1).

Построим функцию $F : \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1} \to R^{(n+1)(m+1)}$ с естественной в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ областью определения, сопоставляя каждому кортежу длины $m + n + 2$ из нее все $(m + 1)(n + 1)$ возможные по метрической функции f и упорядоченные по нему расстояния. Будем говорить, что функция f задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга $(n+1, m+1)$, если локально множество значений построенной функции F в $R^{(m+1)(n+1)}$ является подмножеством множества нулей некоторой достаточно гладкой функции Φ от $(m+1)(n+1)$ переменных с $grad\Phi \neq 0$ на плотном в области определения функции F подмножестве, удовлетворяя уравнению (8.1).

В работе автора [28] приведена полная классификация однометрических физических структур произвольного ранга $(n + 1, m + 1)$ в естественном предположении, что $n \geq m \geq 1$, так как обратный случай $m \geq n \geq 1$ легко воспроизводится по симметрии, а в его работах [29], [30] и монографии [31] показаны математические методы, которыми она получена.

Запишем ниже соответствующие классификационные результаты с точностью до локально обратимой замены координат в многообразиях $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и масштабного преобразования $\chi(f) \to f$, где χ – произвольная гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной:

$m = 1, n = 1$:
$$f = x + \xi; \tag{9.2}$$
$m = 1, n = 2$:
$$f = x\xi + \eta; \tag{9.3}$$
$m = 1, n = 3$:
$$f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta); \tag{9.4}$$
$m = n \geq 2$:
$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m\xi^m, \tag{9.5}$$
$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m; \tag{9.6}$$
$m = n - 1 \geq 2$:
$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1}. \tag{9.7}$$

Для всех остальных пар значений натуральных чисел m и n при оговоренном выше условии $n \geq m \geq 1$ физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ не существуют.

Феноменологическая симметрия геометрий двух множеств (физических структур), задаваемых вышеперечисленными метрическими функциями (9.2)–(9.7), выражается, соответственно, следующими уравнениями:
$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0; \tag{9.2$'$}$$
$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0; \tag{9.3$'$}$$
$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0; \tag{9.4$'$}$$
$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & \ldots & f(i\tau) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & \ldots & f(j\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(v\alpha) & f(v\beta) & \ldots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0, \tag{9.5$'$}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & \dots & f(i\tau) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & \dots & f(j\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f(v\alpha) & f(v\beta) & \dots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0; \qquad (9.6')$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & \dots & f(i\tau) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & \dots & f(j\tau) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & \dots & f(k\tau) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(v\alpha) & f(v\beta) & \dots & f(v\tau) & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9.7')$$

Под движением в геометрии двух множеств следует понимать такую пару гладких локально обратимых преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$x' = \lambda(x), \ \xi' = \sigma(\xi), \qquad (9.8)$$

при которых функция (9.1) сохраняется:

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi). \qquad (9.9)$$

Если метрическая функция f задана в ее явном координатном представлении (9.1), то равенство (9.9) является функциональным уравнением относительно двух преобразований (9.8), решая которое можно найти группу движений и установить число ее непрерывных параметров. Ниже в настоящем параграфе приводятся также полные локальные группы локальных движений для каждой из шести метрических функций (9.2)–(9.7), которые могут быть найдены (см. [24], §2) как общие решения соответствующих уравнений (9.9), причем на функции $\lambda(x)$ и $\sigma(\xi)$ преобразований (9.8), кроме гладкости и локальной обратимости, никакие дополнительные ограничения (например, линейность) не налагаются.

Теорема 1. *Группа движений* (9.8) *феноменологически симметричной геометрии двух множеств(физической структуры) ранга* $(n +$

$1, m+1$), *задаваемой одной из метрических функций* (9.2)$-$(9.7), *представляется следующими преобразованиями многообразий* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$*:*

для метрической функции (9.2)*:*

$$x' = x + a,\ \ \xi' = \xi - a; \tag{9.10}$$

для метрической функции (9.3)*:*

$$x' = ax + b,\ \ \xi' = \xi/a,\ \ \eta' = \eta - b\xi/a, \tag{9.11}$$

где $a \neq 0$*;*

для метрической функции (9.4)*:*

$$\left.\begin{array}{l} x' = (ax+b)/(cx+d),\ \ \xi' = (d\xi - c\eta)/(d - c\vartheta), \\ \eta' = (a\eta - b\xi)/(d - c\vartheta),\ \ \vartheta' = (a\vartheta - b)/(d - c\vartheta), \end{array}\right\} \tag{9.12}$$

где $ad - bc = \pm 1$*;*

для метрической функции (9.5)*:*

$$\left.\begin{array}{c} x'^{\mu} = a^{\mu 1}x^1 + \ldots + a^{\mu m}x^m, \\ \xi'^{\mu} = \tilde{a}^{1\mu}\xi^1 + \ldots + \tilde{a}^{m\mu}\xi^m, \end{array}\right\} \tag{9.13}$$

где $\mu = 1, \ldots, m$ *и* a *– квадратная невырожденная матрица порядка* m, $\tilde{a}$ *– обратная к ней матрица;*

для метрической функции (9.6)*:*

$$\left.\begin{array}{c} x'^{\nu} = a^{\nu 1}x^1 + \ldots + a^{\nu, m-1}x^{m-1} + b^{\nu}, \\ x'^{m} = x^m + c^1x^1 + \ldots + c^{m-1}x^{m-1} + b^m, \\ \xi'^{\nu} = \tilde{a}^{1\nu}(\xi^1 - c^1) + \ldots + \tilde{a}^{m-1,\nu}(\xi^{m-1} - c^{m-1}), \\ \xi'^{m} = \xi^m - (b^1\tilde{a}^{11} + \ldots + b^{m-1}\tilde{a}^{1,m-1})(\xi^1 - c^1) - \ldots - \\ -(b^1\tilde{a}^{m-1,1} + \ldots + b^{m-1}\tilde{a}^{m-1,m-1})(\xi^{m-1} - c^{m-1}) - b^m, \end{array}\right\} \tag{9.14}$$

где $\nu = 1, \ldots, m-1$ *и* a *– квадратная невырожденная матрица порядка* $m-1$, $\tilde{a}$ *– обратная к ней матрица;*

для метрической функции (9.7)*:*

$$\left.\begin{array}{c} x'^{\mu} = a^{\mu 1}x^1 + \ldots + a^{\mu m}x^m + b^{\mu}, \\ \xi'^{\mu} = \tilde{a}^{1\mu}\xi^1 + \ldots + \tilde{a}^{m\mu}\xi^m, \\ \xi'^{m+1} = \xi^{m+1} - (b^1\tilde{a}^{11} + \ldots + b^m\tilde{a}^{1m})\xi^1 - \\ - \ldots - (b^1\tilde{a}^{m1} + \ldots + b^m\tilde{a}^{mm})\xi^m, \end{array}\right\} \tag{9.15}$$

где $\mu = 1, \ldots, m$ и a – квадратная невырожденная матрица порядка m, $\tilde{a}$ – обратная к ней матрица.

Все перечисленные в теореме 1 группы движений зависят от конечного числа непрерывных параметров, число которых в соответствии с теоремой 2 из предыдущего §8 равно mn, то есть произведению размерностей m и n многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для сравнения заметим, что в n-мерной феноменологически симметричной геометрии ранга $n+2$ на одном множестве $\mathfrak{M}$ это число равно $n(n+1)/2$. Отметим также, что не для всякой метрической функции (9.1) уравнение (9.9) имеет нетривиальное решение, то есть полная группа движений может состоять только из тождественных преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Нетрудно, например, установить, что для метрической функции $f(x, \xi) = x\xi + \xi^3$ уравнение (9.9) имеет только тривиальное решение: $\lambda(x) = x$, $\sigma(\xi) = \xi$, и потому полная группа движений соответствующей геометрии двух множеств содержит только тождественные преобразования $x' = x$ и $\xi' = \xi$ одномерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Согласно теореме 3 из §8 наделенная такой тривиальной групповой симметрией геометрия двух множеств, задаваемая на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ этой метрической функцией, не является физической структурой ранга (2,2).

Рассмотрим более подробно феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга (3,3), существующую в двух вариантах, задаваемых на двумерных многообразиях метрическими функциями

$$f = x\xi + y\eta, \tag{9.16}$$

$$f = x\xi + y + \eta, \tag{9.17}$$

координатные представления которых получаются из выражений (9.5), (9.6) для случая $m = n = 2$ при введении безиндексных обозначений координат: $x = x^1$, $y = x^2$, $\xi = \xi^1$, $\eta = \xi^2$.

Легко убедиться в том, что их феноменологическая симметрия выражается уравнениями

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0, \tag{9.16$'$}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0, \tag{9.17$'$}$$

соответственно.

Установим, прежде всего, что эти две физические структуры неэквивалентны.

Теорема 2. *Ни при каких заменах координат и масштабных преобразованиях метрические функции (9.16) и (9.17) не переходят друг в друга.*

Доказательство теоремы 2 проведем методом от противного, предположив, что при некоторых гладких обратимых заменах координат $\lambda(x,y) \to x$, $\sigma(x,y) \to y$ и $\rho(\xi,\eta) \to \xi$, $\tau(\xi,\eta) \to \eta$ в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, а также масштабном преобразовании $\chi(f) \to f$ одна из метрических функций (9.16), (9.17) переходит в другую, например:

$$\lambda(x,y)\rho(\xi,\eta) + \sigma(x,y)\tau(\xi,\eta) = \chi(x\xi + y + \eta), \tag{9.18}$$

где $\partial(\lambda,\sigma)/\partial(x,y) \neq 0$, $\partial(\rho,\tau)/\partial(\xi,\eta) \neq 0$ и $\chi' \neq 0$. Теорема 2 будет верна, если функциональное уравнение (9.18) не имеет решения.

Продифференцируем уравнение (9.18) по переменным ξ, η и разделим один результат дифференцирования на другой: $\lambda\rho_\xi + \sigma\tau_\xi = (\lambda\rho_\eta + \sigma\tau_\eta)x$, откуда, фиксируя переменные ξ, η, получаем связь:

$$\sigma(x,y) = A(x)\lambda(x,y), \tag{9.19}$$

где $A(x) = (ax+b)/(cx+d)$ – дробно-линейная функция с отличной от нуля производной: $A'(x) = (ad-bc)/(cx+d)^2 \neq 0$, так как функции λ и σ независимы.

Совершенно аналогично, дифференцируя уравнение (9.18) по переменным x, y, получаем вторую связь:

$$\tau(\xi,\eta) = B(\xi)\rho(\xi,\eta), \tag{9.20}$$

где $B(\xi) = (k\xi+l)/(m\xi+n)$ – дробно-линейная функция с отличной от нуля производной: $B'(\xi) = (kn-lm)/(m\xi+n)^2 \neq 0$, так как независимы функции ρ и τ.

Полученные две связи (9.19), (9.20) подставим в исходное функциональное уравнение (9.18):

$$\lambda(x,y)\rho(\xi,\eta)(1 + A(x)B(\xi)) = \chi(x\xi + y + \eta) \tag{9.21}$$

и продифференцируем его по переменным y, η, после чего исключим производную χ'. Разделяя далее переменные, получаем дифференциальные уравнения $\lambda_y/\lambda = \rho_\eta/\rho = h \neq 0$, откуда после интегрирования:

$$\lambda(x,y) = C(x)\exp hy, \quad \rho(\xi,\eta) = D(\xi)\exp h\eta, \tag{9.22}$$

где, очевидно, $C(x) \neq 0,\ D(\xi) \neq 0$.

Перепишем уравнение (9.21) с функциями (9.22):

$$(1 + A(x)B(\xi))C(x)D(\xi)\exp h(y+\eta) = \chi(x\xi + y + \eta). \tag{9.23}$$

Полагая $x = 0,\ \xi = 0$ и вводя переменную $z = y + \eta$, из уравнения (9.23) получаем выражение $\chi(z) = E\exp hz$, где $E \neq 0$, с которым оно значительно упростится:

$$(1 + A(x)B(\xi))C(x)D(\xi) = E\exp hx\xi$$

Логарифмируем это уравнение:

$$\ln(1 + A(x)B(\xi)) + \ln C(x) + \ln D(\xi) = \ln E + hx\xi,$$

дифференцируя затем его по переменным x, ξ и приводя к общему знаменателю:

$$A'(x)B'(\xi) = h(1 + A(x)B(\xi))^2.$$

Повторим предыдущие операции по отношению к последнему результату:

$$A'(x)B'(\xi) = 0,$$

что, очевидно, противоречит установленному выше необращению в нуль производных функций $A(x)$ и $B(\xi)$, входящих в соотношения (9.19) и (9.20). Полученное противоречие означает, что исходное функциональное уравнение (9.18) не имеет решения и потому метрические функции (9.16) и (9.17) неэквивалентны. Теорема 2 полностью доказана.

Установим теперь групповую симметрию физической структуры ранга (3,3), степень которой по теореме 2 из §8 должна быть равна четырем.

Теорема 3. *Группа движений феноменологически симметричной геометрии двух множеств (физической структуры) ранга* $(3,3)$*, задаваемой на двумерных многообразиях метрической функцией* (9.16)*:* $f = x\xi + y\eta$*, представляется следующими уравнениями:*

$$\left.\begin{array}{c} x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \\ \xi' = (d\xi - c\eta)/\Delta, \quad \eta' = (-b\xi + a\eta)/\Delta, \end{array}\right\} \tag{9.24}$$

где $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Движение в этой геометрии можно записать следующими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{c} x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \\ \xi' = \rho(\xi, \eta), \quad \eta' = \tau(\xi, \eta), \end{array}\right\} \tag{9.25}$$

где $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, $\partial(\rho, \tau)/\partial(\xi, \eta) \neq 0$, так как соответствующие преобразования двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в движении должны быть локально обратимыми. Поскольку движение (9.25) сохраняет метрическую функцию (9.16), для него получаем функциональное уравнение

$$\lambda(x, y)\rho(\xi, \eta) + \sigma(x, y)\tau(\xi, \eta) = x\xi + y\eta, \tag{9.26}$$

которое выполняется тождественно по всем четырем координатам x, y и ξ, η.

Продифференцируем уравнение (9.26) по переменным ξ, η:

$$\lambda\rho_\xi + \sigma\tau_\xi = x, \quad \lambda\rho_\eta + \sigma\tau_\eta = y$$

и разрешим полученные равенства относительно функций λ, σ:

$$\lambda(x, y) = \frac{x\tau_\eta - y\tau_\xi}{\rho_\xi\tau_\eta - \rho_\eta\tau_\xi}, \quad \sigma(x, y) = \frac{-x\rho_\eta + y\rho_\xi}{\rho_\xi\tau_\eta - \rho_\eta\tau_\xi}.$$

Дифференцируя полученные для функций λ и σ выражения по переменным x, y, убеждаемся в том, что коэффициенты при них являются константами. Введя для них соответствующие обозначения, получаем первую пару уравнений (9.24), которыми определяется преобразование двумерного многообразия $\mathfrak{M}$ в движении (9.25), причем из их обратимости, очевидно, вытекает условие $\Delta \neq 0$. Вторая пара уравнений (9.24), определяющая преобразование другого двумерного многообразия $\mathfrak{N}$ в движении (9.25), легко получается из функционального уравнения (9.26) при подстановке в него первой пары.

