Известия вузов. Математика
2008, №10, с. 25–30

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО, Р.М. МУРАДОВ

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Аннотация. Гиперкомплексные числа используются для классификации физических структур.

Ключевые слова: комплексные числа, физические структуры.

УДК: 511.11

Abstract. Hypercomplex numbers are used for the classification of physical structures.

Keywords: complex number, physical structure.

В теории физических структур (ТФС) основными понятиями являются репрезентатор и верификатор ([1], с. 48–51). Репрезентатор представляет измеряемую в опыте физическую величину, являясь в математическом смысле функцией пары точек из одного множества или из двух разных множеств. Верификатор же представляет физический закон как функциональную связь между результатами измерений и записывается в феноменологически симметричной форме для любого кортежа, содержащего конечное и фиксированное число точек тех множеств, на которых репрезентатор задает физическую структуру.

Одна из основных задач ТФС — классификация репрезентаторов и соответствующих им верификаторов. В уже построенных классификациях ([2], с. 82–83; [3], с. 113–114) совершенно естественно появились гиперкомплексные числа ранга 2, причем не только обычные комплексные числа, но также двойные и дуальные.

Гиперкомплексные числа ранга 2, как известно, задаются выражением

$$z = x + y\mathbf{i}, \tag{1}$$

где x, y — произвольные действительные числа, а $\mathbf{i}$ — так называемая мнимая единица. Сложение обычное, а умножение, связанное со сложением законом дистрибутивности, определяется квадратом мнимой единицы:

$$\mathbf{i}^2 = a + b\mathbf{i}, \tag{2}$$

где a и b — некоторые действительные числа.

Так определенное умножение коммутативно и ассоциативно. Переходя к другому базису, для квадрата мнимой единицы вместо выражения (2) получаем три не сводимые друг к другу варианта ([4], с. 9):

$$\mathbf{i}^2 = -1, +1, 0. \tag{3}$$

Таким образом, существуют три системы гиперкомплексных чисел ранга два: обычные комплексные числа с $\mathbf{i}^2 = -1$ и без делителей нуля; двойные числа с $\mathbf{i}^2 = +1$ и делителями

Поступила 25.05.2005; окончательный вариант 26.04.2007

нуля, задаваемыми выражением $z = x \pm x\mathbf{i}$; дуальные числа с $\mathbf{i}^2 = 0$ и чисто мнимыми делителями нуля $z = y\mathbf{i}$.

В ТФС гиперкомплексные числа ранга два впервые появились при классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий ([2], § 6), задаваемых на плоскости M с локальными координатами x, y метрической функцией (репрезентатором)

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{4}$$

где $\langle ij\rangle \in M^2$. Верификатор устанавливает связь шести "расстояний" для любой упорядоченной четверки $\langle ijkl\rangle \in M^4$:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0. \tag{5}$$

Метрические функции (4) для трех таких геометрий из их полной классификации, а именно, плоскости Гельмгольца:

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp 2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \tag{6}$$

где $\gamma \geq 0$, псевдогельмгольцевой плоскости:

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] \exp 2\beta \operatorname{arth} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \tag{7}$$

где $\beta \geq 0$, $\beta \neq 1$, и дуальногельмгольцевой плоскости:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp 2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \tag{8}$$

можно записать единообразно, используя комплексные, двойные и дуальные числа соответственно:

$$f(ij) = (z_i - z_j)\overline{(z_i - z_j)} \exp 2\gamma \arg(z_i - z_j), \tag{9}$$

где $\overline{z} = x - y\mathbf{i}$ — число, сопряженное числу $z = x + y\mathbf{i}$. Для плоскости Гельмгольца $\mathbf{i}^2 = -1$, $\gamma \geq 0$, $\arg z = \operatorname{arctg}(y/x)$. Плоскость Евклида является частным случаем плоскости Гельмгольца при $\gamma = 0$ и задание ее точек комплексными числами хорошо известно. Для псевдогельмгольцевой плоскости $\mathbf{i}^2 = +1$, $\gamma \geq 0$, $\gamma \neq 1$, $\arg z = \operatorname{arth}(y/x)$. Псевдоевклидовая плоскость Минковского является частным случаем псевдогельмгольцевой плоскости при $\gamma = 0$ и задание ее точек двойными числами также хорошо известно, причем делители нуля определяют изотропные конусы. Для дуальногельмгольцевой плоскости $\mathbf{i}^2 = 0$, $\arg z = y/x$, $\gamma = 1$.

Обратим внимание на то, что ни в одной из известных двумерных геометрий с невырожденной метрической функцией (4) дуальные числа не появились как естественное представление ее точек, задавая, однако, точки "экзотической" двумерной феноменологически симметричной геометрии, которая поэтому была названа нами дуальногельмгольцевой плоскостью.

