ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 348, № 1, с. 22–24

МАТЕМАТИКА

УДК 514.1+512.816

ПРОСТЕЙШИЕ ПОЛИМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ

© 1996 г. Г. Г. Михайличенко

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 29.06.94 г.

Поступило 31.08.94 г.

Полиметрические геометрии, т.е. геометрии с более чем одним расстоянием, естественно возникают в теории физических структур Ю.И. Кулакова [1], в частности при аксиоматическом обосновании термодинамики. В этой теории метрика пространства понимается в самом общем смысле как числовая функция пары точек, и по аксиоме феноменологической симметрии все взаимные расстояния для некоторого конечного числа точек должны быть функционально связаны.

Ранее автором было дано определение феноменологически симметричных геометрий с одним расстоянием [2]. В настоящей работе определяются полиметрические феноменологически симметричные геометрии ранга $m \geq 3$ с $s \geq 2$ расстояниями, а в случае минимального ранга $m = 3$ для $s = 2$ и $s = 3$ приводятся их полные классификации.

Пусть $s \geq 2$, $n \geq 1$ и $\mathfrak{M}$ – гладкое sn-мерное многообразие, точки которого обозначим строчными латинскими буквами. Пусть дано функциональное соответствие $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$, сопоставляющее паре $\langle ij \rangle$ из области его определения $\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(ij) = (f^1(ij), \ldots, f^s(ij)) \in R^s$. Функциональным соответствием (ф.с.) $\varphi: A \to B$, как известно, называется однозначное отображение некоторого подмножества из A в B. Ф.с. $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем называть s-метрикой, не требуя, однако, от ее компонент выполнения аксиом обычной 1-метрики.

Для некоторого кортежа $\langle k_1 \ldots k_n \rangle \in \mathfrak{M}^n$ длины n введем ф.с. $\overline{f}^n: \mathfrak{M} \to R^{sn}$ и $f^n: \mathfrak{M} \to R^{sn}$, сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ точки $(f(ik_1), \ldots, f(ik_n)) \in R^{sn}$ и $(f(k_1 i), \ldots, f(k_n i)) \in R^{sn}$ соответственно, если пары $\langle ik_1 \rangle, \ldots, \langle ik_n \rangle$ и $\langle k_1 i \rangle, \ldots, \langle k_n i \rangle$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. *Область определения $\mathfrak{S}_f$ ф.с. $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множество.*

II. *Ф.с. f в области своего определения $\mathfrak{S}_f$ есть достаточно гладкая функция.*

III. *В $\mathfrak{M}^n$ плотно множество таких кортежей длины n, для которых ф.с. $\overline{f}^n$ ($\overline{\overline{f}}^n$) имеет максимальный ранг, равный sn, в точках плотного в $\mathfrak{M}$ множества.*

Гладкую полиметрику, для которой выполняется аксиома III, будем называть невырожденной.

Пусть, далее, $m = n + 2 \geq 3$. Введем ф.с. $F: \mathfrak{M}^m \to R^{sm(m-1)/2}$, сопоставляя кортежу $\langle ijk \ldots vw \rangle \in \mathfrak{M}^m$ длины m точку $(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ задаются упорядоченной по исходному кортежу у последовательностью $sm(m-1)/2$ расстояний для всех пар его точек $\langle ij \rangle, \langle ik \rangle, \ldots, \langle vw \rangle$, если эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения введенного ф.с. F обозначим $\mathfrak{S}_F$.

Определение 1. Будем говорить, что ф.с. $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$ **задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ s-метрическую феноменологически симметричную геометрию ранга** $m = n + 2$, если, кроме аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV. *Существует плотное в $\mathfrak{M}^m$ множество, для каждого кортежа которого $\langle ijk \ldots vw \rangle$ длины $m = n + 2$ и некоторой его окрестности U найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi: \mathscr{E} \to R^s$, что $\operatorname{rang} \Phi = s$ в области $\mathscr{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$ и $F(U) = \ker \Phi$, т.е.*

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0 \qquad (1)$$

для всех кортежей из U.

Аксиома IV выражает принцип феноменологической симметрии, согласно которому $sm(m-1)/2$ расстояний между точками любого кортежа длины $m = n + 2$ из U должны быть функционально связаны, удовлетворяя системе s независимых уравнений (1).

