5) *коэффициенты* $\widetilde{A}_k(x)$ *принадлежат классу* $C^{(r)}(G)$, *где* $r = 2\widetilde{p}(M+1) - 1$, *где* M – *наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству* $M > (s + s_1)/j + \max(\widetilde{m} - 2, 0)$.

Тогда существует линейное преобразование, переводящее систему $\{u_n\}$ *в такую систему* $\{\widetilde{u}_n\}$, *что для любой функции* $f(x) \in L_2(G)$ *и любого компакта* K *области* G *имеет место равенство*

$$\lim_{t \to +0} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\lambda_n)^j t}(f, \widetilde{v}_n)_G \sum_{\substack{k \geq 0 \\ \widetilde{u}_{n-k} \sim \widetilde{u}_n}} \frac{t^k}{k!}\widetilde{u}_{n-k}(x) - f(x)\Big\|_{L_2(K)} = 0$$

($\{\widetilde{v}_n\}$ – *система функций, биортогонально сопряженная к* $\{\widetilde{u}_n\}$ *в* $L_2(G)$).

Замечание. В данной ситуации справедливо следствие, аналогичное следствию к теореме 3.

Теоремы 1–3 легко переносятся на случай сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений.

Автор выражает глубокую благодарность проф. В.А. Ильину за постановку задачи и руководство работой и проф. Е.И. Моисееву за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
7 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 6, с. 980–1009. 2. *Ильин В.А.* – Там же, № 5, с. 771–794. 3. *Ильин В.А.* – Там же, 1982, т. 18, № 1, с. 30–37. 4. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

УДК 513.811 МАТЕМАТИКА

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

О ГРУППОВОЙ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЯХ В ГЕОМЕТРИИ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 1 III 1982)

Геометрия метрических пространств дает пример бинарной структуры на одном множестве $\mathfrak{M}$. Задание метрики, понимаемой в самом общем смысле как некоторая функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, определяет геометрию пространства $\mathfrak{M}$. По известной метрике можно найти полную группу преобразований $\mathfrak{M}$, относительно которой метрика является двухточечным инвариантом. Групповая же симметрия лежит в основе "Эрлангенской программы" Клейна (1872), согласно которой геометрия есть теория инвариантов данной группы преобразований $\mathfrak{M}$ [1]. Если двухточечный инвариант в некотором смысле единствен, то метрическое и групповое задание геометрии будут эквивалентны. С другой стороны, в геометрии проявляется так называемая феноменологическая симметрия, на которую впервые особое внимание обратил Ю.И. Кулаков [2]. Сущность феноменологической симметрии, ставшей основным принципом теории физических структур Ю.И. Кулакова [3], состоит в данном случае в том, что в пространстве между всеми взаимными расстояниями для определенного числа произвольных точек имеется функциональная связь. В данной работе устанавливается, что в n-мерной геометрии расстояний групповая и феноменологическая симметрии эквивалентны (см. теорему 3).

Г. Гельмгольц в работе "О фактах, лежащих в основании геометрии" [4] высказал предположение, что метрика n-мерного пространства не может быть произвольной, если в пространстве твердые тела движутся с $n(n+1)/2$ степенями свободы. Но тогда между всеми взаимными расстояниями для произвольных $n+2$ точек твердого тела должна быть связь, так как при отсутствии такой связи число степеней свободы $(n+2)$-точечного жесткого симплекса с общим расположением точек уменьшится ровно на единицу. Поэтому мы можем предположить, что феноменологическая симметрия n-мерного пространства невозможна при произвольной метрике. Для одномерного и двумерного случаев это показано в работах автора [5, 6].

От нестрогих соображений, приведенных выше, перейдем к точным формулировкам.

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$ произвольной природы, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, и функция a: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to R$, сопоставляющая упорядоченной паре $\langle ij\rangle\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ некоторое вещественное число $a(ij)\in R$. Заметим, что в некоторых случаях область определения функции a, которую обозначим $\mathfrak{S}_a$, может не совпадать со всем прямым произведением $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$, т.е. не любой паре $\langle ij\rangle\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ сопоставляется число. Однако в дальнейшем мы не будем оговаривать это обстоятельство, подразумевая, что пара $\langle ij\rangle$ всегда берется из области $\mathfrak{S}_a$. Функцию a: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to R$ можно рассматривать как своего рода метрику в $\mathfrak{M}$, хотя мы и не будем требовать выполнения обычных аксиом метрики: симметрии, неравенства треугольника и т.д. Мы будем предполагать, что выполняется условие

I. Существует такое конечное базисное множество $\mathfrak{M}_B$, что если две произвольные точки $i, j\in\mathfrak{M}$ различны, то для некоторого $k\in\mathfrak{M}_B$ либо $a(ik)\neq a(jk)$, либо $a(ki)\neq a(kj)$.