На единую форму (9) для трех метрических функций (6)–(8), задающих разные двумерные феноменологически симметричные геометрии, указал профессор Широков А.П. (кафедра геометрии Казанского университета).

Гиперкомплексные числа ранга 2 появляются также и в классификации двуметрических физических структур ([3], § 7). Например, двуметрическая физическая структура ранга $(3, 2)$ задается на двумерном и четырехмерном многообразиях M и N с локальными координатами x, y и ξ, η, μ, ν двухкомпонентным репрезентатором

$$f = f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu), \tag{10}$$

где $f = (f^1, f^2)$. Ее феноменологическая симметрия выражается верификатором

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)) = 0, \tag{11}$$

где $\langle ijk, \alpha\beta\rangle \in M^3 \times N^2$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ — некоторая двухкомпонентная функция двенадцати переменных и, в частности, $f(i\alpha) = f(x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha)$.

В полной классификации двуметрических физических структур ранга $(3, 2)$ имеются шесть различных репрезентаторов, для трех из которых координатное представление может быть записано в виде

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu,\ \ f^2 = x\eta + y\xi + \nu, \tag{12}$$

где $\varepsilon = -1, +1, 0$. Две компоненты репрезентатора (12) могут быть получены гиперкомплексификацией числами ранга 2 однокомпонентного репрезентатора

$$f = x\xi + \mu, \tag{13}$$

задающего на одномерном и двумерном многообразиях M и N с локальными координатами x и ξ, μ однометрическую физическую структуру ранга $(3, 2)$ ([3], § 6). Гиперкомплексификация числами ранга 2 репрезентатора (13) состоит в переходе от действительной функции f и ее переменных x, ξ, μ к гиперкомплексным по схеме $f \to f^1 + f^2\mathbf{i}$, $x \to x + y\mathbf{i}$, $\xi \to \xi + \eta\mathbf{i}$, $\mu \to \mu + \nu\mathbf{i}$ и в последующем выделении действительной и мнимой частей.

Аналогичная ситуация имеет место и для двуметрической физической структуры ранга $(4, 2)$, которую на двумерном и шестимерном многообразиях M и N с локальными координатами x, y и ξ, η, μ, ν, ρ, τ задает двухкомпонентный репрезентатор

$$f = f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau), \tag{14}$$

где $f = (f^1, f^2)$. Ее феноменологическая симметрия выражается верификатором

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta), f(l\alpha), f(l\beta)) = 0, \tag{15}$$

где $\langle ijkl, \alpha\beta\rangle \in M^4 \times N^2$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ — некоторая двухкомпонентная функция шестнадцати переменных и, например, $f(i\alpha) = f(x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha, \rho_\alpha, \tau_\alpha)$.

Три репрезентатора из пяти в их полной классификации ([3], § 7) имеют следующее координатное представление:

$$\begin{aligned} f^1 &= \frac{(x+\rho)(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu) - \varepsilon(y+\tau)(x\eta + y\xi + \nu)}{(x+\rho)^2 - \varepsilon(y+\tau)^2}, \\ f^2 &= \frac{(x+\rho)(x\eta + y\xi + \nu) - (y+\tau)(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)}{(x+\rho)^2 - \varepsilon(y+\tau)^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\varepsilon = -1, +1, 0$. Репрезентаторы (16) могут быть получены описанной выше гиперкомплексификацией числами ранга 2, дополненной переходом $\rho \to \rho + \tau\mathbf{i}$, однокомпонентного репрезентатора

$$f = \frac{x\xi + \mu}{x + \rho}, \tag{17}$$

задающего на одномерном и трехмерном многообразиях M и N с локальными координатами x и ξ, μ, ρ однометрическую физическую структуру ранга $(4, 2)$ ([3], § 6).

Гиперкомплексификация числами ранга 2 позволяет найти двухкомпонентные репрезентаторы $f = (f^1, f^2)$, задающие двуметрические физические структуры других рангов. Рассмотрим, например, двуметрическую физическую структуру ранга $(3, 3)$, которую на четырехмерных многообразиях M и N с локальными координатами x, y, u, v и ξ, η, μ, ν задает двухкомпонентный репрезентатор

$$f = f(x, y, u, v, \xi, \eta, \mu, \nu), \tag{18}$$

где $f = (f^1, f^2)$. Ее феноменологическая симметрия выражается верификатором

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(i\gamma), f(j\alpha), f(j\beta), f(j\gamma), f(k\alpha), f(k\beta), f(k\gamma)) = 0, \tag{19}$$

где $\langle ijk, \alpha\beta\gamma\rangle \in M^3 \times N^3$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – некоторая двухкомпонентная функция восемнадцати переменных и, например, $f(i\alpha) = f(x_i, y_i, u_i, v_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha)$.

