Изложенный метод понижения размерности применим не только к гиперкубическим, но и к произвольным n-мерным решеткам, а также к решеткам, где значение +1 или −1 приписывается ребрам, а не вершинам (задачам связей).

Отметим, что неравенство (10) можно получить применением метода, изложенного в [3] для получения асимптотики перколяционного порога для задачи направленного протекания. Однако неравенство (8) этим методом получить нельзя.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
17 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kesten H.* Percolation theory of mathematicians. Birkhäuser; Boston; Basel; Stuttgart, 1982, vol. 2. 2. *Higuchi V.* – Z. Wahrsch. verw. Geb., 1982, Bd. 61, №1, S. 75–81. 3. *Митюшин Л.Г.* – Пробл. передачи информ., 1975, т. 11, вып. 3.

УДК 513.811

МАТЕМАТИКА

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ И ГРУППОВАЯ СИММЕТРИИ В ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ (ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР)

(Представлено академиком А.Д. Александровым 6 VII 1984)

В исследованиях по основаниям физики Ю.И. Кулаковым [1] предложена некоторая математическая модель строения физического закона как феноменологически инвариантной связи между измеряемыми на опыте величинами. Эта модель, именуемая физической структурой, имеет геометрический характер, приложима к обычной геометрии [2, 3] и может рассматриваться как своеобразная геометрия двух множеств. В новой геометрии можно ввести движение как такое преобразование, которое сохраняет расстояние между точками различных множеств и задает ее групповую симметрию. В настоящей работе точно определяются феноменологическая и групповая симметрии геометрии двух множеств и устанавливается их полная эквивалентность.

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ произвольной природы (в общем случае различной), точки которых обозначим строчными латинскими и греческими буквами соответственно, и функция $a\colon \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, сопоставляющая паре $\langle i\alpha \rangle$ некоторое вещественное число $a(i\alpha) \in R$. Заметим, что область определения функции a, которую обозначим через $\mathfrak{S}_a$, может не совпадать со всем прямым произведением $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, т.е. не каждой паре $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется число. Однако в дальнейшем удобно не оговаривать всякий раз это обстоятельство, прдразумевая, что пара $\langle i\alpha \rangle$ всегда берется из области определения $\mathfrak{S}_a$. Функцию $a\colon \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ можно рассматривать как своего рода метрику в геометрии двух множеств. Расстояние $a(i\,\alpha)$ определяется для точек $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ различных множеств и поэтому обычные свойства метрики (такие, как симметрия, неравенство треугольника и т.д.) здесь не имеют смысла. Мы будем предполагать, что выполняется следующее условие:

I. Существует такое конечное базисное множество $\mathfrak{N}_B$ (соответственно $\mathfrak{M}_B$), и что если две произвольные точки $i, j \in \mathfrak{M}$ (соответственно $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$) различны, то для некоторого $\gamma \in \mathfrak{N}_B$ (соответственно $k \in \mathfrak{M}_B$) имеет место неравенство $a(i\gamma) \neq a(j\gamma)$ (соответственно $a(k\alpha) \neq a(k\beta)$).

Смысл условия I состоит прежде всего в том, что рассматриваются только те свойства множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, которые выражаются посредством функции a. Если множество $\mathfrak{M}$ (соответственно $\mathfrak{N}$) содержит более двух различных точек, то, по условию I, для любой точки $i \in \mathfrak{M}$ (соответственно $\alpha \in \mathfrak{N}$) найдется такое $\gamma \in \mathfrak{N}_B$ (соответственно $k \in \mathfrak{M}_B$), что пара $\langle i\gamma \rangle$ (соответственно $\langle k\alpha \rangle$) принадлежит области определения функции a, т.е. $\mathrm{pr}_1 \mathfrak{S}_a = \mathfrak{M}$ (соответственно $\mathrm{pr}_2 \mathfrak{S}_a = \mathfrak{N}$).

Определение 1. Множество $\tilde{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{N}$) называется ограниченным, если ограничена область значений функции a: $\tilde{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{N}_B \to R$ (соответственно a: $\mathfrak{M}_B \times \tilde{\mathfrak{N}} \to R$).

Ясно, что всякое конечное множество ограничено и объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено.

В множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ естественным образом можно определить топологии. Пусть, например, $i \in \mathfrak{M}$ — произвольная точка, $\tilde{\mathfrak{N}}$ — ограниченное множество, содержащее базис $\mathfrak{N}_B$, и $\epsilon > 0$. Обозначим через $P(i, \tilde{\mathfrak{N}}, \epsilon)$ множество всех точек $i \in \mathfrak{M}$, для которых имеет место неравенство $|a(i'\gamma) - a(i\gamma)| < \epsilon$ при любом $\gamma \in \tilde{\mathfrak{N}}$ таком, что пара $\langle i\gamma \rangle$ принадлежит области $\mathfrak{S}_a$. Семейство всех $P(i, \tilde{\mathfrak{N}}, \epsilon)$ для произвольных ограниченных множеств $\tilde{\mathfrak{N}} \supset \mathfrak{N}_B$ и любых значений положительного числа ϵ принимается за фундаментальную систему окрестностей точки $i \in \mathfrak{M}$. Аналогично вводится фундаментальная система окрестностей $P(\alpha, \tilde{\mathfrak{M}}, \epsilon)$ для любой точки $\alpha \in \mathfrak{N}$. Произвольные окрестности точек i и α будем обозначать через $P(i)$ и $P(\alpha)$.

Лемма 1. *Введенные для всех точек $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ системы множеств $P(i)$ и $P(\alpha)$ удовлетворяют аксиомам системы окрестностей и определяют на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ единственные отделимые в смысле Хаусдорфа топологические структуры.*

Топология в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ определяется обычным образом как произведение топологий пространств-сомножителей. Естественно предположить, что область определения функции a открыта $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, т.е. пара $\langle i\alpha \rangle$ принадлежит $\mathfrak{S}_a$ вместе с некоторой своей окрестностью $P(i) \times P(\alpha)$.

Лемма 2. *Функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ непрерывна по топологии прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.*

Пусть $m \geqslant 1$ (соответственно $n \geqslant 1$) — произвольное целое число. Для некоторого кортежа $\langle \delta \ldots \rho \rangle$ длины m (соответственно $\langle p \ldots q \rangle$ длины n) построим непрерывное отображение $a[\delta \ldots \rho]$: $\mathfrak{M} \to R^m$ (соответственно $a[p \ldots q]$: $\mathfrak{N} \to R^n$), сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ (соответственно $\alpha \in \mathfrak{N}$) совокупность m чисел $(a(i\delta), \ldots, a(i\rho)) \in R^m$ (соответственно n чисел $(a(p\alpha), \ldots, a(q\alpha)) \in R^n$). Второе условие определяет размерность множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

II. Для каждой точки $i \in \mathfrak{M}$ (соответственно $\alpha \in \mathfrak{N}$) найдется такой кортеж $\langle \delta \ldots \rho \rangle$ длины m (соответственно $\langle p \ldots q \rangle$ длины n), что для некоторой окрестности $P(i)$ (соответственно $P(\alpha)$) отображение $a[\delta \ldots \rho]$: $P(i) \to R^m$ (соответственно $a[p \ldots q]$: $P(\alpha) \to R^n$) является локальным гомеоморфизмом.

Согласно условию II множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ являются топологическими многообразиями размерности m и n, в некоторой окрестности каждой точки которых можно ввести локальные координаты $x^1, x^2, \ldots, x^m$ и $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$. Для исходной функции a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ в некоторой окрестности $P(i) \times P(\alpha)$ произвольной пары $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{S}_a$ получаем локальное координатное представление

(1) $a(i\alpha) = a(x^1(i),\ x^2(i), \dots, x^m(i),\quad \xi^1(\alpha),\ \xi^2(\alpha), \dots, \xi^m(\alpha)),$

свойства которого задаются третьим условием:

III. Функция $a(i\alpha)$ достаточно гладкая и локальные координаты $x^1(i),\ x^2(i), \dots$ $\dots, x^m(i)$ и $\xi^1(\alpha),\ \xi^2(\alpha), \dots, \xi^m(\alpha)$ входят в нее существенным образом.

Существенная зависимость от координат означает, что никакая невырожденная замена не приведет к уменьшению их числа.

Пусть, далее, $\mathfrak{M}^{n+1}$ и $\mathfrak{N}^{m+1}$ – $(n+1)$-кратное и $(m+1)$-кратное прямые произведения множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на себя. В $\mathfrak{M}^{n+1}$, $\mathfrak{N}^{m+1}$, а также $\mathfrak{M}^{n+1}\times\mathfrak{N}^{m+1}$ обычным образом определим топологии прямых произведений. Построим отображение A: $\mathfrak{M}^{n+1}\times\ \mathfrak{N}^{m+1}\to R^{(n+1)(m+1)}$, сопоставляя кортежу $\langle ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle \in$ $\in \mathfrak{M}^{n+1}\times\ \mathfrak{N}^{m+1}$ длины $n+m+2$ совокупность $(n+1)(m+1)$ чисел $(a(i\alpha),\ a(i\beta), \dots$ $\dots, a(v\tau))$, соответствующих всем упорядоченным парам в кортеже. Обозначим область определения построенного отображения через $\mathfrak{S}_A$. Окрестность кортежа $\langle ijk\dots v,\ \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$ в $\mathfrak{M}^{n+1}\times\ \mathfrak{N}^{m+1}$ будем обозначать через $P(\langle ijk\dots\ v,\quad \alpha\beta\gamma\dots$ $\dots\tau\rangle)$. Поскольку область $\mathfrak{S}_a$, по предположению, открыта в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$, открытой будет также и область $\mathfrak{S}_A$ в $\mathfrak{M}^{n+1}\times\ \mathfrak{N}^{m+1}$.