Смысл условия I состоит прежде всего в том, что рассматриваются только те свойства пространства $\mathfrak{M}$, которые выражаются посредством функции a. Конечность базисного множества $\mathfrak{M}_B$ указывает в некотором смысле на конечномерность пространства $\mathfrak{M}$. И, наконец, если множество $\mathfrak{M}$ содержит более двух различных точек, то по условию I для любой точки $i\in\mathfrak{M}$ найдется такое $k\in\mathfrak{M}_B$, что либо пара $\langle ik\rangle$, либо пара $\langle ki\rangle$ принадлежат области определения функции a.

О п р е д е л е н и е 1. Множество $\tilde{\mathfrak{M}}\subset\mathfrak{M}$ называется о г р а н и ч е н н ы м, если ограничены области значений функции a: $\tilde{\mathfrak{M}}\times\mathfrak{M}_B\to R$ и a: $\mathfrak{M}_B\times\tilde{\mathfrak{M}}\to R$.

Ясно, что всякое конечное множество ограничено и объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено.

На множестве $\mathfrak{M}$ естественным образом можно ввести топологию. Пусть $i\in\mathfrak{M}$ – произвольная точка, $\tilde{\mathfrak{M}}$ – ограниченное множество, содержащее базис $\mathfrak{M}_B$, и $\epsilon>0$. Обозначим через $P(i,\tilde{\mathfrak{M}},\epsilon)$ множество всех тех точек $i'\in\mathfrak{M}$, для которых имеют место неравенства $|a(i'k)-a(ik)|<\epsilon$ и $|a(ki')-a(ki)|<\epsilon$ при любом $k\in\tilde{\mathfrak{M}}$ таком, что либо пара $\langle ik\rangle$, либо пара $\langle ki\rangle$ принадлежит области $\mathfrak{S}_a\subset\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. Семейство всех $P(i,\tilde{\mathfrak{M}},\epsilon)$ для произвольных ограниченных множеств $\tilde{\mathfrak{M}}\supset\mathfrak{M}_B$ и любых значений положительного числа ϵ принимается за фундаментальную систему окрестностей точки $i\in\mathfrak{M}$. Заметим, что окрестность $P(i,\tilde{\mathfrak{M}},\epsilon)$ есть ограниченное множество, так как $\tilde{\mathfrak{M}}\supset\mathfrak{M}_B$. Произвольной окрестностью $P(i)$ точки i будем считать всякое подмножество из $\mathfrak{M}$, содержащее некоторую окрестность этой точки из фундаментальной системы.

Л е м м а 1. *Введенная для каждой точки $i\in\mathfrak{M}$ система множеств $P(i)$ удовлетворяет аксиомам системы окрестностей и определяет на $\mathfrak{M}$ единственную отделимую в смысле Хаусдорфа топологическую структуру.*

В дальнейшем под $P(i)$ удобно понимать открытую окрестность точки $i \in \mathfrak{M}$. Топология в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ определяется обычным образом как произведение топологий пространств сомножителей. Естественно предположить, что область определения функции a открыта относительно $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, т.е. пара $\langle ij \rangle$ принадлежит $\mathfrak{S}_a$ вместе с некоторой своей окрестностью $P(i) \times P(j)$.

Л е м м а 2. *Функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ непрерывна в топологии прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.*

Заметим, что если функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ удовлетворяет аксиомам обычной метрики, то построенная в $\mathfrak{M}$ топология совпадает с естественной топологией метрического пространства и является слабейшей топологией, при которой эта метрика непрерывна.

Пусть $n \geqslant 1$ – произвольное целое число. Для некоторого кортежа $\langle p \ldots q \rangle$ длины n построим непрерывное отображение $a[p \ldots q]$: $\mathfrak{M} \to R^n$, сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ совокупность n-чисел $(a(ip), \ldots, a(iq)) \in R^n$. Второе условие определяет размерность множества $\mathfrak{M}$.

II. Для каждой точки $i \in \mathfrak{M}$ найдется такой кортеж $\langle p \ldots q \rangle$ длины n, что для некоторой окрестности $P(i)$ отображение $a[p \ldots q]$: $P(i) \to R^n$ является локальным гомеоморфизмом.

Согласно условию II множество $\mathfrak{M}$ является топологическим многообразием размерности n, в некоторой окрестности каждой точки которого можно ввести локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$, полагая, например, $x^1(i) = a(ip), \ldots, x^n(i) = a(iq)$. Для исходной функции a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ в некоторой окрестности $P(i) \times P(j)$ произвольной пары $\langle ij \rangle \in \mathfrak{S}_a$ получаем локальное координатное представление

(1) $\quad a(ij) = a(x^1(i), \ldots, x^n(i); x^1(j), \ldots, x^n(j)),$

свойства которого задаются третьим условием.