Пусть $x^1, \ldots, x^{sn}$ – локальные координаты в многообразии $\mathfrak{M}$. Тогда для s-метрики f в некоторой

Новосибирский государственный педагогический университет

окрестности каждой пары $\langle ij\rangle \in \mathfrak{S}_f$ можно записать ее координатное представление:

$$f(ij) = f(x^1(i), \ldots, x^{sn}(i), x^1(j); \ldots, x^{sn}(j)), \quad (2)$$

свойства которого задаются аксиомами II и III.

Определение 2. Будем говорить, что гладкие ф.с. f: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$ и g: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$ с открытыми и плотными в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ областями определения $\mathfrak{S}_f$ и $\mathfrak{S}_g$ эквивалентны, если существуют такие локальные диффеоморфизмы λ: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ и ψ: $R^s \to R^s$, что для открытого и плотного в $\mathfrak{S}_f$ множества пар $\langle ij\rangle$ пара $\langle\lambda(i), \lambda(j)\rangle \in \mathfrak{S}_g$ и имеет место соотношение $f(ij) = \psi(g(\lambda(i), \lambda(j)))$.

Теорема 1. *С точностью до эквивалентности существуют только две невырожденные 2-метрики $f = (f^1, f^2)$, задающие на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричные геометрии ранга 3. В надлежаще выбранных в $\mathfrak{M}$ системах локальных координат x, y эти 2-метрики могут быть представлены следующими выражениями:*

$$f^1(ij) = x(i) - x(j), \quad f^2(ij) = y(i) - y(j); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= (x(i) - x(j))y(i), \\ f^2(ij) &= (x(i) - x(j))y(j). \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 2. *С точностью до эквивалентности 3-метрика $f = (f^1, f^2, f^3)$, задающая на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, в надлежаще выбранных в $\mathfrak{M}$ системах локальных координат x, y, z может быть представлена одним из следующих семи выражений:*

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= x(i) - x(j), \quad f^2(ij) = y(i) - y(j), \\ f^3(ij) &= z(i) - z(j); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= y(i) - y(j), \\ f^2(ij) &= (x(i) - x(j))y(i) + z(i) - z(j), \\ f^3(ij) &= (x(i) - x(j))y(j) + z(i) - z(j); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= (x(i) - x(j))^2 \exp[(y(i) - y(j))/(x(i) - x(j))], \\ f^2(ij) &= (x(i) - x(j))z(i), \quad f^3(ij) = (x(i) - x(j))z(j); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= (x(i) - x(j))^p(y(i) - y(j)), \\ f^2(ij) &= (x(i) - x(j))z(i), \quad f^3(ij) = (x(i) - x(j))z(j); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= [(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2] \times \\ &\times \exp\left(\gamma \operatorname{arctg}\frac{y(i) - y(j)}{x(i) - x(j)}\right), \\ f^2(ij) &= z(i) + \operatorname{arctg}[(y(i) - y(j))/(x(i) - x(j))], \\ f^3(ij) &= z(j) + \operatorname{arctg}[(y(i) - y(j))/(x(i) - x(j))]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= \cos y(i) \cos y(j) \cos(x(i) - x(j)) + \\ &+ \sin y(i) \sin y(j), \\ f^2(ij) &= z(i) + \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y(i)}\right) \times \\ &\times \arcsin\left(\frac{\sin(x(i) - x(j))\cos y(i)}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right), \\ f^3(ij) &= z(j) - \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y(j)}\right) \times \\ &\times \arcsin\left(\frac{\sin(x(i) - x(j))\cos y(j)}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= (x(i) - x(j))y(i)y(j), \\ f^2(ij) &= z(i) + 1/(x(i) - x(j))y^2(i), \\ f^3(ij) &= z(j) - 1/(x(i) - x(j))y^2(j), \end{aligned} \quad (11)$$

где $|p| \le 1$ *и* $|\gamma| < \infty$.