Л е м м а 3. *Отображение* A: $\mathfrak{M}^{n+1}\times\ \mathfrak{N}^{m+1}\to R^{(n+1)(m+1)}$ *непрерывно по топологии прямого произведения* $\mathfrak{M}^{n+1}\times\ \mathfrak{N}^{m+1}$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что ф у н к ц и я $a\colon \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R$ з а д а е т н а м н о ж е с т в а х $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ ф е н о м е н о л о г и ч е с к и с и м м е т р и ч н у ю $(m+n)$-м е р н у ю г е о м е т р и ю р а с с т о я н и й р а н г а $(n+1,$ $m+1)$, если, кроме условий I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV. Для каждого кортежа $\langle ijk\dots v,\ \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$ длины $m+n+2$ из плотного в $\mathfrak{S}_A\subset\ \mathfrak{M}^{n+1}\times\ \mathfrak{N}^{m+1}$ множества и некоторой его окрестности $P(\langle ijk\dots\quad v,$ $\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle)$ существует такая достаточно гладкая функция Φ: $\mathfrak{E}\to R$, определенная в некоторой области $\mathfrak{E}\subset R^{(n+1)(m+1)}$, что $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$ в точке $A(\langle ijk\dots v,\ \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle)\in\mathfrak{E}$ и множество $A(P(\langle ijk\dots v,\ \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle))$ совпадает с множеством нулей функции Φ, т.е.

(2) $\Phi(a(i\alpha),\ a(i\beta), \dots, a(v\tau)) = 0$

для всякого кортежа из $P(\langle ijk\dots v,\ \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Требование $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$ в точке $A(\langle ijk\dots v,\ \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle)$ означает, что отображение A в определенном смысле не вырождено.

В работе автора [4] приведены метрики всех существующих феноменологически симметричных геометрий двух множеств любой размерности, а также уравнения (2) для каждой такой метрики.

Используя представление (1), можно записать локальное координатное задание отображения A, которое есть задание системы $(n+1)(m+1)$ дифференцируемых функций $a(i\alpha)$, $a(i\beta), \dots, a(v\tau)$, специальным образом зависящих от $m(n+1)$ $+$ $+\,n(m+1)$ координат $x^1(i), x^2(i), \dots, x^m(i), \dots, \xi^1(\tau),\ \xi^2(\tau), \dots, \xi^n(\tau)$. Матрица Якоби этой системы функций является функциональной матрицей отображения A и ее ранг называется рангом этого отображения.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы функция* $a\colon \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R$ *задавала на множествах* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *феноменологически симметричную* $(m+n)$*-мерную геометрию расстояний ранга* $(n+1,\ m+1)$, *необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения* A *был равен* $(n+1)(m+1)-1$ *на плотном в* $\mathfrak{S}_A\subset\ \mathfrak{M}^{n+1}\times\ \mathfrak{N}^{m+1}$ *множестве.*

Преобразованием множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, как известно, называется взаимно однозначное отображение этих множеств на себя. Некоторое преобразование назовем движением, если оно сохраняет исходную функцию (метрику) a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$. Совокупность всех преобразований, относительно которых метрика a является двухточечным инвариантом (т.е. сохраняется), есть, очевидно, группа. Например, для метрики $a(i\alpha) = x(i)\xi(\alpha) + \eta(\alpha)$, взятой из работы [4], двухпараметрическая группа движений задается уравнениями $x' = bx + c$, $\xi' = \xi/b$, $\eta' = \eta - c\xi/b$. Нам же о метрике (1) известно только, что она феноменологически инвариантна, т.е. удовлетворяет некоторому уравнению (2). Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы движений с mn и не более параметрами.

Определение 3. Будем говорить, что функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ $(m+n)$-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени mn, если, кроме условий I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV′. Для всякой точки i из плотного в $\mathfrak{M}$ множества и для всякой точки α из плотного в $\mathfrak{N}$ множества существует такая локальная группа дифференцируемых локальных преобразований некоторых их окрестностей $P(i)$ и $P(\alpha)$, содержащая mn и не более существенных независимых параметров, что если пара $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{S}_a$, то функция a: $P(i) \times P(\alpha) \to R$ является двухточечным инвариантом.