III. Функция $a(ij) = a(x^1(i), \ldots, x^n(i);\ x^1(j), \ldots, x^n(j))$ достаточно гладкая и локальные координаты входят в нее существенным образом.

Достаточная гладкость функции $a(ij)$ подразумевает наличие непрерывных производных достаточно высокого порядка. Существенная зависимость от локальных координат предполагает, что никакая невырожденная замена не приведет к уменьшению их числа.

Пусть далее $m = n + 2 \geqslant 3$ и $\mathfrak{M}^m$ – m-кратное прямое произведение множества $\mathfrak{M}$ на себя, элементами которого являются кортежи длины m. Построим отображение A: $\mathfrak{M}^m \to R^{m(m-1)/2}$, сопоставляя кортежу $\langle ijk \ldots vw \rangle \in \mathfrak{M}^m$ длины $m = n + 2$ совокупность $m(m-1)/2$ чисел $(a(ij), a(ik), \ldots, a(vw))$, соответствующих всем упорядоченным парам в кортеже и рассматриваемых как координаты некоторой точки в пространстве $R^{m(m-1)/2}$. Обозначим область определения построенного отображения через $\mathfrak{S}_A$, которая, очевидно, открыта в $\mathfrak{M}^m$. Естественно предположить, что $\mathfrak{S}_A$ непусто и что любая пара из $\mathfrak{S}_a$ принадлежит некоторому кортежу из $\mathfrak{S}_A$. Окрестность кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ в $\mathfrak{M}^m$ будем обозначать $P(\langle ijk \ldots vw \rangle)$.

Л е м м а 3. *Отображение A: $\mathfrak{M}^m \to R^{m(m-1)/2}$ непрерывно в топологии прямого произведения $\mathfrak{M}^m$.*

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что ф у н к ц и я a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ з а д а е т н а м н о ж е с т в е $\mathfrak{M}$ ф е н о м е н о л о г и ч е с к и с и м м е т р и ч н у ю n-м е р н у ю г е о м е т р и ю р а с с т о я н и й р а н г а $m = n + 2$, если, кроме условий I, II, III, дополнительно имеет место следующая а к с и о м а:

IV. Для каждого кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ длины $m = n + 2$ из плотного в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^m$ множества и некоторой его окрестности $P(\langle ijk \ldots vw \rangle)$ существует такая достаточно гладкая функция Φ: $\mathfrak{E} \to R$, определенная в некоторой области $\mathfrak{E} \subset R^{m(m-1)/2}$, что $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$ в точке $A(\langle ijk \ldots vw \rangle) \in \mathfrak{E}$ и множество $A(P(\langle ijk \ldots$

$\ldots vw\rangle))$ совпадает с множеством нулей функции Φ, т.е.

(2) $$\Phi(a(ij), a(ik), \ldots, a(vw)) = 0$$

для всякого кортежа $P(\langle ijk \ldots vw\rangle)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии в общей схеме теории физических структур, предложенной Ю.И. Кулаковым [3] как средство классификации физических законов. Эта аксиома выражает собой требование, чтобы $m(m-1)/2$ упорядоченных взаимных расстояний между точками любого кортежа из $P(\langle ijk \ldots vw\rangle)$ были связаны нетривиальным образом, т.е. удовлетворяли некоторому уравнению (2), задающему аналитическое выражение физического закона. Требование $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ в точке $A(\langle ijk \ldots vw\rangle)$, входящее в аксиому IV, означает, грубо говоря, что в $\mathfrak{M}^m$ существуют кортежи $\langle ijk \ldots vw\rangle$, находящиеся в общем расположении, т.е. отображение A: $\mathfrak{M}^m \to$ $\to R^{m(m-1)/2}$ в определенном смысле не вырождено.

Лемма 4. *Множество кортежей $\langle ijk \ldots vw\rangle$ длины m, для которых в соответствующей точке $A(\langle ijk \ldots vw\rangle)$ все производные первого порядка функции Φ отличны от нуля, плотно в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^m$.*

Используя представление (1), запишем локальное координатное задание построенного отображения $A: \mathfrak{M}^m \to R^{m(m-1)/2}$:

(3) $$\begin{aligned} a(ij) &= a(x^1(i), \ldots, x^n(i); x^1(j), \ldots, x^n(j)), \\ a(ik) &= a(x^1(i), \ldots, x^n(i); x^1(k), \ldots, x^n(k)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a(vw) &= a(x^1(v), \ldots, x^n(v); x^1(w), \ldots, x^n(w)). \end{aligned}$$

Задание (3) отображения A есть задание системы $m(m-1)/2$ дифференцируемых функций $a(ij)$, $a(ik)$, $\ldots$, $a(vw)$, специальным и существенным образом зависящих от mn локальных координат $x^1(i), \ldots, x^n(i), \ldots, x^1(w), \ldots, x^n(w)$. Поскольку $m = n + 2 \geqslant 3$, то $m(m-1)/2 \leqslant mn$, т.е. число функций меньше числа координат и потому связь (2) есть нетривиальный факт. Матрица Якоби системы функций (3) является функциональной матрицей отображения A и ее ранг называется рангом этого отображения.