Множество движений (9.24) зависит от четырех непрерывных параметров a, b, c, d, на которые наложено условие $\Delta = ad - bc \neq 0$. Легко убедиться в том, что это множество по композиции движений является группой. Для этого запишем, например, преобразования первого многообразия $\mathfrak{M}$ в множестве движений (9.24) в матричной форме:

$$\left\| \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\|.$$

То есть каждому такому преобразованию однозначно сопоставляется квадратная невырожденная матрица второго порядка, а композиции двух преобразований – их матричное умножение по правилу "строка на столбец". Хорошо известно, что множество всех невырожденных квадратных матриц по операции их обычного умножения является группой и потому группой является и множество преобразований многообразия $\mathfrak{M}$ в множестве движений (9.24). Преобразованиям многообразия $\mathfrak{N}$ в этих движениях сопоставляются обратные транспонированные матрицы, множество которых также составляет группу, которая изоморфна группе прямых матриц. Следовательно, и все множество движений (9.24) как совокупность двух изоморфных групп преобразований различных многообразий является группой, определяющей групповую симметрию физической структуры ранга (3,3), задаваемой метрической функцией (9.16). Степень этой симметрии равна четырем, так как группа движений (9.24) зависит от четырех непрерывных и независимых параметров. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Группа движений феноменологически симметричной* *геометрии двух множеств (физической структуры) ранга* $(3,3)$, *задаваемой на двумерных многообразиях метрической функцией* (9.17)*:* $f = x\xi + y + \eta$, *представляется следующими уравнениями:*

$$\left.\begin{aligned} x' = ax + b, \quad y' = y + cx + d, \\ \xi' = (\xi - c)/a, \quad \eta' = \eta - b\xi/a - (ad - bc)/a, \end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

где $a \neq 0$.

Запишем функциональное уравнение на множество движений (9.25) для метрической функции (9.17):

$$\lambda(x,y)\rho(\xi,\eta) + \sigma(x,y) + \tau(\xi,\eta) = x\xi + y + \eta \tag{9.28}$$

и продифференцируем его по переменным ξ, η:

$$\lambda\rho_\xi + \tau_\xi = x, \quad \lambda\rho_\eta + \tau_\eta = 1,$$

откуда находим: $\lambda(x,y) = (x\tau_\eta - \tau_\xi)/(\rho_\xi\tau_\eta - \rho_\eta\tau_\xi)$. Зафиксируем в правой части переменные ξ, η и введем удобные обозначения постоянных коэффициентов: $\lambda(x,y) = ax + b$, где $a \neq 0$, так как $\lambda(x,y) \neq const$. Подставляя это выражение для функции λ в исходное функциональное уравнение (9.28) и снова фиксируя переменные ξ, η получаем выражение для другой функции $\sigma(x,y) = y + cx + d$. Тем самым получены преобразования многообразия $\mathfrak{M}$ в множестве движений (9.27). Преобразования второго многообразия $\mathfrak{N}$ находятся из функционального уравнения (9.28) при подстановке в него только что найденных выражений для функций λ и σ. В результате получаем все множество движений (9.27).

Для того, чтобы убедиться в том, что множество движений (9.27) является группой, запишем, например, преобразование множества $\mathfrak{M}$ из него в следующей матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & 0 & b \\ c & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Vmatrix},$$

откуда видно, что каждому такому преобразованию сопоставляется невырожденная матрица третьего порядка, структура которой, очевидно, сохраняется при обычном матричном умножении по правилу "строка на столбец", причем композиции двух преобразований сопоставляется произведение соответствующих матриц. Множество невырожденных матриц подобной структуры по операции их умножения является группой и потому группой является множество преобразований многообразия $\mathfrak{M}$ в движениях (9.27). Нетрудно сообразить, что преобразованиям второго многообразия $\mathfrak{N}$ в этих движениях сопоставляется транспонированная обратная матрица, множество которых также является группой, изоморфной группе прямых матриц. Таким образом, все множество движений (9.27) является группой, которая определяет групповую симметрию геометрии двух множеств ранга (3,3), задаваемой на двумерных многообразиях метрической функцией (9.17). Степень групповой симметрии равна четырем, так как группа движений (9.27) зависит от четырех непрерывных и независимых параметров. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Двухточечный инвариант группы преобразований* (9.24) *совпадает с метрической функцией* (9.16) *с точностью до масштабного преобразования.*

Тождественному преобразованию в группе (9.24) соответствуют параметры $a = 1, \ b = 0, \ c = 0, \ d = 1$. Введем параметры бесконечно малого (инфинитезимального) преобразования $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, полагая $a = 1 + \alpha, \ b = \beta, \ c = \gamma, \ d = 1 + \delta$. Тогда с точностью до величин первого порядка малости преобразования (9.24) запишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x' = x + \alpha x + \beta y, \quad y' = y + \gamma x + \delta y, \\ \xi' = \xi - \alpha\xi - \gamma\eta, \quad \eta' = \eta - \beta\xi - \delta\eta. \end{aligned}\right\} \tag{9.29}$$

Бесконечно малым преобразованиям (9.29) можно сопоставить две системы четырех линейных дифференциальных операторов:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = x\partial_x, \ X_2 = y\partial_x, \ X_3 = x\partial_y, \ X_4 = y\partial_y, \\ \Xi_1 = -\xi\partial_\xi, \ \Xi_2 = -\xi\partial_\eta, \ \Xi_3 = -\eta\partial_\xi, \ \Xi_4 = -\eta\partial_\eta, \end{aligned}\right\} \tag{9.30}$$

где, например, $\partial_x = \partial/\partial x$, которые составляют естественные координатные базисы двух изоморфных с точностью до совпадения структурных констант четырехмерных алгебр Ли преобразований двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

При известных преобразованиях (9.24) двухточечный инвариант $f = f(x, y, \xi, \eta)$ является решением функционального уравнения

$$f(x', y', \xi', \eta') = f(x, y, \xi, \eta). \tag{9.31}$$

Если в функциональное уравнение (9.31) подставить бесконечно малые преобразования (9.29), затем продифференцировать его по каждому из четырех параметров $\alpha, \beta.\gamma, \delta$ и придать им нулевые значения, то относительно двухточечного инварианта получается система четырех дифференциальных уравнений

$$X_\omega f + \Xi_\omega f = 0, \tag{9.32}$$

где $\omega = 1, 2, 3, 4$, с операторами (9.30).

Поскольку дифференциальные уравнения (9.32) линейные однородные в частных производных первого порядка, их можно решать методом характеристик. Для первого и четвертого уравнений системы соответствующие уравнения характеристик: $dx/x = -d\xi/\xi,\ dy/y = -d\eta/\eta$ имеют интегралы $x\xi = \mathrm{const}$, $y\eta = \mathrm{const}$. Общее решение $f = \theta(x\xi, y\eta)$ первого и четвертого уравнений системы (9.32), где $\theta(u, v)$ – произвольная функция двух переменных, подставим в ее второе и третье уравнения: $\theta_u - \theta_v = 0$. Это уравнение также решается методом характеристик и его общее решение задается выражением $\theta(u, v) = \chi(u + v)$, где χ – произвольная функция уже только одной переменной с отличной от нуля производной χ'. Таким образом, двухточечный инвариант, как решение системы дифференциальных уравнений (9.32) с операторами (9.30) задается выражением

$$f = \chi(x\xi + y\eta), \tag{9.33}$$

которое масштабным преобразованием $\chi^{-1}(f) \to f$ с обратной функцией χ^{-1} переводится в метрическую функцию (9.16). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Двухточечный инвариант группы преобразований* (9.27) *совпадает с метрической функцией* (9.17) *с точностью до масштабного преобразования.*

Доказательства теоремы 6 в общих чертах повторяет доказательство предыдущей теоремы, хотя в деталях, конечно же, от него отличается. Тождественным преобразованием в группе (9.27) будет преобразование с параметрами $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$. Полагая $a = 1 + \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$, $d = \delta$, с точностью до малых величин первого порядка из уравнений (9.27) получаем уравнения для бесконечно малых (инфинитезимальных) преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x' = x + \alpha x + \beta, \quad y' = y + \gamma x + \delta, \\ \xi' = \xi - \alpha\xi - \gamma, \quad \eta' = \eta - \beta\xi - \delta, \end{aligned}\right\} \tag{9.34}$$

которым соответствуют две системы четырех линейных дифференциальных операторов

$$\left.\begin{gathered} X_1 = x\partial_x,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = x\partial_y,\ X_4 = \partial_y, \\ \Xi_1 = -\xi\partial_\xi,\ \Xi_2 = -\xi\partial_\eta,\ \Xi_3 = -\partial_\xi,\ \Xi_4 = -\partial_\eta, \end{gathered}\right\} \tag{9.35}$$

которые составляют естественные координатные базисы двух изоморфных с точностью до совпадения структурных констант четырехмерных алгебр Ли преобразований (9.27) двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Подставим в функциональное уравнение (9.31) для двухточечного инварианта инфинитезимальные преобразования (9.34), продифференцируем его по каждому из четырех параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и в результатах дифференцирования придадим им нулевые значения, соответствующие тождественным преобразованиям. В итоге на двухточечный инвариант $f = f(x, y, \xi, \eta)$ возникает система четырех дифференциальных уравнений (9.32) с операторами (9.35). Как и в предыдущем случае, эти уравнения решаются методом характеристик. Для первого и четвертого уравнений системы (9.32) соответствующие уравнения характеристик $dx/x = -d\xi/\xi$, $dy = -d\eta$ легко интегрируются: $x\xi = \text{const}$, $y + \eta = \text{const}$, поэтому их общее решение запишется в следующем виде: $f = \theta(x\xi, y + \eta)$, где $\theta(u, v)$ – произвольная функция двух переменных. После подстановки этого выражения во второе и тоетье уравнения системы получаем дифференциальное уравнение $\theta_u - \theta_v = 0$, решение которого $\theta(u, v) = \chi(u + v)$ записывается через произвольную функцию χ от одной только переменной, причем $\chi' \neq 0$. В результате для двухточечного инварианта f получаем выражение

$$f = \chi(x\xi + y + \eta), \tag{9.36}$$

которое переходит в метрическую функцию (9.17) при масштабном преобразовании $\chi^{-1}(f) \to f$ с обратной функцией χ^{-1}. Теорема 6 доказана.

Заметим. что две четырехмерные алгебры Ли (9.30) в соответствующих базисах имеют одинаковые структурные константы. Очевидный переход к другому базису и тривиальная замена координат переводят один базис в другой, что говорит о слабой эквивалентности этих алгебр. Однако никакая только замена координат не переведет эти базисы один в другой. Отмеченное обстоятельство означает что соответствующие им две группы Ли преобразований (9.24), как различные действия в двумерном многообразии одной и той же четырехмерной группы Ли, подобны, но не эквивалентны. То есть некоторый автоморфизм в группе и замена координат переведут одну группу преобразований в другую (подобие или слабая эквивалентность), но никакая замена координат без автоморфизма этого не сможет сделать (неэквивалентность в сильном смысле). Аналогичное замечание можно сделать и в отношении двух четырехмерных алгебр Ли (9.35), соответствующих группам Ли преобразований (9.27).

§10. Двуметрические и триметрические физические структуры

Полная классификация двуметрических физических структур (феноменологически симметричных геометрий двух множеств) построена только для ранга $(n+1, 2)$. Краткое же их определение получается из общего определения 1 полиметрических физических структур ранга $(n+1, m+1)$, данного в начале §8, если в нем положить $s = 2$ и $m = 1$.

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся 2-мерным и $2n$-мерным многообразиями соответственно, где n – натуральное число. Обозначим локальные координаты в этих многообразиях через $x = (x^1, x^2)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{2n})$. Пусть также имеется функция f с открытой и плотной в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ областью определения $\mathfrak{S}_f$, сопоставляющая каждой паре из нее два вещественных числа, то есть $f : \mathfrak{S}_f \to R^2$. Двухточечную двухкомпонентную функцию $f = (f^1, f^2)$ будем называть *метрической.* Предполагается, что ее локальное координатное представление задается достаточно гладкой невырожденной функцией

$$f = f(x, \xi) = f(x^1, x^2, \xi^1, \ldots, \xi^{2n}), \tag{10.1}$$

выражение для которой получается из выражения (8.2) при $s = 2$ и $m = 1$. Невырожденность метрической функции (10.1) понимается в смысле аксиомы III из §8 и, вообще говоря, в отличие от случая $s = 1$, то есть однометрических физических структур, означает нечто большее, чем просто ее существенную зависимость от координат $x = (x^1, x^2)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{2n})$. А именно, должны быть отличны от нуля якобианы $\partial f(i\alpha)/\partial x_i$ и $\partial(f(i_1\alpha), \ldots, f(i_n\alpha))/\partial \xi_\alpha$ для плотных множеств пар $<i\alpha> \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и кортежей $<i_1 \ldots i_n, \alpha> \in \mathfrak{M}^n \times \mathfrak{N}$ длины $n + 1$.

Далее строим функцию F с естественной в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^2$ областью определения $\mathfrak{S}_F$, сопоставляя каждому кортежу длины $n + 3$ из $\mathfrak{S}_F$ все $4(n + 1)$ возможные по метрической функции $f = (f^1, f^2)$ расстояния. Будем говорить, что двухкомпонентная функция f с локальным координатным представлением (10.1) задает на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *двуметрическую физическую структуру* (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) *ранга* $(n+1, 2)$, если локально множество значений $F(\mathfrak{S}_F)$ в $R^{4(n+1)}$ принадлежит множеству нулей некоторой достаточно гладкой двухкомпонентной функции $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ от $4(n+1)$ переменных с независимыми компонентами Φ_1 и Φ_2, то есть имеет место уравнение

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), \ldots, f(v\alpha), f(v\beta)) = 0 \tag{10.2}$$

для всех кортежей $<ijk \ldots v, \alpha\beta>$ из некоторого плотного и открытого в $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^2$ множества. Таким образом, локально множество $F(\mathfrak{S}_F)$ принадлежит некоторой регулярной коразмерности 2 поверхности в $R^{4(n+1)}$, не обязательно совпадая с ней.

Заметим, что не всякая двухкомпонентная функция $f = (f^1, f^2)$ может задавать двуметрическую физическую структуру и потому основной задачей теории является их полная классификация, которая, как обычно, проводится с точностью до масштабного преобразования, в данном случае двумерного, и возможности выбора в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ любых допустимых систем локальных координат.