В доказательствах теорем 1 и 2 используются групповые свойства полиметрических геометрий. Оказывается, что невырожденная s-метрика $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающая на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$ (см. определение 1), допускает $sn(n + 1)/2$-мерную группу локальных движений, относительно которой каждая компонента s-метрики является двухточечным инвариантом. В частности, 2-метрики (3), (4) и 3-метрики (5)–(11) допускает двух- и трехпараметрические группы движений соответственно.

Компоненты 2-метрики (3) и 3-метрики (5) можно, очевидно, интерпретировать проекциями вектора на координатные оси. Соответствующие функциональные связи (1) задаются системами двух и трех независимых уравнений:

$$f^\alpha(ij) - f^\alpha(ik) + f^\alpha(jk) = 0,$$

где $\alpha = 1, 2$ для 2-метрики (3) и $\alpha = 1, 2, 3$ для 3-метрики (5).

2-метрика (4) и 3-метрика (6) допускают содержательную физическую интерпретацию в термодинамике. Компоненты 2-метрики (4) в этой интерпретации суть количества тепла, которые термодинамическая система отдает внешним телам при ее переходе из состояния i в состояние j по двум путям TS и ST, составленным из изотермического ($T = \text{const}$) и адиабатического ($S = \text{const}$) процессов:

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= Q^{TS}(ij) = (S(i) - S(j))T(i), \\ f^2(ij) &= Q^{ST}(ij) = (S(i) - S(j))T(j), \end{aligned} \tag{12}$$

где T и S – абсолютная температура и энтропия системы. Соответствующая функциональная связь (1) задается двумя независимыми уравнениями

$$\begin{gathered} f^1(ij)f^2(ik)f^1(jk) - f^2(ij)f^1(ik)f^2(jk) = 0, \\ f^1(ik)f^1(jk)f^2(jk) - f^2(ik)f^1(ij)f^2(ij) - \\ - f^1(ik)f^2(ik)(f^1(jk) - f^2(ij)) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Первую компоненту 3-метрики (6) можно интерпретировать как разность температур $T(i)$ и $T(j)$ термодинамической системы в состояниях i и j, а вторую и третью – как работы внешних тел над ней при ее переходе из состояния i в состояние j по путям TS и ST:

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= T(i) - T(j), \\ f^2(ij) &= A^{TS}(ij) = (S(i) - S(j))T(i) - U(i) + U(j), \\ f^3(ij) &= A^{ST}(ij) = (S(i) - S(j))T(j) - U(i) + U(j), \end{aligned} \tag{14}$$

где U – внутренняя энергия системы. Соответствующая феноменологически симметричная функциональная связь (1) задается в этом случае тремя независимыми уравнениями:

$$\begin{gathered} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\ (f^2(ij) - f^3(ij))/f^1(ij) - (f^2(ik) - f^3(ik))/f^1(ik) + \\ + (f^2(jk) - f^3(jk))/f^1(jk) = 0, \\ (f^3(ij) - f^3(ik) + f^2(jk))f^1(ik) - \\ - (f^2(ik) - f^3(ik))f^1(jk) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

В термодинамике можно интерпретировать еще и компоненты 3-метрики (8) при $p = 0$ разностью температур и работами по путям PV и VP, где P и V – давление и объем системы. Вопрос о физических и математических интерпретациях остальных 3-метрик пока остается открытым. Их нетривиальные симметрии, групповая и феноменологическая, обусловливающие друг друга, дают основание надеяться, что такие интерпретации будут найдены и для других 3-метрик.

В заключение отметим, что с точностью до эквивалентности возможна единая форма записи первых компонент 3-метрик (7), (8) и (9) с помощью дуальных, двойных и комплексных чисел $w = x + ey$ соответственно:

$$f^1(ij) = |w(i) - w(j)|^2 \exp\gamma \operatorname{Arg}(w(i) - w(j)),$$

где $\gamma = 1$, $e^2 = 0$ для 3-метрики (7), $\gamma \le 0$, $e^2 = +1$ для 3-метрики (8) и $|\gamma| < \infty$, $e^2 = -1$ для 3-метрики (9).

Автор выражает благодарность А.И. Фету за постоянный интерес к работе и многочисленные полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кулаков Ю.И.* // ДАН. 1970. Т. 193. № 5. С. 985–987.
2. *Михайличенко Г.Г.* // ДАН. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288.