Теорема 1. *Для того чтобы функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ задавала на множестве $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $m = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения A: $\mathfrak{M}^m \to R^{m(m-1)/2}$ был равен $m(m-1)/2 - 1$ на плотном в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^m$ множестве.*

Преобразованием множества $\mathfrak{M}$, как известно, называется взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{M}$ на себя. Некоторое преобразование назовем движением (изометрией), если оно сохраняет исходную функцию (метрику) a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$. Совокупность всех преобразований, относительно которых метрика a является двухточечным инвариантом, есть, очевидно, группа. Координатное задание дифференцируемого локального преобразования множества $\mathfrak{M}$ можно записать в виде

(4) $$x'^{\mu} = \lambda^{\mu}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Инвариантность метрики (1) относительно преобразований (4) означает, что имеет место уравнение

(5) $$\begin{aligned} &a(x^1(i), \ldots, x^n(i); x^1(j), \ldots, x^n(j)) = \\ &= a(\lambda^1(i), \ldots, \lambda^n(i); \lambda^1(j), \ldots, \lambda^n(j)), \end{aligned}$$

где, например, $\lambda^{\mu}(i) = \lambda^{\mu}(x^1(i), x^2(i), \ldots, x^n(i))$. По известной функции (1), решая уравнение (5), можно найти группу преобразований (4). Нам же о метрике (1) известно только, что она феноменологически инвариантна, т.е. удовлетворяет некоторому уравнению (2). Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы движений с $n(n + 1)/2$ параметрами, задающей групповую симметрию n-мерного пространства $\mathfrak{M}$.

Определение 3. Будем говорить, что функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ задает на множестве $\mathfrak{M}$ n-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n + 1)/2$, если, кроме условий I, II, III дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV$'$. Для любой пары $\langle ij \rangle$ из плотного в $\mathfrak{S}_a \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множества существует такая локальная группа дифференцируемых локальных преобразований (движений) некоторой ее окрестности $P(i) \times P(j)$, содержащей не более чем $n(n + 1)/2$ существенных независимых параметров, что функция a: $P(i) \times P(j) \to R$ является двухточечным инвариантом.

Локальная группа преобразований, о которой говорится в аксиоме IV$'$, определяет полную подвижность твердых тел в пространстве $\mathfrak{M}$ с $n(n + 1)/2$ степенями свободы. Однако в общем случае движение задано не для всякой точки $\mathfrak{M}$, точно так же как не для всякой пары из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ определена функция a. Возможен и такой случай, когда расстояние $a(ij)$ не определено, в то время как для некоторых окрестностей $P(i)$, $P(j)$ задано преобразование (4).

Лемма 5. *Множество кортежей $\langle ijk \ldots vw \rangle$ длины $m = n + 2$, движение некоторой окрестности $P(i) \times P(j) \times \ldots \times P(w)$ которых сохраняет все взаимные упорядоченные расстояния a: $P(i) \times P(j) \to R$, a: $P(i) \times P(k) \to R, \ldots,$ a: $P(v) \times$ $\times P(w) \to R$, плотно в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^m$.*

Теорема 2. *Для того чтобы функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ задавала на множестве $\mathfrak{M}$ n-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n + 1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения A: $\mathfrak{M}^m \to R^{m(m-1)/2}$ был равен $m(m - 1)/2 - 1$ на плотном в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^m$ множестве.*

Итоговым результатом настоящей работы является установление эквивалентности феноменологической и групповой симметрий n-мерной геометрии расстояний. Эта эквивалентность непосредственно вытекает из теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Для того чтобы функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ задавала на множестве $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $m =$ $= n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}$ n-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n + 1)/2$.*

В заключение отметим, что необходимое и достаточное условие теорем 1 и 2 о ранге отображения A можно было бы включить в определение n-мерной геометрии расстояний, которая, с одной стороны, была бы феноменологически симметрична, а с другой, была бы наделена групповой симметрией, причем обе симметрии в соответствии с теоремой 3 были бы полностью эквивалентны.

Новосибирский государственный педагогический институт

Поступило 29 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* В кн.: Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956, с. 402–434. 2. *Кулаков Ю.И.* – ДАН, 1970, т. 193, № 5, с. 985–987. 3. *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1968. 4. *Гельмгольц Г.* В кн.: Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956, с. 366–388. 5. *Михайличенко Г.Г.* Матем. доп. к кн. Ю.И. Кулакова, 1968, с. 200–205. 6. *Михайличенко Г.Г.* – ДАН, 1981, т. 260, № 4, с. 803–805.