Теорема 1. *Двуметрические физические структуры (феноменологически симметричные геометрии двух множеств) ранга* $(n+1,2)$ *существуют только для* $n=1,2,3,4$*, то есть ранга* $(2,2)$, $(3,2)$, $(4,2)$, $(5,2)$*, и не существуют для* $n\geq 5$*, то есть ранга* $(6,2)$, $(7,2)$ *и т.д. С точностью до масштабного преобразования двухкомпонентная метрическая функция* $f=(f^1,f^2)$*, задающая на* 2*-мерном и* $2n$*-мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *двуметрическую физическую структуру ранга* $(n+1,2)$*, в надлежаще выбранных в них системах локальных координат* $x=(x^1,x^2)=(x,y)$ *и* $\xi=(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4,\ldots)=(\xi,\eta,\mu,\nu,\ldots)$ *определяется следующими каноническими выражениями:*

для $n=1$*, то есть ранга* $(2,2)$*:*

$$f^1=x+\xi,\ f^2=y+\eta, \tag{10.3}$$

$$f^1=(x+\xi)y,\ f^2=(x+\xi)\eta; \tag{10.4}$$

для $n=2$*, то есть ранга* $(3,2)$*:*

$$f^1=x\xi+\varepsilon y\eta+\mu,\ f^2=x\eta+y\xi+\nu,\ \varepsilon=0,\pm1, \tag{10.5}$$

$$f^1=x\xi+\mu,\ f^2=x\eta+y\xi^c+\nu,\ c\neq 1, \tag{10.6}$$

$$f^1=x\xi+\mu,\ f^2=x\eta+y\xi^2+x^2\xi^2\ln\xi+\nu, \tag{10.7}$$

$$f^1=x\xi+y\mu,\ f^2=x\eta+y\nu; \tag{10.8}$$

для $n=3$*, то есть ранга* $(4,2)$*:*

$$\left.\begin{aligned} f^1&=\frac{(x\xi+\varepsilon y\eta+\mu)(x+\rho)-\varepsilon(x\eta+y\xi+\nu)(y+\tau)}{(x+\rho)^2-\varepsilon(y+\tau)^2},\\ f^2&=\frac{(x\xi+\varepsilon y\eta+\mu)(y+\tau)-(x\eta+y\xi+\nu)(x+\rho)}{(x+\rho)^2-\varepsilon(y+\tau)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

где $\varepsilon=0,\pm1$,

$$f^1=\frac{x\xi+\mu}{x+\rho},\ f^2=\frac{x\eta+y\nu+\tau}{x+\rho}, \tag{10.10}$$

$$f^1=x\xi+y\mu+\rho,\ f^2=x\eta+y\nu+\tau; \tag{10.11}$$

для $n = 4$, то есть ранга $(5, 2)$:

$$f^1 = \frac{x\xi + y\mu + \rho}{x\varphi + y + \omega}, \;\; f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x\varphi + y + \omega}. \tag{10.12}$$

Доказательство теоремы 1 можно найти в §7 монографии автора [24] и в его работе [26].

Обратимся теперь к уравнению (10.2), которое выражает феноменологическую симметрию двуметрической физической структуры ранга $(n+1, 2)$. Выпишем его явно для каждой из метрических функций (10.3) – (10.12) соответственно:

для метрической функции (10.3):

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) - f^1(i\beta) - f^1(j\alpha) + f^1(j\beta) = 0, \\ f^2(i\alpha) - f^2(i\beta) - f^2(j\alpha) + f^2(j\beta) = 0; \end{aligned}\right\}$$

для метрической функции (10.4):

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) - f^1(i\beta) & f^1(i\alpha)f^2(j\alpha) \\ f^1(j\alpha) - f^1(j\beta) & f^1(j\alpha)f^2(i\alpha) \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) - f^2(j\alpha) & f^2(i\alpha)f^1(i\beta) \\ f^2(i\beta) - f^2(j\beta) & f^2(i\beta)f^1(i\alpha) \end{vmatrix} = 0; \end{aligned}\right\}$$

для метрической функции (10.5):

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0; \end{aligned}\right\}$$

для метрической функции (10.6):

$$\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))^{c+1}}=0, \quad \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix}=0,$$

где $\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)$ – оператор альтернирования (антисимметризации) по элементам α,β, то есть $\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha\beta)-\varphi(\beta\alpha)$;

для метрической функции (10.7):

$$\left.\begin{array}{r} \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix}=0, \\ \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\dfrac{1}{(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))^3}\{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \end{vmatrix}- \\ \\ -\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & (f^1(i\alpha))^2 & 1 \\ f^1(j\alpha) & (f^1(j\alpha))^2 & 1 \\ f^1(k\alpha) & (f^1(k\alpha))^2 & 1 \end{vmatrix}\ln[f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha)]\}=0; \end{array}\right\}$$

для метрической функции (10.8):

$$\left.\begin{array}{r} \hat{\mathbf{R}}(ij)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) \end{vmatrix}=0, \\ \\ \hat{\mathbf{R}}(ik)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) \end{vmatrix}=0; \end{array}\right\}$$

для метрической функции (10.9) уравнение (10.2) можно получить комплексификацией уравнения

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix}=0,$$

полагая в нем $f = f^1 + ef^2$, где $e^2 = \varepsilon = 0, \pm 1$, и отделяя затем реальную и мнимую части;

для метрической функции (10.10):

$$\left.\begin{array}{c}
\hat{R}(\alpha\beta)\dfrac{(f^1(j\alpha) - f^1(l\alpha))(f^1(i\alpha) - f^1(k\alpha))}{(f^1(i\alpha) - f^1(l\alpha))(f^1(j\alpha) - f^1(k\alpha))} = 0, \\[3ex]
\hat{R}(\alpha\beta)\dfrac{f^1(j\alpha) - f^1(l\alpha)}{f^1(i\alpha) - f^1(l\alpha)}\times \\[3ex]
\times\dfrac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(k\alpha) - f^1(l\alpha) \\ f^2(i\alpha) & f^2(k\alpha) - f^2(l\alpha) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^1(k\alpha) & f^1(l\alpha) \\ f^2(k\alpha) & f^2(l\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^1(k\alpha) - f^1(l\alpha) \\ f^2(j\alpha) & f^2(k\alpha) - f^2(l\alpha) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^1(k\alpha) & f^1(l\alpha) \\ f^2(k\alpha) & f^2(l\alpha) \end{vmatrix}} = 0;
\end{array}\right\}$$

для метрической функции (10.11):

$$\left.\begin{array}{c}
\hat{\mathbf{R}}(ij)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^1(l\beta) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \\ f^2(l\alpha) & f^2(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\[4ex]
\hat{\mathbf{R}}(kl)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^2(l\alpha) & f^2(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0;
\end{array}\right\}$$

для последней метрической функции (10.12), задающей единственную физическую структуру ранга (5,2):

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}} = 0, \\
&\hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}} = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Оказывается, связь метрической функции (10.1), задающей двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1,2)$ и уравнения (10.2), выражающего ее феноменологическую симметрию, может стать более прозрачной, о чем говорит следующая, доказанная Р.М. Мурадовым [32, §18], теорема:

Теорема 2. *Если двухкомпонентная метрическая функция*

$$f = f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu, \dots)$$

задает на 2-мерном и $2n$*-мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *двуметрическую физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга* $(n+1,2)$*, то с точностью до масштабного преобразования и замены координат в многообразиях она определяет в* R^{2n} *такую квазигрупповую операцию с правой единицей, что правый обратный элемент совпадает с исходным и в уравнении, выражающем феноменологическую симметрию, под оператором альтернирования* $\hat{R}(\alpha\beta)$ *стоит выражение, подобное метрической функции:*

$$\hat{R}(\alpha\beta) f(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^1(j\alpha), f^2(j\alpha), f^1(k\alpha), f^2(k\alpha), \dots) = 0;$$

для $n=1$, *то есть ранга* $(2,2)$:

$$f^1 = x-\xi, \quad f^2 = y-\eta, \tag{10.3'}$$

$$f^1 = (x-\xi)\eta, \quad f^2 = y/\eta; \tag{10.4'}$$

для $n=2$, *то есть ранга* $(3,2)$:

$$f^1 = \frac{\begin{vmatrix} x & \xi-\mu \\ \mu & \xi-\mu \end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} y & \eta-\nu \\ \nu & \eta-\nu \end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2}, \quad f^2 = \frac{\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \eta & \xi & 1 \\ \nu & \mu & 1 \end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2}, \tag{10.5'}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$;

$$f^1 = \frac{x-\mu}{\xi-\mu}, \quad f^2 = \frac{\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \eta & \xi & 1 \\ \nu & \mu & 1 \end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^{c+1}}, \tag{10.6'}$$

где $c \neq 1$;

$$f^1 = \frac{x-\mu}{\xi-\mu}, \quad f^2 = \frac{\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \eta & \xi & 1 \\ \nu & \mu & 1 \end{vmatrix} - \ln(\xi-\mu)\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \xi^2 & \xi & 1 \\ \mu^2 & \mu & 1 \end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^3}, \tag{10.7'}$$

$$f^1 = \frac{x\nu - y\mu}{\xi\nu-\eta\mu}, \quad f^2 = \frac{x\eta-y\xi}{\xi\nu-\eta\mu}; \tag{10.8'}$$

для $n=3$, *то есть ранга* $(4,2)$:

$$\left.\begin{aligned}
f^1 &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{(x-\mu)(\xi-\rho)+\varepsilon(y-\nu)(\eta-\tau)}{(x-\rho)(\eta-\nu)+(y-\tau)(\xi-\mu)} & 1 \\ \dfrac{\varepsilon((x-\mu)(\eta-\tau)+(y-\nu)(\xi-\rho))}{(x-\rho)(\xi-\mu)+\varepsilon(y-\tau)(\eta-\nu)} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{(x-\rho)(\xi-\mu)+\varepsilon(y-\tau)(\eta-\nu)}{(x-\rho)(\eta-\nu)+(y-\tau)(\xi-\mu)} & 1 \\ \dfrac{\varepsilon((x-\rho)(\eta-\nu)+(y-\tau)(\xi-\mu))}{(x-\rho)(\xi-\mu)+\varepsilon(y-\tau)(\eta-\nu)} & 1 \end{vmatrix}}, \\
f^2 &= \frac{\begin{vmatrix} x^2 & y & x & 1 \\ \xi^2 & \eta & \xi & 1 \\ \mu^2 & \nu & \mu & 1 \\ \rho^2 & \tau & \rho & 1 \end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ \eta^2 & \eta & \xi & 1 \\ \nu^2 & \nu & \mu & 1 \\ \tau^2 & \tau & \rho & 1 \end{vmatrix}}{((x-\rho)^2-\varepsilon(y-\tau)^2)((\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2)},
\end{aligned}\right\} \qquad (10.9')$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$;

$$f^1 = \frac{(x-\mu)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\mu)}, \quad f^2 = \frac{(\mu-\rho)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\mu)} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \eta & \xi & 1 \\ \nu & \mu & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}, \qquad (10.10')$$

$$f^1 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}, \quad f^2 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}; \qquad (10.11')$$

для $n = 4$, *то есть ранга* $(5, 2)$:

$$f^1 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}, \quad f^2 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}, \tag{10.12'}$$

Полная классификация триметрических физических структур (феноменологически симметричных геометрий двух множеств) построена только для ранга (2,2). Такая структура, согласно общему определению 1 из §8, в котором надо положить $s = 3,\ m = 1,\ n = 1$, задается трехкомпонентной функцией $f = (f^1, f^2, f^3)$ на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Обозначим локальные координаты в этих многообразиях через x, y, z и ξ, η, ϑ. Тогда координатное представление метрической функции f запишется в следующем виде:

$$f = f(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta), \tag{10.13}$$

причем для конкретной пары $< i\alpha >$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f$ будем иметь:

$$f(i\alpha) = f(x_i, y_i, z_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \vartheta_\alpha),$$

а ее невырожденность означает отличие от нуля следующих двух якобианов:

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \vartheta_\alpha)} \neq 0 \tag{10.14}$$

для плотных множеств пар $<i\alpha> \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Феноменологическая симметрия рассматриваемой триметрической геометрии двух множеств выражается уравнением

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0, \tag{10.15}$$

в котором независимы все три компоненты функции $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. А это означает, что множество значений функции $F : \mathfrak{S}_F \to R^{12}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^3$ – естественная область ее определения, локально принадлежит девятимерной поверхности в R^{12}, задаваемой тремя уравнениями $\Phi = 0$.

По теореме 2 из §8 функция (10.13), задающая на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ триметрическую физическую структуру ранга (2,2), допускает трехмерную группу движений, состоящую из двух действий группы G^3 в них. Выпишем явно действия этой группы в $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x,y,z;a^1,a^2,a^3), \\ y' &= \sigma(x,y,z;a^1,a^2,a^3), \\ z' &= \tau(x,y,z;a^1,a^2,a^3), \end{aligned}\right\} \tag{10.16}$$

где $(a^1,a^2,a^3) \in G^3$. Ее действие во втором многообразии $\mathfrak{N}$ записывается аналогично:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \tilde{\lambda}(\xi,\eta,\vartheta;a^1,a^2,a^3), \\ \eta' &= \tilde{\sigma}(\xi,\eta,\vartheta;a^1,a^2,a^3), \\ \vartheta' &= \tilde{\tau}(\xi,\eta,\vartheta;a^1,a^2,a^3), \end{aligned}\right\}$$

причем функции $\tilde{\lambda},\tilde{\sigma},\tilde{\tau}$, задающие это действие, не обязательно совпадают с функциями λ,σ,τ в действии (10.16). Но если эти действия эквивалентны, то всегда можно найти такие системы координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, для которых $\lambda = \tilde{\lambda},\ \sigma = \tilde{\sigma},\ \tau = \tilde{\tau}$ при соответствующей перестановке координат многообразий.

Инвариантность метрической функции (10.13) относительно группы движений означает ее сохранение согласно уравнению

$$f(x',y',z',\xi',\eta',\vartheta') = f(x,y,z,\xi,\eta,\vartheta), \tag{10.17}$$

которое для каждой ее компоненты f^1, f^2, f^3 выполняется тождественно по координатам x,y,z и ξ,η,ϑ точек многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, а также параметрам a^1,a^2,a^3 действующей в них группы G^3.

Теорема 3. *С точностью до масштабного преобразования трехкомпонентная метрическая функция $f = (f^1,f^2,f^3)$, задающая на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ триметрическую физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(2,2)$, в надлежаще выбранных в них системах локальных координат x,y,z и ξ,η,ϑ определяется следующими одиннадцатью каноническими выражениями:*

$$f^1 = x+\xi,\ \ f^2 = y+\eta,\ \ f^3 = z+\vartheta; \tag{10.18}$$

$$f^1 = y - \eta,\ f^2 = (x+\xi)y + z + \vartheta,\ f^3 = (x+\xi)\eta + z + \vartheta; \tag{10.19}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= (x+\xi)^2 \exp(2\frac{y+\eta}{x+\xi}), \\ f^2 &= (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \end{aligned}\right\} \tag{10.20}$$

$$f^1 = \frac{x+\xi}{y+\eta},\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{10.21}$$

$$f^1 = (x+\xi)(y+\eta),\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{10.22}$$

$$f^1 = y + \eta,\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{10.23}$$

$$f^1 = \frac{(x+\xi)^p}{y+\eta},\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{10.24}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= (x+\xi)^2 + (y+\eta)^2, \\ f^2 &= z + arctg\frac{y+\eta}{x+\xi},\quad f^3 = \vartheta + arctg\frac{y+\eta}{x+\xi}; \end{aligned}\right\} \tag{10.25}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= ((x+\xi)^2 + (y+\eta)^2)\exp(2\gamma arctg\frac{y+\eta}{x+\xi}), \\ f^2 &= z + arctg\frac{y+\eta}{x+\xi},\quad f^3 = \vartheta + arctg\frac{y+\eta}{x+\xi}; \end{aligned}\right\} \tag{10.26}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= \sin y \sin\eta \cos(x+\xi) + \cos y \cos\eta, \\ f^2 &= z + \arcsin\frac{\sin(x+\xi)\sin\eta}{\sqrt{1-(f^1)^2}}, \\ f^3 &= \vartheta + \arcsin\frac{\sin(x+\xi)\sin y}{\sqrt{1-(f^1)^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{10.27}$$

$$f^1 = (x+\xi)y\eta, \quad f^2 = z + \frac{1}{(x+\xi)y^2}, \quad f^3 = \vartheta + \frac{1}{(x+\xi)\eta^2}, \qquad (10.28)$$

где $0 < |p| < 1$ *и* $0 < \gamma < \infty$.

