Известия вузов. Математика
2010, № 7, с. 64–72

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ

Аннотация. Решается функциональное уравнение, появляющееся при деформации канонической формы метрической функции, задающей на одномерных многообразиях геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга $(2, 2)$. Исследуются четыре типа таких деформаций.

Ключевые слова: функциональное уравнение, геометрия двух множеств (физическая структура), деформация метрической функции.

УДК: 517.965

Abstract. We solve a functional equation connected with deformations of the canonical form of a metric function giving on one-dimensional manifolds the geometry of two sets (physical structure) of rank $(2, 2)$. We study four types of such deformations.

Keywords: functional equation, geometry of two sets (physical structure), deformation of metric function.

Как хорошо известно [1], феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ФС ГДМ) ранга $(n + 1, m + 1)$ задается на гладких многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности m и n соответственно метрической (двухточечной) функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$. Ее феноменологическая симметрия означает, что для $n + 1$ точки из первого множества $\mathfrak{M}$ и $m + 1$ точки из второго множества $\mathfrak{N}$ все взаимные "расстояния" между ними связаны некоторым уравнением. В работе [1] показано, что такая геометрия наделена групповой симметрией степени mn в смысле "Эрлангенской программы", сформулированной Ф. Клейном в 1872 г. для геометрии одного множества.

Простейшая ФС ГДМ под наименованием "физическая структура" ранга $(2, 2)$ была открыта Ю.И. Кулаковым [2] при анализе строения второго закона Ньютона и определена им [3] как чисто математический объект. Геометрия эта на одномерных многообразиях задается достаточно гладкой невырожденной метрической функцией $f = f(x, \xi)$, причем $f_x \neq 0$, $f_\xi \neq 0$. Ее феноменологическая симметрия выражается уравнением $\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0$, где, например, $f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha)$, выполняющимся для любой четверки $\langle ij, \alpha\beta\rangle$ из некоторой окрестности в прямом произведении $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$. Соответствующий результат о ее существовании и единственности выражает

Теорема Кулакова. *Если достаточно гладкая невырожденная метрическая функция f на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с локальными координатами x и ξ задает ФС ГДМ ранга $(2, 2)$, то найдутся такие три функции χ, φ, ψ одной переменной с отличными от нуля производными χ', φ', ψ', что ее локальное координатное представление $f = f(x, \xi)$ может быть записано в виде*

$$f = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)), \tag{1}$$

Поступила 02.09.2008

причем феноменологическая симметрия этой ГДМ выражается уравнением

$$\chi^{-1}(f(i\alpha)) - \chi^{-1}(f(i\beta)) - \chi^{-1}(f(j\alpha)) + \chi^{-1}(f(j\beta)) = 0, \tag{2}$$

выполняющимся для любой четверки $\langle ij, \alpha\beta\rangle$ из некоторой окрестности в прямом произведении $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$, где χ^{-1} — обратная к χ функция и, например, $f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha)$.

Оригинальное по идее и простое по сути доказательство этой теоремы читатель может найти в работе [3], а также ([4], § 2) или воспроизвести самостоятельно.

С помощью функций φ и ψ в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ можно ввести *новые локальные координаты* $\varphi(x) \to x$ и $\psi(\xi) \to \xi$, а с помощью функции χ можно произвести *локальное масштабное преобразование* самой метрической функции $\chi^{-1}(f) \to f$. В результате получаем *аддитивную каноническую форму* метрической функции, задающей на одномерных многообразиях ФС ГДМ ранга $(2, 2)$:

$$f = x + \xi. \tag{3}$$

Заметим, что понятие канонической формы достаточно условно и, например, в работе [3] используется *мультипликативная каноническая форма* $f = x\xi$, естественно связанная со строением второго закона Ньютона. Очевидно, что она переходит в аддитивную форму (3) при локальных заменах координат $\ln x \to x$, $\ln \xi \to \xi$ и локальном масштабном преобразовании $\ln f \to f$. Ясно также, что любая метрическая функция $f = f(x, \xi)$, задающая ФС ГДМ ранга (2,2), может быть получена из ее аддитивной каноническрй формы (3).

Определение. *Деформацией* канонической формы (3) называется ее искажение

$$f = \theta(x + \xi, \mu(x), \nu(\xi)) \tag{4}$$

с двумя неизвестными достаточно гладкими *деформирующими функциями* $\mu = \mu(x)$ и $\nu = \nu(\xi)$ и известной достаточно гладкой функцией θ, определяющей тип деформации.

В общем случае деформированная метрическая функция (4) не задает ФС ГДМ ранга $(2, 2)$. Поэтому естественно возникает следующая

Задача. *Найти все такие деформирующие функции μ и ν, при которых деформированная метрическая функция* (4) *на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ локально задает ФС ГДМ ранга* $(2, 2)$.