Полная классификация двуметрических физических структур ранга $(3,3)$ еще не построена, но известна классификация однометрических физических структур того же ранга ([3], § 5). Произведем гиперкомплексификацию числами ранга 2 двух репрезентаторов этой классификации

$$f = x\xi + u\mu, \tag{20}$$

$$f = x\xi + u + \mu, \tag{21}$$

задающих однометрические физические структуры ранга $(3,3)$, по схеме $f \to f^1 + f^2\mathbf{i}$, $x \to x + y\mathbf{i}$, $u \to u + v\mathbf{i}$, $\xi \to \xi + \eta\mathbf{i}$, $\mu \to \mu + \nu\mathbf{i}$. Выделяя действительную и мнимую части, получим шесть двухкомпонентных репрезентаторов

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + u\mu + \varepsilon v\nu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + u\nu + v\mu, \tag{22}$$

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + u + \mu, \qquad f^2 = x\eta + y\xi + v + \nu, \tag{23}$$

где $\varepsilon = -1, +1, 0$.

Теорема 1. *Репрезентаторы* (22) *и* (23) *задают на четырехмерных многообразиях* M *и* N *двуметрические физические структуры ранга* $(3,3)$.

Существование двухкомпонентного верификатора (19) для реперезентаторов (22) и (23) определяется по рангу соответствующей функциональной матрицы размера 18×24 системы 18 компонент функций, входящих в него, от 24 переменных – координат точек кортежа $\langle ijk, \alpha\beta\gamma\rangle$. Поскольку функциональная матрица имеет большой размер, при вычислении ее ранга использовались пакеты программ Maple 9 и Mathematika 5.0. Ранг оказался равным 16, что и доказывает согласно известной теореме математического анализа о функциональных связях в системе функций существование двухкомпонентного верификатора (19). Именно двухкомпонентного, так как ранг функциональной матрицы ровно на две единицы меньше числа функций в их системе.

От двуметрических физических структур, задаваемых двухкомпонентным репрезетатором $f = (f^1, f^2)$, естественно перейти к триметрическим физическим структурам, задаваемым трехкомпонентным репрезентатором $f = (f^1, f^2, f^3)$. Их феноменологическая симметрия выражается трехкомпонентным верификатором $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 0$.

Полная классификация триметрических физических структур построена только для минимального ранга $(2,2)$ ([3], § 8), поэтому при проведении их классификации для более высоких рангов, например, $(3,2)$, $(4,2)$, $(3,3)$ и т.д., можно использовать гиперкомплексные числа ранга три, задаваемые выражением

$$u = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j}, \tag{24}$$

где x, y, z — произвольные действительные числа, а $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — две мнимые единицы. Системы таких чисел определяются таблицей умножения их мнимых единиц. В самом общем случае эта таблица имеет следующий вид:

$$\mathbf{i}^2 = a + b\mathbf{j},\ \mathbf{j}^2 = c + d\mathbf{i},\ \mathbf{ij} = f + g\mathbf{i} + h\mathbf{j},\ \mathbf{ji} = p + q\mathbf{i} + r\mathbf{j}, \tag{25}$$

где a, b, c, d, f, g, h, p, q, r — некоторые действительные числа. Умножение, задаваемое таблицей (25), некоммутативно и неассоциативно, но с обычным сложением связано законом дистрибутивности. Известно, что в любой системе гиперкомплексных чисел ранга три имеются делители нуля, чем и обусловлено невнимание к ним со стороны математиков.

Однако наличие делителей нуля не может препятствовать их появлению в классификации триметрических физических структур, как не препятствовало оно появлению двойных и дуальных чисел в классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий и двуметрических физических структур.

Гиперкомплексификацию однокомпонентных репрезентаторов (13), (17), (20), (21) имеет смысл проводить только ассоциативными числами ранга 3, так как трехкомпонентные репрезентаторы, полученные гиперкомплексификацией неассоциативными числами, не могут задавать триметрические физические структуры. Последнее обстоятельство было установлено при вычислении ранга соответствующей функциональной матрицы достаточно большого размера с использованием современных возможностей ЭВМ.

Гиперкомплексные ассоциативные числа ранга 3 удобно разбить на два класса — коммутативные с таблицей умножения

$$\mathbf{i}^2 = bg + h^2 + b\mathbf{j},\ \mathbf{j}^2 = dh + g^2 + d\mathbf{i},\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = bd - gh + g\mathbf{i} + h\mathbf{j} \tag{26}$$

и некоммутативные с таблицами умножения

$$\mathbf{i}^2 = 1,\quad \mathbf{j}^2 = 1,\quad \mathbf{ij} = -1 + \mathbf{i} + \mathbf{j},\quad \mathbf{ji} = -1 - \mathbf{i} - \mathbf{j}, \tag{27}$$

$$\mathbf{i}^2 = 1,\quad \mathbf{j}^2 = 0,\quad \mathbf{ij} = \mathbf{j},\quad \mathbf{ji} = -\mathbf{j}. \tag{28}$$

Заметим, что для ассоциативных коммутативных гиперкомплексных чисел ранга три была проведена более тонкая классификация [5], подобная классификации (3) гиперкомплексных чисел ранга 2, разделившей системы комплексных, двойных и дуальных чисел.