Доказательство этой теоремы можно найти в §8 монографии [24].

Перейдем теперь к уравнению (10.15), выражающему феноменологическую симметрию триметрических физических структур ранга (2,2), задаваемых на трехмерных многообразиях метрическими функциями (10.18)–(10.28). Как и в случае двуметрических физических структур (см. теорему 2) сделаем связь метрической функции (10.13) и уравнения (10.15) более прозрачной, воспользовавшись следующей теоремой, доказанной Р.М. Мурадовым [32, §19]:

Теорема 4. *Если трехкомпонентная метрическая функция*

$$f = f(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta)$$

задает на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *триметрическую физическую структуру ранга* $(2,2)$, *то с точностью до масштабного преобразования и замены координат в многообразиях она определяет в* R^3 *такую квазигрупповую операцию с правым единичным элементом и правым обратным, совпадающим с исходным, что в уравнении, выражающем феноменологическую симметрию соответствующей геометрии двух множеств, под знаком оператора альтернирования* $\hat{R}(\alpha\beta)$ *стоит выражение, подобное самой метрической функции и получаемое из нее при подстановках* $x \to f^1(i\alpha),\ y \to f^2(i\alpha),\ z \to f^3(i\alpha),\ \xi \to f^1(j\alpha),\ \eta \to f^2(j\alpha), \vartheta \to f^3(j\alpha)$:

$$\hat{R}(\alpha\beta) f(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha), f^1(j\alpha), f^2(j\alpha), f^3(j\alpha)) = 0;$$

$$f^1 = x - \xi, \quad f^2 = y - \eta, \quad f^3 = z - \vartheta; \qquad (10.18')$$

$$f^1 = x - \xi, \quad f^2 = y - \eta, \quad f^3 = (x-\xi)\eta + z - \vartheta; \qquad (10.19')$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = (y - \eta - (x-\xi)\ln\vartheta)\vartheta, \; f^3 = z/\vartheta; \tag{10.20$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = (y-\eta)\vartheta, \quad f^3 = z/\vartheta; \tag{10.21$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = (y-\eta)/\vartheta, \quad f^3 = z/\vartheta; \tag{10.22$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = y-\eta, \quad f^3 = z/\vartheta; \tag{10.23$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = (y-\eta)\vartheta^p, \quad f^3 = z/\vartheta; \tag{10.24$'$}$$

где $0 < |p| < 1$;

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= (x-\xi)\cos\vartheta - (y-\eta)\sin\vartheta, \\ f^2 &= (x-\xi)\sin\vartheta + (y-\eta)\cos\vartheta, \\ f^3 &= z - \vartheta; \end{aligned}\right\} \tag{10.25$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= \frac{(x-\xi)\cos\vartheta - (y-\eta)\sin\vartheta}{\exp(\gamma\vartheta)}, \\ f^2 &= \frac{(x-\xi)\sin\vartheta + (y-\eta)\cos\vartheta}{\exp(\gamma\vartheta)}, \\ f^3 &= z - \vartheta; \end{aligned}\right\} \tag{10.26$'$}$$

где $0 < \gamma < \infty$;

$$
\left.
\begin{aligned}
f^1 &= x\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2} - \xi\sqrt{1-x^2-y^2-z^2} + y\vartheta - z\eta,\\
f^2 &= y\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2} - \eta\sqrt{1-x^2-y^2-z^2} + z\xi - x\vartheta,\\
f^1 &= z\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2} - \vartheta\sqrt{1-x^2-y^2-z^2} + x\eta - y\xi;
\end{aligned}
\right\} \qquad (10.27')
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
f^1 &= \frac{(x-\xi)\eta^2}{1-(x-\xi)\vartheta\eta^2},\\
f^2 &= \frac{(1-(x-\xi)\vartheta\eta^2)y}{\eta},\\
f^3 &= z - \frac{\vartheta\eta^2}{(1-(x-\xi)\vartheta\eta^2)y^2}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (10.28')
$$

В заключение отметим, что В.А.Кыров в работе [18] одновременно с классификацией четыреметрических феноменологически симметричных геометрий ранга 3 на одном множестве, приведенной в конце §3, построил также классификацию четыреметрических физических структур (феноменологически симметричных геометрий двух множеств) ранга (2,2).

§11. Групповая симметрия произвольных физических структур

Бинарные физические структуры как феноменологически симметричные геометрии естественно определяются на одном и двух множествах. Двухточечная функция, задающая такую геометрию, допускает нетривиальную группу движений с конечным числом непрерывных параметров, которое было названо степенью групповой симметрии. При определенном соотношении между рангом физической структуры, числом существенных параметров группы движений и размерностью множеств групповая и феноменологическая симметрии соответствующей геометрии оказываются эквивалентными. Эти соотношения были заложены в определение физической структуры, ее феноменологической и групповой симметрий. Естественно возникает вопрос об их происхождении и обосновании. Кроме того, имеется много возможностей обобщения и развития понятия физической структуры, одна из которых была реализована в §1 и в §8, когда двум точкам сопоставлялось несколько действительных чисел. Другая возможность обобщения, реализованная в §5, состоит в определении тернарных физических структур, когда метрическая функция, задающая структуру, сопоставляет число не паре точек, а трем точкам. Тернарные физические структуры естественно определяются на одном, двух и трех множествах и случаи минимального ранга для них были рассмотрены автором в работах [5], [33], [34]. Однако уже предварительное их исследование показало, что тернарные структуры, в отличие от бинарных, не наделяются групповой симметрией, то есть исходная трехточечная функция не допускает нетривиальной группы движений. Этот результат в какой-то мере объясняет, почему столь богаты и содержательны в физическом и математическом смыслах бинарные структуры, в то время как тернарные существуют только в случае наименьшего возможного ранга. Поэтому возникает еще вопрос о внутренних причинах такого различия между бинарными и тернарными физическими структурами.

Для полного ответа на вопрос о соотношении между рангом физической структуры, степенью групповой симметрии и размерностью множеств (многообразий), на которых она задана, а также о причинах различия бинарных и полиарных (в частности, тернарных) структур, необходимо исходить из более общего определения физической структуры. Тогда можно будет установить, при каких соотношениях между основными характеристиками структуры она может быть наделена групповой симметрией, а при каких нет. Естественно предположить, что только те структуры содержательны в физическом и математическом смыслах, группы движений которых нетривиальны. Для краткости последующего изложения определение произвольных физических структур будет дано в самом общем виде, достаточном, однако, для проведения доказательных рассуждений.

Пусть имеются p множеств $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ произвольной природы, каждое из которых в математическом смысле представляет собой гладкое многообразие размерности $m_1, \ldots, m_p$ соответственно. Пусть также имеется функция

$$f : \mathfrak{S}_f \to R^s, \tag{11.1}$$

где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$, сопоставляющая каждому кортежу длины $q = q_1 + \ldots + q_p$ из $\mathfrak{S}_f$ некоторую точку из R^s, то есть s действительных чисел. Предполагается, что область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f открыта и плотна в q-арном прямом произведении $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$ исходных множеств $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$, а ее координатное представление достаточно гладкое. Числовой кортеж $(q_1, \ldots, q_p)$ назовем *кратностью*, число $q = q_1 + \ldots + q_p$ – *арностью*, а функцию (11.1) *метрической*.

Пусть $M_1, \ldots, M_p$ – произвольные целые числа, такие что $M_1 > q_1, \ldots, M_p > q_p$. Построим отображение

$$F : \mathfrak{S}_F \to R^{sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p}}, \tag{11.2}$$

где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p}$, сопоставляя каждому кортежу длины $M_1 + \ldots + M_p$ из $\mathfrak{S}_F$ упорядоченную по нему совокупность $sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p}$ чисел, соответствующих всем кортежам длины $q = q_1 + \ldots + q_p$, которые являются проекциями исходного кортежа на область $\mathfrak{S}_f$. Область определения $\mathfrak{S}_F$ функции (11.2) будет, очевидно, открытой и плотной в $\mathfrak{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p}$. Аналогично построим второе отображение

$$F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sC_{M'_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M'_p}^{q_p}}, \tag{11.2$'$}$$

где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}_1^{M'_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M'_p}$ и $M'_1 \geq M_1, \ldots, M'_p \geq M_p$. Проекцию отображения F' получим, опуская из области его определения $\mathfrak{S}_{F'}$ некоторую совокупность кортежей длины $q = q_1 + \ldots + q_p$, а из области его значений все числа, соответствующие им по функции (11.1).

Определение 1. Будем говорить, что функция (11.1) задает на $m_1, \ldots, m_p$-мерных многообразиях $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ q-арную полиметрическую физическую структуру ранга $(M_1, \ldots, M_p)$ и кратности $(q_1, \ldots, q_p)$, если на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве ранг отображения F равен $s(C_{M_1}^{q_1} \times$

$\ldots \times C^{q_p}_{M_p} - 1)$, а ранг любой проекции отображения F', область определения которой не включает в себя какую-либо область отображения F, максимален на плотном в $\mathfrak{S}_{F'}$ множестве.

Другими словами, локально множество значений отображения F является подмножеством множества нулей системы s независимых функций $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ от $sC^{q_1}_{M_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M_p}$ переменных, причем s функциональных связей

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s) = 0 \tag{11.3}$$

являются порождающими в том смысле, что любые другие нетривиальные связи будут только их следствием.

Определение 2. Будем говорить, что определенная выше физическая структура наделена групповой симметрией конечной степени $r \geq 1$, если заданы такие эффективные гладкие локальные действия некоторой r-мерной локальной группы Ли G^r в многообразиях $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$, что для их взаимного расширения на прямое произведение $\mathfrak{M}^{q_1}_1 \times \ldots \times \mathfrak{M}^{q_p}_p$ метрическая функция (11.1), задающая структуру, является q-точечным инвариантом, где $q = q_1 + \ldots + q_p$.

Поскольку преобразуемые многообразия конечномерны, естественно условие в определении 2, что конечно максимальное число r непрерывных параметров группы движений, которая поэтому является конечномерной локальной группой Ли специальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}^{q_1}_1 \times \ldots \times \mathfrak{M}^{q_p}_p$ размерности $q_1 m_1 + \ldots + q_p m_p$, являющихся взаимным расширением преобразований многообразий $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$.

Запишем систему $sC^{q_1}_{M'_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M'_p}$ уравнений сохранения метрической функции (11.1):

$$Df|_{F'} = 0 \tag{11.4}$$

относительно $M'_1 m_1 + \ldots + M'_p m_p$ дифференциалов координат точек кортежа из $\mathfrak{S}_{F'}$. Если физическая структура наделена групповой симметрией, то однородная система (11.4), с одной стороны, должна иметь хотя бы одно ненулевое решение, а с другой, число ее линейно независимых ненулевых решений для любых чисел $M'_1, \ldots, M'_p$ не должно превышать некоторого конечного значения, равного степени групповой симметрии. Число таких решений равно, как известно, числу неизвестных в системе минус ранг ее матрицы. Но матрица системы уравнений (11.4) есть функциональная матрица для системы функций f, соответствующих всем проекциям области определения $\mathfrak{S}_{F'}$ отображения (11.2′) на область определения $\mathfrak{S}_f$ исходной функции (11.1). Ранг этой матрицы, очевидно, не изменится, если из системы функций $f|_{F'}$ исключить функции, зависимые по связи (11.3). Исключив их, получим максимальную проекцию отображения (11.2′), не содержащую в себе отображения (11.2). Обозначим число функций f в этой максимальной проекции через $N(M_1', \ldots, M_p')$. Тогда по определению 1 физической структуры ранг матрицы системы уравнений (11.4) будет равен

$$\min(M_1'm_1 + \ldots + M_p'm_p;\ N(M_1', \ldots, M_p')).$$

Если найдутся такие значения чисел $M_1', \ldots, M_p'$, для которых $M_1'm_1 + \ldots + M_p'm_p \leq N(M_1', \ldots, M_p')$, то ранг матрицы системы уравнений (11.4) для них будет равен $M_1'm_1 + \ldots + M_p'm_p$, то есть числу неизвестных в ней. Но тогда эта система будет иметь только нулевое решение, что означает отсутствие нетривиальной групповой симметрии у рассматриваемой физической структуры. Если же для любых значений $M_1', \ldots, M_p'$ выполняется строгое неравенство $N(M_1', \ldots, M_p') < M_1'm_1 + \ldots + M_p'm_p$, то ранг матрицы системы (11.4) будет равен $N(M_1', \ldots, M_p')$ и число ее линейно независимых ненулевых решений окажется равным

$$r' = M_1'm_1 + \ldots + M_p'm_p - N(M_1', \ldots, M_p') > 0.$$

Число r', как было отмечено выше, в случае наделения физической структуры групповой симметрией согласно определению 2, не должно превышать некоторого конечного значения. Из такого условия установим, при каких соотношениях между размерностью множеств, кратностью и рангом физическая структура, задаваемая метрической функцией (11.1), может быть наделена групповой симметрией и определить степень r этой симметрии.

Бинарные физические структуры ($q = 2$) могут быть заданы функцией (11.1) на одном и на двух множествах. В случае одного множества (p=1) они были подробно рассмотрены в §5 под наименованием бинарных феноменологически симметричных геометрий. Выведенные там соотношения (5.7) и (5.8) устанавливали связь размерности многообразия с рангом феноменологической симметрии и степенью групповой симметрии. Собственно физические структуры определялись первоначально как феноменологически симметричные геометрии двух множеств (p=2) и к их рассмотрению, дополняющему результаты §5, мы сейчас перейдем.