Интерпретация так сформулированной задачи состоит в установлении пределов варьирования найденной из опыта формы физического закона, описывающего отношение двух множеств физических объектов.

Согласно теореме Кулакова задача сводится к решению функционального уравнения

$$\theta(x + \xi, \mu(x), \nu(\xi)) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)) \tag{5}$$

относительно пяти неизвестных функций μ, ν и χ, φ, ψ, в котором шестая функция θ определяет тип деформации (4) и потому задается заранее, т. е. считается известной. При этом для деформирующих функций μ, ν необходимо *найти все возможные решения.* Для остальных же трех функций χ, φ, ψ *достаточно найти соответствующие частные решения*, так как по смыслу поставленной задачи нужно установить только их существование при уже найденных деформирующих функциях.

Наиболее интересны в математическом отношении такие деформации (4), для которых решение функциональных уравнений (5) нетривиально и поучительно. Таковыми, по мнению автора, являются следующие четыре деформации:

$$f = (x + \xi)\mu(x)\nu(\xi), \tag{6}$$

$$f = (x + \xi)(\mu(x) + \nu(\xi)), \tag{7}$$

$$f = x + \xi + \mu(x)\nu(\xi), \tag{8}$$

$$f = (x+\xi)\mu(x) + \nu(\xi), \tag{9}$$

причем условия невырожденности метрической функции ($f_x \neq 0$, $f_\xi \neq 0$) приводят, в частности, к следующим очевидным ограничениям на деформирующие функции: $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ для деформации (6), $\mu + \nu \neq 0$ для деформации (7) и $\mu \neq 0$ для деформации (9). Для деформации (8) естественно предположить, что $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, так как при обращении в нуль хотя бы одной из деформирующих функций исчезает и сама деформация.

Теорема 1. *Деформированная метрическая функция* (6) *задает ФС ГДМ ранга* $(2,2)$ *в том и только том случае, если локально деформирующие функции* $\mu(x)$ *и* $\nu(\xi)$ *определяются одной из следующих пяти пар выражений*:

$$\mu(x) = \mu \exp bx, \quad \nu(\xi) = \nu \exp b\xi; \tag{10}$$

$$\mu(x) = \frac{\mu}{(x+c)^b}, \quad \nu(\xi) = \frac{\nu}{(\xi-c)^{1-b}}; \tag{11}$$

$$\mu(x) = \frac{\mu}{x+c}\exp\frac{b}{x+c}, \quad \nu(\xi) = \frac{\nu}{\xi-c}\exp\frac{b}{\xi-c}; \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{\mu}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\exp\left(h\cdot\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right), \\ \nu(\xi) &= \frac{\nu}{\sqrt{a\xi^2-b\xi+c}}\exp\left(h\cdot\operatorname{arctg}\frac{2a\xi-b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right); \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{\mu}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\exp\left(h\cdot\operatorname{Arth}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right), \\ \nu(\xi) &= \frac{\nu}{\sqrt{a\xi^2-b\xi+c}}\exp\left(h\cdot\operatorname{Arth}\frac{2a\xi-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

где μ, ν, a, b, c, h *— произвольные постоянные, причем* $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, $a \neq 0$ *во всех выражениях*; $4ac - b^2 > 0$ *в выражении* (13) *и* $4ac - b^2 < 0$ *в выражении* (14).

Доказательством теоремы 1 является решение функционального уравнения (5), которое для метрической функции (6) имеет вид

$$(x+\xi)\mu(x)\nu(\xi) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)), \tag{15}$$

где $\mu(x) \neq 0$ и $\nu(\xi) \neq 0$.

Продифференцируем уравнение (15) по переменным x, ξ и разделим один результат дифференцирования на другой, чтобы исключить производную χ'. После простых и очевидных преобразований получаем равенство

$$\frac{1}{\varphi'} + \frac{(x+\xi)\mu'}{\varphi'\mu} = \frac{1}{\psi'} + \frac{(x+\xi)\nu'}{\psi'\nu}, \tag{16}$$

в котором дополнительное дифференцирование по переменным x, ξ приводит к их разделению

$$\left(\frac{\mu'}{\varphi'\mu}\right)' = \left(\frac{\nu'}{\psi'\nu}\right)' = a,$$

где a — произвольная постоянная. Интегрируя полученный результат по тем же переменным, получаем уравнения

$$\frac{\mu'}{\varphi'\mu} = ax + b, \quad \frac{\nu'}{\psi'\nu} = a\xi + c, \tag{17}$$

с помощью которых можно разделить эти переменные и в исходном равенстве (16):

$$\frac{1}{\varphi'} + ax^2 + (b-c)x = \frac{1}{\psi'} + a\xi^2 - (b-c)\xi = -h,$$

где $b,\ c,\ h$ – произвольные постоянные, причем $a^2 + (b-c)^2 + h^2 \neq 0$.