Гиперкомплексификация числами ранга 3 с матрицами умножения (26), (27) и (28) однокомпонентного репрезентатора (13) по схеме $f \to f^1 + f^2\mathbf{i} + f^3\mathbf{j}$, $x \to x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j}$, $\xi \to \xi + \eta\mathbf{i} + \rho\mathbf{j}$, $\mu \to \mu + \nu\mathbf{i} + \tau\mathbf{j}$ после выделения одной действительной и двух мнимых частей приводит к трем классам трехкомпонентных репрезентаторов

$$\begin{aligned} f^1 &= x\xi + (bg + h^2)y\eta + (bd - gh)(y\rho + z\eta) + (dh + g^2)z\rho + \mu, \\ f^2 &= x\eta + y\xi + g(y\rho + z\eta) + dz\rho + \nu, \\ f^3 &= x\rho + z\xi + h(y\rho + z\eta) + by\eta + \tau; \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} f^1 &= x\xi + (y - z)(\eta - \rho) + \mu, \\ f^2 &= (x - z)\eta + y(\xi + \rho) + \nu, \\ f^3 &= (x + y)\rho + z(\xi - \eta) + \tau; \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} f^1 &= x\xi + y\eta + \mu, \\ f^2 &= x\eta + y\xi + \nu, \\ f^3 &= (x + y)\rho + z(\xi - \eta) + \tau. \end{aligned} \tag{31}$$

Теорема 2. *Репрезентаторы* (29), (30) *и* (31) *задают на трехмерном и шестимерном многообразиях M и N триметрические физические структуры ранга* $(3, 2)$.

Существование трехкомпонентного верификатора (11) для перечисленных репрезентаторов определяется по рангу соответствующей функциональной матрицы размера 18×21 системы восемнадцати компонент шести трехкомпонентных функций, входящих в него, от 21 переменной – координат точек кортежа $\langle ijk, \alpha\beta\rangle$. При вычислении ранга этой матрицы использовались пакеты программ Maple 9 и Mathematika 5.0. Ранг оказался равным пятнадцати, т. е. на три единицы меньше числа функций в их системе, что и доказывает существование трехкомпонентного верификатора (11).

Проведение аналогичной гиперкомплексификации числами ранга 3 однокомпонентных репрезентаторов (17) и (20), (21) по описанной выше схеме не представляет большого труда, как и проверка того, что полученные трехкомпонентные репрезентаторы задают триметрические физические структуры рангов (4,2) и (3,3) соответственно.

Авторами была проведена гиперкомплексификация репрезентатора (13) кватернионами и установлено методом, описанным в доказательствах теорем 1 и 2, что полученный четырехкомпонентный репрезентатор $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ на четырехмерном и восьмимерном многообразиях M и N действительно задает четырехметрическую физическую структуру ранга $(3, 2)$.

Таким образом, для построения классификации репрезентаторов, задающих полиметрические физические структуры, можно использовать системы ассоциативных гиперкомплексных чисел различных рангов безотносительно к наличию или отсутствию в них делителей нуля.

Литература

[1] Кулаков Ю.И. *Теория физических структур.* – М.: Доминико, 2004. – 847 с.
[2] Михайличенко Г.Г. *Полиметрические геометрии.* – Новосибирск: НГУ, 2001. – 146 с.
[3] Михайличенко Г.Г. *Групповая симметрия физических структур.* – Барнаул: БГПУ, 2003. – 204 с.
[4] Кантор И.Л., Солодовников А.С. *Гиперкомплексные числа.* – М: Физматлит, 1973. – 144 с.
[5] Мурадов Р.М. *Гиперкомплексные числа ранга три*// Наука, культура, образование. – 2004. – №15/16. – С.107.

Г.Г. Михайличенко
профессор, кафедра физики и методики преподавания физики,
Горно-Алтайский государственный университет,

649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

Р.М. Мурадов
аспирант, кафедра физики и методики преподавания физики,
Горно-Алтайский государственный университет,

649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1,

e-mail: rembo2009@yandex.ru

G.G. Mikhailichenko
Professor, Chair of Physics and Physics Teaching Principles,
Gorny Altai State University,

1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000, Russia,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

R.M. Muradov
Postgraduate, Chair of Physics and Physics Teaching Principles,
Gorny Altai State University,

1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000, Russia,

e-mail: rembo2009@yandex.ru