Бинарная физическая структура ранга (M, N) и кратности (1,1), где $M \geq 2$ и $N \geq 2$, задается метрической функцией (11.1) на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности m и n соответственно, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. По определению 1 ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sMN}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N$, равен $s(MN-1)$. Число зависимых в системе $sM'N'$ функций отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'N'}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'} \times \mathfrak{N}^{N'}$ и $M' \geq M,\ N' \geq N$, определяется способом наложения на матрицу пар для кортежа длины $M'+N'$ из области $\mathfrak{S}_{F'}$ матрицы пар для кортежа длины $M+N$ из области $\mathfrak{S}_F$, аналогичным описанному в §5. Число это находится достаточно просто и равно $s(M'-M+1)(N'-N+1)$. Поэтому ранг функциональной матрицы системы функций $f|_{F'}$, а следовательно, и системы уравнений (11.4) по определению 1 будет равным

$$\min(M'm + N'n;\ sM'N' - s(M'-M+1)(N'-N+1)).$$

Если $m < s(N-1)$ или $n < s(M-1)$, то для некоторых значений M' и N' ранг матрицы системы уравнений (11.4) будет равен числу неизвестных $M'm + N'n$ в ней и для них она имеет только нулевое решение, что и означает отсутствие групповой симметрии у рассматриваемой физической структуры. Если же $m \geq s(N-1)$ и $n \geq s(M-1)$, то ранг матрицы системы уравнений (11.4) для любых значений M' и N' равен $sM'N' - s(M'-M+1)(N'-N+1)$ и она потому имеет

$$r' = M'm + N'n - sM'(N-1) - sN'(M-1) + s(M-1)(N-1)$$

линейно независимых ненулевых решений. При $m > s(N-1)$ или $n > s(M-1)$ с ростом M' и N' число r' таких решений может стать сколь угодно большим, что противоречит предположению о конечности степени групповой симметрии. Поэтому бинарная физическая структура ранга (M, N), задаваемая на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ метрической функцией (11.1), будет наделена групповой симметрией только при выполнении следующих соотношений:

$$\mathbf{m} = \mathbf{s}(\mathbf{N}-\mathbf{1}),\ \mathbf{n} = \mathbf{s}(\mathbf{M}-\mathbf{1}). \tag{11.5}$$

Степень r групповой симметрии, то есть число независимых и существенных параметров группы движений, равно числу r' линейно независимых ненулевых решений системы уравнений (11.4) при соотношениях (11.5):

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{M}-\mathbf{1})(\mathbf{N}-\mathbf{1}) = \mathbf{mn}/\mathbf{s}. \tag{11.6}$$

Соотношения (11.5) и (11.6) были использованы в основных определениях работы автора [35] и §8 настоящей монографии. При сопоставлении надо учесть только следующую сдвижку обозначений $M \to n{+}1,\ N \to m{+}1,\ m \to sm,\ n \to sn$. То есть на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ метрическая функция (11.1) задает физическую структуру ранга $(n{+}1, m{+}1)$, которая наделена групповой симметрией степени $r = smn$.

Тернарные физические структуры (q=3) могут быть заданы функцией (11.1) на одном, двух и трех множествах. В случае одного множества (p=1) они уже были рассмотрены в §5 под наименованием тернарных феноменологически симметричных геометрий. Оказалось, что такие геометрии не могут быть наделены групповой симметрией конечной степени. Естественно ожидать, что в случае двух множеств (p=2) и трех множеств (p=3) вывод окажется тем же самым. Покажем это.

Тернарные физические структуры ранга (M, N) и кратности (2,1), где $M \geq 3,\ N \geq 2$, задаются на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ метрической функцией (11.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}$. По определению 1 ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sM(M-1)N/2}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N$, равен $sM(M-1)N/2 - s$. Ранг отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'(M'-1)N'/2}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'} \times \mathfrak{N}^{N'}$ и $M' \geq M,\ N' \geq N$, то есть ранг матрицы системы уравнений (11.4), найдем, налагая матрицу троек для кортежа длины $M + N$ из области $\mathfrak{S}_F$ на матрицу троек для кортежа длины $M' + N'$ из области $\mathfrak{S}_{F'}$:

$$\min(M'm + N'n;\ sM'(M'-1)N'/2 -$$
$$- s(M'-M+1)(M'-M+2)(N'-N+1)/2).$$

Поскольку $M > 2$ и $N > 1$, для достаточно больших значений M' и N' этот ранг равен $M'm + N'n$, то есть числу неизвестных в системе уравнений (11.4), которая будет иметь только нулевое решение. Таким образом, тернарные физические структуры на двух множествах не могут быть наделены групповой симметрией конечной степени.

Для тернарной физической структуры ранга (M, N, L) и кратности (1,1,1), где $M \geq 2,\ N \geq 2,\ L \geq 2$, задаваемой на трех многообразиях $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L}$ размерности m, n, l соответственно метрической функцией (11.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$, ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sMNL}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N \times \mathfrak{L}^L$, по определению 1 для нее равен $sMNL - s$. Ранг же отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'N'L'}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'} \times \mathfrak{N}^{N'} \times \mathfrak{L}^{L'}$ и $M' \geq M,\ N' \geq N,\ L' \geq L$, то есть ранг матрицы системы уравнений (11.4), нетрудно найти методом наложения, использованным выше:

$$\min(M'm + N'n + L'l;\ sM'N'L' - \\ - s(M' - M + 1)(N' - N + 1)(L' - L + 1)).$$

Поскольку $M > 1,\ N > 1,\ L > 1$, для достаточно больших значений M', N', L' ранг отображения F' равен $M'm + N'n + L'l$, то есть числу неизвестных в системе уравнений (11.4), которая для них имеет только нулевое решение. Таким образом, и на трех множествах тернарные физические структуры не могут быть наделены групповой симметрией конечной степени.

Физические структуры ранга $(M_1, \ldots, M_p)$ и кратности $(q_1, \ldots, q_p)$, где $M_1 > q_1, \ldots, M_p > q_p$, задаются на p многообразиях $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ размерности $m_1, \ldots, m_p$ соответственно метрической функцией (11.1). Ранг отображения (11.2) по определению 1 равен $s(C^{q_1}_{M_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M_p} - 1)$, а ранг отображения (11.2$'$), то есть ранг матрицы системы уравнений (11.4), можно найти, налагая на матрицу кортежей длины $q = q_1 + \ldots + q_p$ для кортежа длины $M'_1 + \ldots + M'_p$ из области $\mathfrak{S}_{F'}$ матрицу кортежей той же длины q для кортежа длины $M_1 + \ldots + M_p$ из области $\mathfrak{S}_F$:

$$\min(M'_1 m_1 + \ldots + M'_p m_p;\ sC^{q_1}_{M'_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M'_p} - \\ - sC^{q_1}_{M'_1 - M_1 + q_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M'_p - M_p + q_p}).$$

Поскольку бинарные ($q = 2$) и тернарные ($q = 3$) физические структуры выше были рассмотрены, будем предполагать, что их арность $q > 3$. Число неизвестных в системе уравнений (11.4) от $M'_1, \dots, M'_p$ зависит линейным образом. В то же время разность, входящая во вторую половину последнего выражения, содержит по тем же переменным $M'_1, \dots, M'_p$ члены порядка $q - 1 > 2$, которые неограниченно возрастают, так как $M_1 > q_1, \dots, M_p > q_p$. А это означает, что для достаточно больших значений $M'_1, \dots, M'_p$ ранг матрицы системы уравнений (11.4) станет равен числу неизвестных в ней, и потому она для них будет иметь только нулевое решение. Таким образом, q-арные физические структуры, задаваемые на множествах $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p$ функцией (11.1), и в случае $q > 3$ не могут быть наделены групповой симметрией конечной степени.

Окончательный вывод, к которому мы приходим по результатам проведенного выше исследования выражает следующая

Теорема. *Групповой симметрией конечной степени могут быть наделены только бинарные физические структуры на одном и двух множествах, в то время как для q-арных физических структур с $q \geq 3$ метрическая функция* (11.1) *не допускает никаких нетривиальных локальных движений.*

Групповая симметрия бинарных физических структур, которым было уделено основное внимание в монографиях автора [10] и [24], является определяющей. То есть функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}^2$ или $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, будет задавать физическую структуру в том и только в том случае, если она допускает нетривиальную конечномерную группу движений. Условие наделения физических структур групповой симметрией конечной степени определяет эту степень, устанавливая ее связь с размерностью множеств и рангом структуры соотношениями (5.7),(5.8) и (11.5),(11.6). С другой стороны, без предположения о групповой симметрии конечной степени даже соотношения (5.7) и (11.5), устанавливающие связь размерности множеств с рангом структуры и не содержащие степень групповой симметрии, должны в исходных аксиомах оговариваться дополнительно без достаточно убедительного обоснования этой связи.

В заключение отметим, что результаты настоящего параграфа опубликованы автором в работе [36].

§12. Функциональные уравнения в теории физических структур

В математическом аппарате теории физических структур (ТФС) функциональные уравнения играют ключевую роль, причем феноменологическая и групповая симметрии приводят к различному их типу. В настоящем параграфе будут рассмотрены функциональные уравнения для физических структур на двух множествах. Напомним, что для геометрических физических структур на одном множестве соответствующие функциональные уравнения были рассмотрены в §6.

Физическая структура ранга $(n+1, m+1)$ задается невырожденной s-компонентной метрической функцией

$$f = f(x, \xi) = f(x^1, \ldots, x^{sm},\ \xi^1, \ldots, \xi^{sn}), \tag{12.1}$$

где $m, n, s \geq 1$, на sm- и sn-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Ее феноменологическая симметрия означает, что для каждого кортежа $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$ из некоторой окрестности $U \subset \mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей выполняется тождество

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau)) = 0, \tag{12.2}$$

в котором функция Φ, как и метрическая функция (12.1), имеет s компонент, которые независимы.

Тождество (12.2) есть, с одной стороны, аналитическое выражение принципа феноменологической симметрии, а с другой, представляет собой основное функциональное уравнение в ТФС. В общем случае, неизвестными в уравнении (12.2) являются и функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающая физическую структуру, и функция $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$, выражающая этим уравнением ее феноменологическую симметрию. Понимаемое именно в таком смысле, функциональное уравнение (12.2) решено только в некоторых случаях. Полностью для $s = 1$ (см. §9), частично для $s = 2$ (см. §10) и $s = 3, 4$ (см. §10). Более простым является тот вариант уравнения (12.2), когда в нем из двух функций f и Φ какая-то известна заранее. Чаще всего известной оказывается метрическая функция f, поэтому сначала рассмотрим именно такой вариант уравнения (12.2).

Простейшие случаи уравнения (12.2) с известной функцией f возникают при анализе второго закона Ньютона и закона Ома. Если закон Ньютона записать обычной формулой

$$a = F/m, \tag{12.3}$$

где a – функция ускорения тела массы m под действием ускорителя силы F, то для любых двух материальных тел i, j и любых двух ускорителей α, β легко находится связь, в которую входят только четыре измеряемые в опыте ускорения:

$$a_{i\alpha}a_{j\beta} - a_{i\beta}a_{j\alpha} = 0. \tag{12.4}$$

Феноменологически симметричная форма (12.4) второго закона Ньютона является решением функционального уравнения

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}) = 0, \tag{12.5}$$

в котором функция ускорения a известна по обычной форме (12.3) этого закона. Функция a задает на множестве материальных тел $\mathfrak{M}$ и множестве ускорителей $\mathfrak{N}$ физическую структуру минимального ранга (2,2), поэтому и уравнение (12.5) оказалось достаточно простым. Ясно, что это уравнение есть частный случай общего уравнения (12.2) для случая $m = n = s = 1$, если в нем положить $f = a$.

Перейдем теперь к закону Ома:

$$I = \mathcal{E}/(R + r), \tag{12.6}$$

где I – функция тока, измеряемая амперметром в замкнутой цепи, содержащей проводник с сопротивлением R и источник тока с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Для любых трех проводников i, j, k и любых двух источников тока α, β шесть возможных значений тока связаны соотношением, в котором отсутствуют их характеристики:

$$\begin{vmatrix} (I_{i\alpha})^{-1} & (I_{i\beta})^{-1} & 1 \\ (I_{j\alpha})^{-1} & (I_{j\beta})^{-1} & 1 \\ (I_{k\alpha})^{-1} & (I_{k\beta})^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12.7}$$

Соотношение (12.7) задает феноменологически симметричную форму закона Ома, являющуюся решением функционального уравнения

$$\Phi(I_{i\alpha}, I_{i\beta}, I_{j\alpha}, I_{j\beta}, I_{k\alpha}, I_{k\beta}) = 0, \tag{12.8}$$

в котором функция тока I известна по обычной форме (12.6) этого закона. Заметим, что функция I задает на множестве проводников $\mathfrak{M}$ и множестве источников тока $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (3,2), а уравнение (12.8) получается из общего уравнения (12.2) при $n = 2, m = s = 1$, если в нем положить $f = I$.

В §9 приведены все возможные выражения (9.2)–(9.7) функции f, задающей на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ однометрическую физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$. Для каждой из них, кроме, может быть, (9.4), решение функционального уравнения (12.2) находится сравнительно просто и чисто алгебраически: из $(m+1)(n+1)$ значений функции f, соответствующих всем парам точек кортежа $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau > \in \mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ исключаются координаты точек этого кортежа. Получающиеся при этом соотношения $(9.2')$–$(9.7')$ и являются соответствующими решениями функционального уравнения (12.2).

В §10 приведены все возможные выражения (10.3)–(10.12) для двухкомпонентной функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на двумерном и $2n$ -мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(n+1, 2)$, где $n \geq 1$. Функциональное уравнение (12.2) для двуметрической физической структуры ранга $(n+1, 2)$ записывается в следующем виде:

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), \ldots, f(v\alpha), f(v\beta)) = 0, \tag{12.9}$$

причем надо помнить, что функции f и Φ двухкомпонентные, то есть $f = (f^1, f^2)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$. Решениями этого уравнения для каждой из функций (10.3)–(10.12) являются следующие в §10 за теоремой 1 соотношения. Теорема 2 определяет решения того же функционального уравнения (12.9), но с другими эквивалентными выражениями (10.3′)–(10.12′) для метрической функции.

В §10 приведена также полная классификация (10.18)–(10.28) трехкомпонентных функций $f = (f^1, f^2, f^3)$, задающих на трехмерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (2,2). Функциональное уравнение (12.2) для них записывается в следующем виде:

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0, \tag{12.10}$$

которое есть система трех функциональных уравнений, так как в нем функция $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ тоже трехкомпонентная. Решения уравнения (12.10) для эквивалентных выражений (10.18′)–(10.28′) определяются теоремой 4 из §10.

Другой вариант функционального уравнения (12.2), когда при известной функции $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ необходимо найти метрическую функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающую на многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности sm и sn физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$, решается следующим образом. В прямых произведениях $\mathfrak{M}^n$ и $\mathfrak{N}^m$ фиксируются кортежи $< j_0 k_0 \ldots v_0 >$ и $< \beta_0 \gamma_0 \ldots \tau_0 >$ длины n и m соответственно. Точки этих кортежей выбираются такие, чтобы уравнение (12.2), записанное для кортежа $< i j_0 k_0 \ldots v_0, \alpha \beta_0 \gamma_0 \ldots \tau_0 > \in \mathfrak{S}_F$, могло быть однозначно разрешено относительно $f(i\alpha)$. Затем удобным образом вводятся локальные координаты $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{sm}$ и $\xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2, \ldots, \xi_\alpha^{sn}$, через которые и выражается метрическая функция (12.1). Если полученное выражение невырождено и при его подстановке в исходное уравнение (12.2) последнее превращается в тождество по всем координатам точек кортежа $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$, то найденная таким образом метрическая функция действительно задает физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$.

Проиллюстрируем описанный выше метод решения функционального уравнения (12.2) на примере однометрической и двуметрической физических структур минимального ранга (2,2).

Запишем феноменологически симметричное соотношение

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0$$

для четверки $< ij_0, \alpha\beta_0 >$:

$$f(i\alpha) - f(i\beta_0) - f(j_0\alpha) + f(j_0\beta_0) = 0,$$

после чего разрешим его относительно $f(i\alpha)$:

$$f(i\alpha) = f(i\beta_0) + f(j_0\alpha) - f(j_0\beta_0).$$

Вводя координаты $x_i = f(i\beta_0) - f(j_0\beta_0)/2$ и $\xi_\alpha = f(j_0\alpha) - f(j_0\beta_0)/2$, где $f(j_0\beta_0)$, очевидно, константа, получаем координатное представление метрической функции (9.2), которое при подстановке в исходное соотношение обращает его в тождество, подтверждая тем самым, что эта функция задает на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ однометрическую физическую структуру ранга (2,2).