Локальная группа преобразований, о которой говорится в аксиоме IV′, определяет полную подвижность "твердых тел" в $(m+n)$-мерном пространстве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ с mn и не более степенями свободы. Однако в общем случае такое движение задано не для всякой пары из $\mathfrak{S}_a$. Слова "не более" в аксиоме IV′ означают, что группа движений не может содержать более чем mn существенных независимых параметров.

Лемма 4. *Множество кортежей $\langle ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau \rangle$ длины $n + m + 2$, движение некоторой окрестности $P(i) \times \ldots \times P(\tau)$ которых, содержащее mn и не более существенных независимых параметров, сохраняет все расстояния a: $P(i) \times P(\alpha) \to R$, a: $P(i) \times P(\beta) \to R, \ldots, a$: $P(v) \times P(\tau) \to R$, плотно в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$.*

Теорема 2. *Для того чтобы функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ задавала на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ $(m+n)$-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени mn, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения A был равен $(n+1) \times (m+1) - 1$ на плотном в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ множестве.*

Итоговым результатом настоящей работы является установление эквивалентности феноменологической и групповой симметрии $(m+n)$-мерной геометрии расстояний двух множеств. Эта эквивалентность вытекает непосредственно из сформулированных выше двух теорем.

Теорема 3. *Для того чтобы функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ задавала на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ феноменологически симметричную $(m+n)$-мерную геометрию расстояний ранга $(n+1, m+1)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ $(m+n)$-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени mn.*

Отметим, что, поскольку все феноменологически инвариантные метрики $(m+n)$-мерной геометрии расстояний двух множеств известны [4], теорема 3 дает решение следующей задачи теории инвариантов групп преобразований. Пусть на прямом произведении $R^m \times R^n$ действует mn-мерная группа преобразований $x' = \lambda(x, \varphi)$, $\xi' = \sigma(\xi, \varphi)$, где $x, x' \in R^m$, $\xi, \xi' \in R^n$, $\varphi \in R^{mn}$, причем явный вид этих преобразований неизвестен. Функция $a(x, \xi)$ пары точек x и ξ будет двухточечным инвариантом, если она сохраняется при преобразовании, т.е. удовлетворяет следующему уравнению:

$$a(x', \xi') = a(x, \xi).$$

Требуется, во-первых, установить, для каких пар чисел m и n существует локально невырожденные двухточечные инварианты, во-вторых, найти явные выражения для этих инвариантов и, в-третьих, записать mn-мерную группу преобразований пространства $R^m \times R^n$, которая сохраняет функцию $a(x, \xi)$. Решение этой задачи может оказаться сложным по той причине, что отсутствует полная классификация групп преобразований.

Новосибирский государственный
педагогический институт

Поступило
13 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур (Дополнение Михайличенко Г.Г.). Новосбиирск, 1968. 2. *Кулаков Ю.И.* – ДАН, 1970, т. 193, № 5, с. 985–987. 3. *Михайличенко Г.Г.* – ДАН, 1981, т. 260, № 4, с. 803–805. 4. *Михайличенко Г.Г.* – ДАН, 1972, т. 206, № 5, с. 1055–1058.

УДК 517.947.4 МАТЕМАТИКА

Л.А. МУРАВЕЙ

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 25 VI 1984)

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) - b(x)u = c(x)u_{tt}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

где Ω – неограниченная область в R^n, $A(x) = \| a_{ij}(x) \|_{i,j=1,\dots,n}$ – симметрическая вещественная матрица с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющая условию $\gamma^{-1}|\xi|^2 \leqslant (A(x)\xi, \xi) \leqslant \gamma |\xi|^2$, $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in R^n$, $b(x)$, $c(x)$ – достаточно гладкие функции, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant b(x) \leqslant \gamma$, $\gamma^{-1} \leqslant c(x) \leqslant \gamma$, $\gamma = \text{const} \geqslant 1$. Кроме того будем предполагать, что при $|x| > R$, где R достаточно велико, $A(x) \equiv I$, $b(x) \equiv 0$, $c(x) \equiv 1$, т.е. при $|x| > R$, $t > 0$, уравнение (1) волновое.

Зададим при $t = 0$ начальные условия

$$u|_{t=0} = f_0(x), \quad u_t|_{t=0} = f_1(x), \tag{2}$$

где $f_j(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega \cap \{|x| < R\})$, $j = 1, 2$.

Будем считать, что либо область $\Omega = R^n$, либо ее граница $\Gamma \in C^\infty$ компактна ($\Gamma \in \{|x| < R\}$) и на ней при $t > 0$ задано одно из условий

$$u|_\Gamma = 0, \tag{3_{I}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0, \tag{3_{II}}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(x)u\right)\right|_\Gamma = 0, \tag{3_{III}}$$