Перейдем к более сложному феноменологически симметричному соотношению

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) - f^1(i\beta) & f^1(i\alpha)f^2(j\alpha) \\ f^1(j\alpha) - f^1(j\beta) & f^1(j\alpha)f^2(i\alpha) \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) - f^2(j\alpha) & f^2(i\alpha)f^1(i\beta) \\ f^2(i\beta) - f^2(j\beta) & f^2(i\beta)f^1(i\alpha) \end{vmatrix} = 0, \end{array}\right\}$$

которое рассмотрим как систему двух функциональных уравнений и сначала запишем их для четверки $< j_0 i, \beta_0\alpha >$:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} f^1(j_0\beta_0) - f^1(j_0\alpha) & f^1(j_0\beta_0)f^2(i\beta_0) \\ f^1(i\beta_0) - f^1(i\alpha) & f^1(i\beta_0)f^2(j_0\beta_0) \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} f^2(j_0\beta_0) - f^2(i\beta_0) & f^2(j_0\beta_0)f^1(j_0\alpha) \\ f^2(j_0\alpha) - f^2(i\alpha) & f^2(j_0\alpha)f^1(j_0\beta_0) \end{vmatrix} = 0, \end{array}\right\}$$

после чего разрешим относительно $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))$:

$$\left.\begin{array}{l} f^1(i\alpha) = [f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0) + f^1(j_0\alpha)f^2(j_0\beta_0) - \\ \qquad - f^1(j_0\beta_0)f^2(j_0\beta_0)]f^1(i\beta_0)/f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0), \\ \\ f^2(i\alpha) = [f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0) + f^1(j_0\alpha)f^2(j_0\beta_0) - \\ \qquad - f^1(j_0\beta_0)f^2(j_0\beta_0)]f^2(j_0\alpha)/f^1(j_0\alpha)f^2(j_0\beta_0). \end{array}\right\}$$

Вводя удобные координаты $x_i = f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0)$, $y_i = f^1(i\beta_0)/f^2(i\beta_0)\times \times f^1(j_0\beta_0)$ и $\xi_\alpha = (f^1(j_0\alpha) - f^1(j_0\beta_0))f^2(j_0\beta_0)$, $\eta_\alpha = f^2(j_0\alpha)/f^1(j_0\alpha)\times \times f^2(j_0\beta_0)$ в двумерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, получаем координатное представление (10.4) метрической функции, задающей на этих многообразиях двуметрическую физическую структуру ранга (2,2), так как ее подстановка в исходное соотношение обращает его в тождество.

Все другие функциональные уравнения (12.2) с известной функцией Φ решаются аналогично, хотя для некоторых из них возникают значительные чисто технические трудности его разрешения относительно переменной $f(i\alpha)$ и рационального введения систем локальных координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Описанный выше метод решения функционального уравнения (12.2) может быть применен к любой наперед заданной функции Φ. Но если равенство $\Phi = 0$ не определяет феноменологически симметричное соотношение для физической структуры, то полученное координатное представление функции $f(i\alpha)$ при подстановке в уравнение (12.2) не обращает его в тождество по всем координатам точек кортежа $< ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau >$. Приведем интересный в этом смысле пример.

Обобщая феноменологически симметричное соотношение (9.4′) для одནометрической физической структуры ранга (4,2), естественно было предположить, что феноменологически симметричное соотношение для физической структуры ранга (5,3) должно записываться в виде равенства нулю следующего определителя пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) & f(i\alpha)f(i\beta)f(i\gamma) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) & f(j\alpha)f(j\beta)f(j\gamma) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) & f(k\alpha)f(k\beta)f(k\gamma) \\ 1 & f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\gamma) & f(l\alpha)f(l\beta)f(l\gamma) \\ 1 & f(q\alpha) & f(q\beta) & f(q\gamma) & f(q\alpha)f(q\beta)f(q\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Запишем это соотношение для кортежа $< ij_0k_0l_0q_0, \alpha\beta_0\gamma_0 >$, разрешим его относительно переменной $f(i\alpha)$ и введем удобным образом координаты x_i, y_i в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ и $\xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha$, ν_α в четырехмерном многообразии $\mathfrak{N}$. В результате для функции $f(i\alpha)$ получаем следующее локальное координатное представление:

$$f(i\alpha) = (x_i\xi_\alpha + y_i\eta_\alpha + \mu_\alpha)/(x_iy_i + \nu_\alpha).$$

Однако подстановка найденной функции в исходное соотношение не обращает его в тождество, что было установлено с помощью компьютерной программы "Maple". Этот результат можно было предвидеть заранее, так как согласно приведенной в начале §9 классификации однометрическая физическая структура ранга (5,3) не существует.

Описанная в §8 эквивалентность феноменологической и групповой симметрий, согласно которой функция f, задающая на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру, является двухточечным инвариантом некоторой группы их преобразований, приводит к функциональному уравнению (8.6), принципиально отличному от рассмотренного выше уравнения (12.2), хотя решения этих уравнений для функции f должны совпадать.

Ниже удобно будет в уравнении (8.6) опустить явное указание точек i и α многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, записывая его в следующем виде:

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi), \tag{12.11}$$

где $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $\sigma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ – локальные обратимые преобразования многообразий, а $x = (x^1, \ldots, x^{sm})$, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{sn})$ – локальные координаты в них.

В общем случае функциональное уравнение (12.11), как и уравнение (12.2), допускает два толкования. В первом случае неизвестны как метрическая функция f, так и функции λ, σ, определяющие преобразования многообразий $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$. Тогда, зная по итоговой теореме 3 из §8 размерность группы движений геометрии двух множеств, задаваемой функцией f, сначала проводим полную с точностью до эквивалентности (замены локальных координат) классификацию smn-мерных групп преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности sm и sn, после чего находим по уравнению (12.11) невырожденные двухточечные инварианты. Но решение такого варианта уравнения для больших размерностей многообразий $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и группы их преобразований наталкивается на значительные технические трудности, связанные с классификацией этих групп, и может быть проведено до конца только для малых их размерностей. Во втором случае, когда известна метрическая функция f или известны действия λ и σ группы в многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, функциональное уравнение (12.11) может быть решено сведением его к системе дифференциальных уравнений в частных производных. Ниже будут рассмотрены некоторые примеры решения этого уравнения для второго случая.

Для функции (9.2): $f = x+\xi$, задающей физическую структуру ранга (2,2) на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, функциональное уравнение (12.11):

$$\lambda(x) + \sigma(\xi) = x + \xi$$

имеет решение $\lambda(x) = x + a,\ \sigma(\xi) = \xi - a$, определяющее однопараметрическую группу движений (9.10) для этой функции, а двухточечный инвариант полученной группы преобразований $x' = x + a,\ \xi' = \xi - a$ находится как решение того же функционального уравнения (12.11):

$$f(x + a, \xi - a) = f(x, \xi),$$

совпадая с исходной метрической функцией с точностью до масштабного преобразования: $f = \chi(x + \xi)$,

Для функции (9.3): $f = x\xi + \eta$, задающей на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (3,2), функциональное уравнение (12.11):

$$\lambda(x)\sigma(\xi, \eta) + \rho(\xi, \eta) = x\xi + \eta$$

имеет решение $\lambda(x) = ax + b,\ \sigma(\xi, \eta) = \xi/a,\ \rho(\xi, \eta) = \eta - b\xi/a$, где $a \neq 0$, определяющее двухпараметрическую группу движений (9.11) для этой функции. Сама же функция (9.3) может быть найдена как двухточечный инвариант этой группы по тому же функциональному уравнению (12.11):

$$f(ax + b, \xi/a, \eta - b\xi/a) = f(x, \xi, \eta)$$

с точностью до масштабного преобразования: $f = \chi(x\xi + \eta)$.

Для функции (9.4): $f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta)$, задающей физическую структуру ранга (4,2) на одномерном и трехмерном многообразиях $\mathfrak{M}$

и $\mathfrak{N}$, функциональное уравнение (12.11):

$$\frac{\lambda(x)\sigma(\xi,\eta,\vartheta)+\rho(\xi,\eta,\vartheta)}{\lambda(x)+\tau(\xi,\eta,\vartheta)}=\frac{x\xi+\eta}{x+\vartheta}$$

имеет решение, определяющее трехпараметрическую группу движений (9.12). Сама же метрическая функция (9.4) может быть найдена как двухточечный инвариант этой группы по функциональному уравнению (12.11):

$$f\left(\frac{ax+b}{cx+d},\frac{d\xi-c\eta}{d-c\vartheta},\frac{a\eta-b\xi}{d-c\vartheta},\frac{a\vartheta-b}{d-c\vartheta}\right)=f(x,\xi,\eta,\vartheta).$$

с точностью до масштабного преобразования $\chi(f)\to f$.

Для двухкомпонентной функции (10.3): $f^1=x+\xi,\ f^2=y+\eta$, задающей двуметрическую физическую структуру ранга (2,2) на двумерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, функциональное уравнение (12.11):

$$\left.\begin{aligned}\lambda^1(x,y)+\sigma^1(\xi,\eta)=x+\xi,\\ \lambda^2(x,y)+\sigma^2(\xi,\eta)=y+\eta\end{aligned}\right\}$$

имеет решение $\lambda^1(x,y)=x+a,\ \lambda^2(x,y)=y+b,\ \sigma^1(\xi,\eta)=\xi-a,\ \sigma^2(\xi,\eta)=\eta-b$, определяющее двухпараметрическую группу движений для этой функции: $x'=x+a,\ y'=y+b,\ \xi'=\xi-a,\ \eta'=\eta-b$. Сама же функция (10.3) находится как двухточечный инвариант этой группы по функциональному уравнению (12.11):

$$f(x+a,y+b,\xi-a,\eta-b)=f(x,y,\xi,\eta).$$

с точностью до двумерного масштабного преобразования: $f^1=\chi^1(x+\xi,y+\eta),\ f^2=\chi^2(x+\xi,y+\eta)$.

Для второй функции (10.4): $f^1=(x+\xi)y,\ f^2=(x+\xi)\eta$, задающей на двумерных многообразиях другую двуметрическую физическую структуру ранга (2,2), функциональное уравнение (12.11):

$$\left.\begin{aligned}(\lambda^1(x,y)+\sigma^1(\xi,\eta))\lambda^2(x,y)=(x+\xi)y,\\ (\lambda^1(x,y)+\sigma^1(\xi,\eta))\sigma^2(\xi,\eta)=(x+\xi)\eta\end{aligned}\right\}$$

имеет решение $\lambda^1(x,y)=ax+b,\ \lambda^2(x,y)=y/a,\ \sigma^1(\xi,\eta)=a\xi-b,\ \sigma^2(\xi,\eta)=\eta/a$, где $a\neq 0$, определяющее двухпараметрическую группу движений для этой функции: $x'=ax+b,\ y'=y/a,\ \xi'=a\xi-b,\ \eta'=$

η/a. Сама же метрическая функция находится как двухточечный инвариант группы движений решением функционального уравнения (12.11):

$$f(ax+b, y/a, a\xi - b, \eta/a) = f(x, y, \xi, \eta)$$

с точностью до масштабного преобразования $\chi^1(f^1, f^2) \rightarrow f^1$, $\chi^2(f^1, f^2) \rightarrow f^2$.

Для всех остальных функций (10.5)–(10.12), задающих двуметрические физические структуры ранга (3,2), (4,2) и (5,2), а также функций (10.18)–(10.28), задающих триметрические физические структуры ранга (2,2), функциональное уравнение (12.11) рассматривается аналогично.

Функциональные уравнения естественно появляются и в теории групп преобразований, с которой теория физических структур тесно связана. Для групп преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с действиями $x' = \lambda(x, a)$ и $\xi' = \sigma(\xi, \alpha)$, где $a \in G^r$ и $\alpha \in H^r$, с законами умножения $ab = \varphi(a, b)$ и $\alpha\beta = \psi(\alpha, \beta)$ в соответствующих параметрических группах G^r и H^r их изоморфизм устанавливается по решению функционального уравнения

$$u(\varphi(a, b)) = \psi(u(a), u(b)) \tag{12.12}$$

относительно взаимно однозначного отображения $u : G^r \rightarrow H^r$, а их подобие по решению системы двух функциональных уравнений: (12.12) и

$$v(\lambda(x, a)) = \sigma(v(x), u(a)) \tag{12.13}$$

относительно обратимых отображений $u : G^r \rightarrow H^r$ и $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$. Ясно, что подобие возможно только при совпадении размерностей многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Слабая эквивалентности групп преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ с действиями $x' = \lambda(x, a)$ и $\xi' = \sigma(\xi, a)$, имеющих одну и ту же параметрическую группу G^r, устанавливается по решению системы функциональных уравнений (12.12), (12.13), где $\psi = \varphi$, относительно автоморфизма $u : G^r \rightarrow G^r$ и обратимого отображения $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, а их сильная эквивалентность – по решению функционального уравнения

$$w(\lambda(x, a)) = \sigma(w(x), a) \tag{12.14}$$

относительно обратимого отображеня $w : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$.

Заметим, что вполне возможен случай, когда система функциональных уравнений (12.12), (12.13) с $\psi = \varphi$ имеет решение, в то время как функциональное уравнение (12.14) решения не имеет, то есть группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, будучи слабо эквивалентными, не эквивалентны в сильном смысле.

§13. Интерпретации физических структур

Физические структуры как математические формы могут быть наполнены различным содержанием, то есть имеют разнообразные физические и геометрические интерпретации. Приведем некоторые примеры.

Второй закон Ньютона: $F = ma$, рассмотренный во Введении (см. уравнения (В.17) и (В.18)), запишем в мультипликативной канонической форме:

$$f = x\xi, \quad f(i\alpha)f(j\beta) - f(i\beta)f(j\alpha) = 0, \tag{13.1}$$

где, например, $f(i\alpha) = x_i\xi_\alpha$, введя следующие единые обозначения функций и координат:

$$f = a, \quad x = 1/m, \quad \xi = F. \tag{13.2}$$

Уравнения канонической формы (13.1) представляют собой чисто математические соотношения, которые можно наполнить разным физическим содержанием. Для второго закона Ньютона согласно обозначениям (13.2) функция f есть измеряемое в опыте ускорение a тела под действием ускорителя, координата x задает величину обратную массе m тела, а координата ξ совпадает с силой F ускорителя.

Такой подход к канонической форме (13.1) оправдан тем, что она может быть наполнена и другим физическим содержанием, то есть к ней приводится не только второй закон Ньютона в механике, но и многие другие физические законы.

Рассмотрим, например, еще закон преломления в оптике для того случая, когда луч света падает из вакуума в среду, известная формула которого: $\sin\varphi/\sin\psi = n$ прочитывается следующим образом: *отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно показателю преломления среды.*

Легко понять, что в законе преломления, также как и во втором законе Ньютона, между собой связаны разные по своей природе физические величины. В самом деле, угол падения φ характеризует только падающий луч света. а показатель преломления n только среду. Но угол преломления ψ, непосредственно измеряемый в опыте, характеризует одновременно и падающий луч и оптическую среду, определяя их взаимодействие.

Подчеркнем отмеченное обстоятельство, введя множество падающих лучей света $\mathfrak{M} = \{i, j, k, ...\}$ и множество оптических сред $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$. Тогда для произвольного луча $i \in \mathfrak{M}$ с углом падения φ_i и произвольной среды $\alpha \in \mathfrak{N}$ с показателем преломления n_α формула закона преломления примет следующий вид:

$$\sin\varphi_i/\sin\psi_{i\alpha} = n_\alpha, \tag{13.3}$$

откуда видим, что величины φ, n и ψ имеют еще и различную математическую природу, так как первые две величины одноиндексные и характеризуют падающий луч и оптическую среду, а третья – двухиндексная и характеризует уже взаимодействие падающего луча и среды.

Ключевую роль в законе преломления (13.3) играет, очевидно, угол преломления и потому естественно переписать этот закон в феноменологически симметричной форме, содержащей только измеряемые в опыте углы преломления. Для этого, как и в случае второго закона Ньютона, необходимо взять по два элемента из каждого множества, то есть два луча i, j из множества падающих лучей $\mathfrak{M}$ и две среды α, β из множества оптических сред $\mathfrak{N}$. Между четырьмя возможными углами преломления $\psi_{i\alpha}, \psi_{i\beta}, \psi_{j\alpha}, \psi_{j\beta}$, используя формулу (13.3), легко находим связь

$$\sin\psi_{i\alpha}\sin\psi_{j\beta} - \sin\psi_{i\beta}\sin\psi_{j\alpha} = 0, \tag{13.3'}$$

уравнение которой задает закон преломления в феноменологически симметричной форме. Заметим, что два уравнения (13.3) и (13.3') закона преломления приводятся к мультипликативной канонической форме

(13.1), если положить

$$f = \sin\psi, \quad x = \sin\varphi, \quad \xi = 1/n. \tag{13.4}$$

Таким образом, каноническая форма (13.1) может быть наполнена различным физическим содержанием, если точно указать, из каких физических объектов состоят множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, а так же какой измерительной процедурой двум объектам из этих множеств сопоставляется число, характеризующее их взаимодействие. Математический объект, для которого выполняются уравнения (13.1), назван физической структурой, так как он имеет, как было показано выше, различные физические интерпретации. Говорят также (см. §8), что функция f задает на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *физическую структуру ранга (2,2)*, поскольку вторым уравнением (13.1) задается функциональная связь значений этой функции для любых двух элементов i, j из первого множества и любых двух элементов α, β из второго.

Закон Ома для замкнутой цепи: $I = \mathcal{E}/(R+r)$ подробно был рассмотрен во Введении (см. формулы (В.19) и (В.20)). Придадим ему каноническую форму, введя следующие удобные обозначения: $R = x$, $1/\mathcal{E} = \xi$, $r/\mathcal{E} = \eta$, $1/I = f$:

$$\left.\begin{aligned} & f = x\xi + \eta, \\ & \begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

где, например, $f(i\alpha) = x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha$.

Оказывается, что каноническая форма (13.5) может быть наполнена и другим физическим содержанием. Рассмотрим закон линейного теплового расширения твердых тел: $L = L_0(1+Et)$, где L – длина стержня при данной температуре t в градусах по Цельсию, L_0 – его длина при нулевой температуре и E – коэффициент теплового расширения. В этом законе, также как и в законе Ома, связаны между собой физически разнородные величины. Действительно, температура t характеризует тот термостат, в котором проводится измерение длины стержня, а начальная длина L_0 и коэффициент теплового расширения E характеризуют стержень. Длина L зависит и от стержня и от того термостата, в котором стержень находится.

Подчеркнем это различие, введя множество термостатов $\mathfrak{M} = \{i, j, k, ...\}$ и множество стержней $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$. Термостат i характеризуется своей температурой t_i, измеряемой термометром, а стержень α характеризуется своей начальной длиной $L_{0\alpha}$ при нулевой температуре и коэффициентом объемного расширения E_α, который в линейном приближении считается постоянным. Измеряемая же в опыте длина $L_{i\alpha}$ стержня α, находящегося в термостате i, должна быть двухиндексной величиной. Закон теплового расширения теперь запишется в таком виде:

$$L_{i\alpha} = L_{0\alpha}(1 + E_\alpha t_i), \tag{13.6}$$

в котором явно указана физическая и математическая разнородность величин, в него входящих.

Закон теплового расширения (13.6) можно записать в единой с законом Ома канонической форме (13.5), если ввести следующие обозначения: $t = x,\ EL_0 = \xi,\ L_0 = \eta,\ L = f$. Тогда феноменологически симметричной формой этого закона, как и закона Ома, будет, очевидно, функциональная связь, задаваемая вторым уравнением из (13.5).

Единая для двух различных физических законов каноническая форма (13.5) может быть освобождена от всякого физического содержания и рассмотрена как чисто математический объект, который, в силу его происхождения, назван *физической структурой ранга* (3,2), являющейся феноменологически симметричной геометрией двух множеств того же ранга, так как метрическая функция $f = x\xi + \eta$ двухточечная и ее значение $f(i\alpha)$ в некотором обобщенном смысле можно назвать расстоянием между точкой i и точкой α из разных множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Остановимся еще на интерпретациях *физической структуры ранга* (4,2), каноническая форма которой приведена в §9 (см. (9.4) и (9.4′)):

$$\left.\begin{aligned} & f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta), \\ & \begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

где, например, $f(i\alpha) = (x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha)/(x_i + \vartheta_\alpha)$. В справедливости уравнения, выражающего феноменологическую симметрию этой структуры, можно убедиться непосредственной подстановкой в него метрической функции, применяя метод разложения определителя по сумме в столбце. Или, проще, с помощью программных пакетов "Maple" и "Mathematica", позволяющих вычислять определители и ранги матриц.

Рассмотрим сначала оптику толстой линзы (см. [1], стр. 506-508). Ее формула внешне совпадает с формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \ ,$$

в которой a – расстояние вдоль главной оси от предмета до центра линзы, b – соответствующее расстояние для изображения и F – фокусное расстояние линзы. У толстой линзы величины a и b имеют несколько иной смысл. Дело в том, что они отсчитываются вдоль главной оси, но не до центра линзы, а до двух ее главных плоскостей. Пусть x – расстояние вдоль главной оси от предмета до ближайшей точки поверхности линзы, а λ – от нее до ближайшей главной плоскости. Тогда $a = x + \lambda$. Аналогично, пусть u – расстояние от изображения до точки другой поверхности линзы, а σ – от нее до ближайшей главной плоскости. Для наглядности на рисунке удобно изображать двояковыпуклую толстую линзу с $F > 0$, тогда все введенные величины будут положительными по знаку. Подставим приведенные выражения для величин a и b в формулу толстой линзы и разрешим ее относительно расстояния от линзы до изображения:

$$u = \frac{x(F - \sigma) + (\lambda + \sigma)F - \lambda\sigma}{x + \lambda - F} \ . \tag{13.8}$$

Рассмотрим теперь множество предметов $\mathfrak{M}$ и множество толстых линз $\mathfrak{N}$, с помощью которых строятся их изображения. Первое множество является одномерным многообразием, точки которого задаются координатой x, а второе – трехмерным, и его точки задаются координатами F, λ, σ. В законе (13.8), выведенном из формулы толстой линзы, связаны величины различной природы. Координата x характеризует предмет, координаты F, λ, σ характеризуют линзу, в то время как величина u характеризует "взаимодействие"предмета и линзы. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, подставим в закон (13.8) конкретные предмет $i \in \mathfrak{M}$ и линзу $\alpha \in \mathfrak{N}$:

$$u_{i\alpha} = \frac{x_i(F_\alpha - \sigma_\alpha) + (\lambda_\alpha + \sigma_\alpha)F_\alpha - \lambda_\alpha\sigma_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha - F_\alpha} \ .$$

Феноменологическая симметрия закона (13.8) обнаружится сразу, если его привести к канонической форме (13.7) следующими очевидными заменами координат: $x \to x, \ F - \sigma \to \xi, \ (\lambda + \sigma)F - \lambda\sigma \to \eta, \ \lambda - F \to \vartheta$ и переменой обозначения измеряемой величины: $u \to f$. Тогда феноменологически симметричной формой закона (13.8) для толстой линзы будет уравнение из (13.7).

Геометрическая интерпретация физической структуры ранга (4,2) строится следующим образом (см. [1], стр. 501-502). Пусть $\mathfrak{M}$ – однопараметрическое множество прямых на плоскости Евклида, проходящих через начало координат. Каждая такая прямая однозначно определяется углом φ между ней и осью абцисс, причем $-\pi/2 < \varphi \leq +\pi/2$. Вторым пусть будет трехпараметрическое множество $\mathfrak{N}$ прямых, проходящих через точки (a, b) под различными углами θ к оси абсцисс, причем также $-\pi/2 < \theta \leq +\pi/2$. Двум прямым из этих множеств сопоставим величину, задаваемую выражением

$$f = \frac{-\dfrac{a}{\cos\theta}\mathrm{tg}\varphi + \dfrac{b}{\cos\theta}}{\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\theta},$$

модуль которой равен расстоянию от точки их пересечения до точки (a, b). Вводя замены координат: $\mathrm{tg}\varphi \to x, \ -a/\cos\theta \to \xi, \ \ b/\cos\theta \to \eta, \ -\mathrm{tg}\theta \to \vartheta$, получаем каноническую форму метрической функции (13.7), задающей на одномерном и трехмерном многообразиях феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга (4,2).

§14. Нерешенные задачи в теории физических структур

Целью написания данного параграфа является краткий обзор математических задач теории физических структур в надежде, что некоторые из них могут заинтересовать читателя.

Феноменологическая симметрия физической структуры согласно теореме 3 из §8 эквивалентна ее групповой симметрии в следующем смысле: невырожденная s-компонентная метрическая функция f допускает smn-мерную группу движений в том и только в том случае, если она задает на sm- и sn-мерных многообразиях физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$. А это означает, что задача решения функционального уравнения (12.2), в котором неизвестными являются метрическая функция f и функция Φ, эквивалентна задаче решения функционального уравнения (12.11), в котором неизвестными являются та же метрическая функция f и действия λ, σ группы Ли в многообразиях.

Заметим, что методы решения уравнения (12.2) совершенно отличны от методов решения уравнения (12.11). Но поскольку, в конечном счете, решается одна и та же задача классификации физических структур, эти методы дополняют и взаимозаменяют друг друга, делая полученный классификационный результат более достоверным. Одни метрические функции найдены только как решения функционального уравнения (12.2), другие – только как решения функционального уравнения (12.11). Есть и такие, которые были найдены решением обоих функциональных уравнений. Однако полная классификация полиметрических физических структур, исключая однометрические (см. §9), еще не построена. Поэтому имеет смысл представить кратко в виде таблицы (см. ниже) обзор всех классификационных задач для физических структур на двух множествах. Их решение имеет смысл не только с математической точки зрения, но и с физической, так как результатом являются возможные формы для фундаментальных физических законов. Автор надеется, что кому-то из читателей удастся не только плодотворно объединить известные методы, но и найти такие новые, которые позволят продолжить и завершить классификацию полиметрических физических структур произвольного ранга.

Классификация полиметрических физических структур									
№	s	m	n	sm	sn	$(n+1, m+1)$	smn	реш.	ист.
1	1	$\geqslant 1$	$\geqslant m$	m	n	$(n+1, m+1)$	mn	+	§9
2	2	1	$\geqslant 1$	1	$2n$	$(n+1, 2)$	$2n$	+	§10
3	2	$\geqslant 2$	$\geqslant m$	$2m$	$2n$	$(n+1, m+1)$	$2mn$	–	–
4	3	1	1	3	3	(2,2)	3	+	§10
5	3	1	$\geqslant 2$	3	$3n$	$(n+1, 2)$	$3n$	–	–
6	3	$\geqslant 2$	$\geqslant m$	$3m$	$3n$	$(n+1, m+1)$	$3mn$	–	–
7	4	1	1	4	4	(2,2)	4	+	§10
8	4	1	$\geqslant 2$	4	$4n$	$(n+1, 2)$	$4n$	–	–
9	4	$\geqslant 2$	$\geqslant m$	$4m$	$4n$	$(n+1, m+1)$	$4mn$	–	–
10	$\geqslant 5$	$\geqslant 1$	$\geqslant m$	$\geqslant 5m$	$\geqslant 5n$	$(n+1, m+1)$	$\geqslant 5mn$	–	–

Напомним, что $s \geq 1$ – число компонент невырожденной метрической функции $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающей на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n+1, m+1)$, наделенную групповой симметрией степени smn. Условие $n \geq m$ введено с целью уменьшить число строк в таблице, так как классификационный результат симметричен относительно перестановки натуральных чисел m и n. В предпоследнем столбце таблицы знаками плюс и минус отмечено, что данная задача решена (+) или не решена (−). В последнем столбце таблицы указан номер параграфа настоящей монографии, в котором приведена классификация и описаны методы ее построения или указаны источники, в которых с ними можно познакомиться более детально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, установлено, что бинарные феноменологически симметричные геометрии одного и двух множеств наделены групповой симметрией и, кроме того, содержательны в физическом и математическом смыслах. Поэтому основной задачей теории физических структур (ТФС) является их полная классификация. Ее решение еще далеко от завершения, что дает возможность каждому исследователю, имеющему творческие способности, применить их в новой для себя сфере научной деятельности.

Литература

1. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М.: Доминико, 2004.

2. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР, 1970, Т.193, №5, С.985-987.

3. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангеская программа") // Об основаниях геометрии. М., 1956, С.402-434.

4. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956. С.366-388.

5. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур // Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск: НГУ, 1968, С.175-226.

6. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР, 1981, Т.260, №4, С.803-805 (Mikhaylitchenko G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 16 novembre 1981, T.293. Serie 1. P.529-531).

7. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988, Вып. 125, С.90-103.

8. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956, С.388-398.

9. Кулаков Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа // Докл. АН СССР, 1971, Т.201, №3. С.570-572.

10. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: НГУ, 2001.

11. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. I // Сиб. мат. журн., 1998, Т.39, №2, С.377-395.

12. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

13. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

14. Кыров В.А. Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий // Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: НГУ, 2001, С.116-143.

15. Лев В.Х. Трехмерные и четырехмерные пространства в теории физических структур. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Минск, 1990.

16. Lie S., Engel F. Theorie der Transformations gruppen, Bd. 3, Leipzig, 1893.

17. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства // Изв. вузов. Математика, 1997, №9(424), С.41-48.

18. Кыров В.А. Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп Ли преобразований пространства R^4 и их двухточечных инвариантов // Изв. вузов. Математика, 2008, №6, С.29-42.

19. Михайличенко Г.Г. К вопросу о симметрии расстояния в геометрии // Изв. вузов. Математика, 1994, №4(383), С.21-23.

20. Михайличенко Г.Г. Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства // Изв. вузов. Математика, 1991, №6, С.28-35.

21. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Сиб. мат. журн., 1984, Т.25, №5, С.99-113.

22. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии II // Наука, культура, образование, 2001, №8/9, С.7-16.

23. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. Барнаул: БГПУ, 2004.

24. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, 2003.

25. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры и комплексные числа // Докл. АН СССР, 1991, Т.321, №4, С.677-680.

26. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга $(n+1,2)$ // Сиб. мат. журн., 1993. Т.34, №3, С.132–143.

27. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий, М.: Издательство Московского университета, 1998.

28. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР, 1972, Т.206, №5, С.1056–1058.

29. Михайличенко Г.Г. Об одном функциональном уравнении с дву-

хиндексными переменными // Укр. мат. журн., 1973, Т.25, №5, С.589–598.

30. Михайличенко Г.Г. Об одной задаче в теории физических структур // Сиб. мат. журн., 1977, Т.18, №6, С.1342–1355.

31. Михайличенко Г.Г. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997.

32. Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М. Геометрия двух множеств. *Основы и результаты.* Saarbrucken: LAMBERT Academic Publishing, 2011.

33. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (3,2) // Укр. мат. журн., 1970, Т.22, №6, С.837–841.

34. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (2,2,2) // Изв. вузов. Математика, 1976, №8(171), С.60–67.

35. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур) // Докл. АН СССР, 1985, Т.24, №1, С.39-41.

36. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства произвольных физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ, 1990, Вып. 135. С.27-39.

Груда и физическая структура ранга (2,2)

А.Н. Бородин

Хорошо известно [1], что *грудой* называется алгебра G с тернарной операцией $\varphi : G^3 \to G$, удовлетворяющей следующим тождествам:

$$\varphi(\varphi(x,y,z),u,v) = \varphi(x,\varphi(u,z,y),v) = \varphi(x,y,\varphi(z,u,v)), \qquad (1)$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \qquad (2)$$

В среднем звене тождеств (1) имеется не вполне понятная перестановка элементов y и u кортежа $< xyzuv >$. Оказывается, что оно в определении груды может быть опущено.

Лемма 1. *Тождества* $(1), (2)$*, которым удовлетворяет тернарная операция* φ*, эквивалентны тождествам*

$$\varphi(\varphi(x,y,z),u,v) = \varphi(x,y,\varphi(z,u,v)), \qquad (3)$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \qquad (4)$$

Из леммы 1 следует, что определение груды тождествами (1),(2) по лекциям А.Г.Куроша [1] эквивалентно ее определению тождествами (3),(4).

Определение 1. *Алгебра G с тернарной операцией φ называется грудой, если эта операция удовлетворяет тождествам* $(3), (4)$*.*

Лемма 2. *Тождества* $(3), (4)$*, которым удовлетворяет тернарная операция* φ*, эквивалентны тождествам*

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,s),s,z) = \varphi(x,s,\varphi(s,y,z)), \qquad (5)$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \qquad (6)$$

Детальные доказательства леммы 2 и предыдущей леммы 1 можно найти в работе автора [2].

Определение 2. *Алгебра G с тернарной операцией φ называется грудой, если эта операция удовлетворяет тождествам* $(5),(6)$.

Лемма 3. *Определение* 1 *и определение* 2 *груды, как алгебры G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей тождествам* $(3),(4)$ *и тождествам* $(5),(6)$ *соответственно, эквивалентны.*

Определение груды тождествами (5),(6) представляется более естественным, так как они являются следствием принципа феноменологической симметрии в теории физических структур [3].

Пусть имеются три множества $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ и G произвольной природы, а также функция $f:\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to G$, сопоставляющая каждой паре $<i\alpha>$ из прямого произведения $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ некоторый элемент $f(i\alpha)$ из множества G. В отношении функции f будем предполагать выполнение следующего условия:

A. *Для любых элементов $\beta\in\mathfrak{N}$ и $j\in\mathfrak{M}$ отображения $\mathfrak{M}\times\{\beta\}\to G$ и $\{j\}\times\mathfrak{N}\to G$ сюръективны.*

Введем еще функцию $F:\mathfrak{M}^2\times\mathfrak{N}^2\to G^4$, сопоставляя кортежу $<ij,\alpha\beta>\in\mathfrak{M}^2\times\mathfrak{N}^2$ точку $<f(i\alpha),f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta)>\in G^4$, координаты которой в G^4 есть образы соответствующих пар, упорядоченные по исходному кортежу.

Определение 3. *Будем говорить, что функция $f:\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to G$, удовлетворяющая условию* **A**, *задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(2,2)$, если существует такая тернарная алгебраическая операция $\varphi:G^3\to G$, для которой выполняется следующее соотношение:*

$$f(i\alpha)=\varphi(f(i\beta),f(j\beta),f(j\alpha)). \tag{7}$$

Соотношение (7), справедливое для любого кортежа $<ij,\alpha\beta>\in\mathfrak{M}^2\times\mathfrak{N}^2$, выражает содержание *принципа феноменологической симметрии* в теории физических структур. Оно как функциональное уравнение налагает на исходную функцию f достаточно сильное ограничение.

Теорема 1. *Тернарная алгебраическая операция* φ *из определения* 3 *физической структуры ранга* $(2,2)$, *устанавливающая феноменологически симметричное соотношение* (7), *задает на множестве* G *груду.*

Положим в соотношении (7) $i = j:\ f(i\alpha) = \varphi(f(i\beta), f(i\beta), f(i\alpha))$ и $\alpha = \beta:\ f(i\alpha) = \varphi(f(i\alpha), f(j\alpha), f(j\alpha))$. В соответствии с условием **A** пары переменных $f(i\alpha), f(i\beta)$ и $f(i\alpha), f(j\alpha)$ независимы. Вводя для них обозначение $x = f(i\alpha),\ y = f(i\beta)$ в первом случае и $x = f(i\alpha),\ y = f(j\alpha)$ – во втором, получаем тождества (6). Возьмем в множестве $\mathfrak{M}$ элемент k и запишем соотношение (7) для кортежей $< ik, \alpha\beta >$ и $< jk, \alpha\beta >$:

$$\left.\begin{aligned} f(i\alpha) = \varphi(f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha)),\\ f(j\alpha) = \varphi(f(j\beta), f(k\beta), f(k\alpha)).\end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Из трех соотношений $(7), (7')$ легко устанавливаем равенство

$$\varphi(f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha)) = \varphi(f(i\beta), f(j\beta), \varphi(f(j\beta), f(k\beta), f(k\alpha))),$$

с независимыми по условию **A** переменными $f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha), f(j\beta)$. Вводя для них обозначение $x = f(i\beta),\ y = f(k\beta),\ z = f(k\alpha),\ s = f(j\beta)$, получаем одно из тождеств (5). Возьмем, далее, элемент γ из множества $\mathfrak{N}$ и запишем соотношение (7) для кортежей $< ij, \alpha\gamma >$ и $< ij, \beta\gamma >$:

$$\left.\begin{aligned} f(i\alpha) = \varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha)),\\ f(i\beta) = \varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\beta)).\end{aligned}\right\} \qquad (7'')$$

Из трех соотношений $(7), (7'')$ следует равенство

$$\varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha)) = \varphi(\varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\beta)), f(j\beta), f(j\alpha)),$$

с независимыми по условию **A** переменными $f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha), f(j\beta)$. Вводя для них обозначение $x = f(i\gamma),\ y = f(j\gamma),\ z = f(j\alpha),\ s = f(j\beta)$, приходим к другому из тождеств (5). Таким образом, тождества (5) и (6), входящие в определение 2 груды, установлены, что и завершает доказательство теоремы 1.

Обратим теперь внимание на различную роль тождеств (5) и (6). Первые из них явно основополагающие, имеющие характер функциональных уравнений, определяющих груду, вторые же отражают ее частные свойства. Поэтому имеет смысл в новом определении груды сохранить тождества (5), а тождества (6) заменить некоторым более естественным условием, налагаемым на тернарную операцию φ. Это условие можно получить из того же феноменологически симметричного соотношения (7) для физической структуры ранга (2,2).

Лемма 4. *Тернарная алгебраическая операция* φ *из определения* 3 *физической структуры ранга* $(2,2)$ *удовлетворяет следующему необходимому условию:*

B. *Для любых двух элементов* $q, h \in G$ *отображения* $x \mapsto \varphi(x, q, h)$, $x \mapsto \varphi(q, x, h)$, $x \mapsto \varphi(q, h, x)$ *сюръективны.*

Рассмотрим сначала первое отображение $x \mapsto \varphi(x, q, h)$. По условию **A** найдется такая пара $< j\alpha >$, для которой $f(j\alpha) = h$. Далее, по тому же условию **A** для точек $j \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ предыдущей пары найдутся такие точки $i \in \mathfrak{M}$ и $\beta \in \mathfrak{N}$, для которых $f(j\beta) = q$ и $f(i\alpha) = p$, где p – произвольный элемент из G. Но тогда, полагая $x = f(i\beta)$, по соотношению (7) получаем $p = \varphi(x, q, h)$. То есть у произвольного элемента $p \in G$ при отображении $x \mapsto \varphi(x, q, h)$ имеется хотя бы один прообраз, что и доказывает сюръективность этого отображения. Сюръективность отображений $x \mapsto \varphi(q, x, h)$ и $x \mapsto \varphi(q, h, x)$ устанавливается совершенно аналогично. Лемма 4 доказана.

Условие **B** имеет более привычную для алгебраистов эквивалентную форму:

B′. *Для любых трех элементов* p, q, h *из множества* G *каждое из уравнений* $p = \varphi(x, q, h)$, $p = \varphi(q, x, h)$ *и* $p = \varphi(q, h, x)$ *имеет решение относительно* x.

Заменим не совсем естественные тождества (6) в определении (2) груды более естественным условием **B**, которое также является следствием феноменологической симметрии.

Определение 4. Алгебра G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей условию $\mathbf{B}$ (или эквивалентному ему условию $\mathbf{B}'$), называется грудой, если для нее выполняются следующие два тождества:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x,y,z)=\varphi(\varphi(x,y,s),s,z), \\ \varphi(x,y,z)=\varphi(x,s,\varphi(s,y,z)). \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Лемма 5. *Определение* 2 *и определение* 4 *груды как алгебры* G *с тернарной операцией* φ*, удовлетворяющей четырем тождествам (5),(6) или при условии* $\mathbf{B}$ *двум тождествам* (8) *соответственно, эквивалентны.*

Тождества (5) и (8) совпадают, поэтому сначала из условия $\mathbf{B}$ и тождеств (8) получим тождества (6). Запишем первое и второе из тождеств (8) для кортежей $< xyyy >$ и $< yyxy >$ соответственно: $\varphi(x,y,y) = \varphi(\varphi(x,y,y),y,y)$, $\varphi(y,y,x)=\varphi(y,y,\varphi(y,y,x))$. По условию $\mathbf{B}$ отображения $x\mapsto\varphi(x,y,y)$ и $x\mapsto\varphi(y,y,x)$ сюръективны. Введя соответствующие переобозначения элементов $\varphi(x,y,y)$ и $\varphi(y,y,x)$ из G, получаем тождества (6). Покажем теперь, что условие $\mathbf{B}$ есть следствие тождеств (5),(6). Предположим противное, то есть что найдутся такие три элемента p,q,h из множества G, что одно из трех уравнений условия $\mathbf{B}'$ не имеет решения. Без ограничения общности можно предположить, что не имеет решения уравнение $p=\varphi(x,q,h)$. Запишем первое из тождеств (5) для кортежа $< phhq >$: $\varphi(p,h,h)=\varphi(\varphi(p,h,q),q,h)$, откуда, используя одно из тождеств (6), получаем: $p=\varphi(\varphi(p,h,q),q,h)$. Таким образом, уравнение $p=\varphi(x,q,h)$ имеет решение $x=\varphi(p,h,q)$, что противоречит сделанному предположению. Два других уравнения из условия $\mathbf{B}'$ исследуются аналогично. Устанавливаемые при этом противоречия и показывают, что условие $\mathbf{B}'$ (или эквивалентное ему условие $\mathbf{B}$) является следствием тождеств (5),(6). Лемма 5 доказана.

Условие $\mathbf{B}$, на первый взгляд может показаться слишком сильным, тем более, что в доказательстве леммы 5 при получении тождеств (6) условие $\mathbf{B}$ использовалось не в полном объеме, поскольку имела значение только сюръективность отображений $x \mapsto \varphi(x, y, y)$ и $x \mapsto \varphi(y, y, x)$ для произвольного элемента y. Сформулируем это более слабое условие:

C. *Для любого элемента $q \in G$ сюръективны отображения, задаваемые функциями $x \mapsto \varphi(x, q, q)$ и $x \mapsto \varphi(q, q, x)$.*

Эквивалентный вариант этого условия будет следующий:

C′. *Для любых двух элементов $p, q \in G$ каждое из уравнений $p = \varphi(x, q, q)$ и $p = \varphi(q, q, x)$ имеет решение относительно $x \in G$.*

Заметим, однако, что слабое условие **C** кажется менее естественным, чем более сильное условие **B**.

Определение 5. *Алгебра G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей условию **C** (или эквивалентному ему условию **C′**) и тождествам (8), называется грудой.*

Лемма 6. *Определение* 2 *и определение* 5 *груды как алгебры G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей четырем тождествам* (5), (6) *или при условии* **C** *двум тождествам* (8) *эквивалентны.*

Доказательство леммы 6 в первой его части получения тождеств (6) повторяет соответствующую часть доказательства леммы 5, а сюръективность отображений $x \mapsto \varphi(x, q, q)$ и $x \mapsto \varphi(q, q, x)$, требуемая условием **C**, есть непосредственное следствие тождеств (6).

Теорема 2. *Все четыре определения груды, а именно, определения* $1, 2, 4, 5$ *эквивалентны между собой.*

Теорема 2 является совокупным следствием лемм 3, 5, 6, устанавливающих транзитивную эквивалентность пар определений 1 и 2, 2 и 4, 2 и 5.

Автор выражает благодарность проф. Г.Г.Михайличенко и участникам научного семинара ФМФ ГАГУ по теории физических структур за

поддержку данного исследования и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года, М., 1974.

2. Бородин А.Н. Груда и группа как физическая структура // Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, Горно-Алтайск: ГАГУ, 2003, С.195-203.

3. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М.: Доминико, 2004.

Сведения об авторе

Михайличенко Геннадий Григорьевич

1942 года рождения. В 1967 окончил физический факультет Новосибирского университета, в 1970 – аспирантуру при нем. До 1994 – доцент кафедры теоретической физики Новосибирского педуниверситета, с 1994 – профессор кафедры физики Горно-Алтайского университета. Имеет ученую степень доктора физико-математических наук (с 1994) и ученое звание профессора (с 2000). Автор более шестидесяти работ и пяти монографий. Настоящая шестая его монография "Математические основы и результаты теории физических структур" подводит итог научной деятельности ее автора.

Научное издание

Михайличенко Геннадий Григорьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Издательство Горно-Алтайского государственного университета
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1

Подписано в печать 05.06.2012 г. Формат $60 \times 84/16$.
Бумага для множительных аппаратов. Печать ризо.
Печ. л. 9,12. Тираж 60 экз.
Заказ № 83.

Отпечатано полиграфическим отделом
Горно-Алтайского госуниверситета
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.
Заказ № 83.