Для производных φ' и ψ' получаем выражения

$$\varphi' = -\frac{1}{ax^2 + (b-c)x + h}, \quad \psi' = -\frac{1}{a\xi^2 - (b-c)\xi + h},$$

подстановка которых в уравнения (17) приводит к дифференциальным уравнениям на деформирующие функции

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{ax + b}{ax^2 + (b-c)x + h}, \quad \frac{\nu'}{\nu} = -\frac{a\xi + c}{a\xi^2 - (b-c)\xi + h}. \tag{18}$$

При интегрировании уравнениий (18) удобно выделить три случая:

$$1)\ a = 0,\quad b - c = 0; \quad 2)\ a = 0,\quad b - c \neq 0; \quad 3)\ a \neq 0. \tag{19}$$

Случай 1). Уравнения (18) ($h \neq 0$) тогда становятся совсем простыми

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{b}{h}, \quad \frac{\nu'}{\nu} = -\frac{b}{h}.$$

После их интегрирования

$$\mu(x) = \mu \exp\left(-\frac{b}{h}x\right), \quad \nu(\xi) = \nu \exp\left(-\frac{b}{h}\xi\right),$$

где μ, ν — произвольные постоянные, естественно, отличные от нуля. Вводя переобозначение постоянной $-b/h \to b$, получаем выражения (10) для деформирующих функций. Подставим их в исходное функциональное уравнение (15):

$$(x+\xi)\mu\nu \exp b(x+\xi) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)),$$

откуда находим его частные решения для остальных трех функций:

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(\xi) = \xi, \quad \chi(u) = \mu\nu u \exp bu.$$

Случай 2). Уравнения (18) имеют тогда следующий вид:

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{b}{(b-c)x + h}, \quad \frac{\nu'}{\nu} = -\frac{c}{-(b-c)\xi + h}.$$

Их интегриование не представляет труда

$$\mu(x) = \frac{\mu}{\left(x + \frac{h}{b-c}\right)^{\frac{b}{b-c}}}, \quad \nu(\xi) = \frac{\nu}{\left(\xi - \frac{h}{b-c}\right)^{-\frac{c}{b-c}}},$$

где μ, ν — произвольные постоянные, причем $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$. Произведя замену постоянных $h/(b-c) \to c$, $b/(b-c) \to b$, получаем для деформирующих функций выражения (11). Подставим их в исходное функциональное уравнение (15):

$$\mu\nu\left(1 + \frac{\xi - c}{x + c}\right)^b \left(1 + \frac{x + c}{\xi - c}\right)^{1-b} = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)),$$

откуда можно найти его частные решения для остальных трех функций:

$$\varphi(x) = -\ln(x+c), \quad \psi(\xi) = \ln(\xi - c), \quad \chi(u) = \mu\nu(1 + \exp u)^b(1 + \exp(-u))^{1-b}.$$

Случай 3). Результат интегрирования дифференциальных уравнений (18) зависит от значения дискриминанта $\Delta = 4ah-(b-c)^2$ квадратных выражений, стоящих в их знаменателях. Используя интегралы (2.172) и (2.175) таблиц из ([5], с. 82), имеем

для $\Delta = 0$

$$\mu(x) = \frac{\mu}{2ax+b-c}\exp\frac{b+c}{2ax+b-c}, \quad \nu(\xi) = \frac{\nu}{2a\xi-(b-c)}\exp\frac{b+c}{2a\xi-(b-c)},$$

вводя переобозначения $\mu/2a \to \mu$, $\nu/2a \to \nu$, $(b+c)/2a \to b$, $(b-c)/2a \to c$, получаем выражения (12);

для $\Delta > 0$

$$\mu(x) = \frac{\mu}{\sqrt{ax^2+(b-c)x+h}}\exp\left(-\frac{b+c}{\sqrt{\Delta}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2ax+b-c}{\sqrt{\Delta}}\right),$$
$$\nu(\xi) = \frac{\nu}{\sqrt{a\xi^2-(b-c)x+h}}\exp\left(-\frac{b+c}{\sqrt{\Delta}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2a\xi-(b-c)}{\sqrt{\Delta}}\right),$$

вводя переобозначения $b-c \to b$, $h \to c$, $-(b+c)/\sqrt{\Delta} \to h$, получаем выражения (13);

для $\Delta < 0$

$$\mu(x) = \frac{\mu}{\sqrt{ax^2+(b-c)x+h}}\exp\left(\frac{b+c}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\operatorname{Arth}\frac{2ax+b-c}{\sqrt{-\Delta}}\right),$$
$$\nu(\xi) = \frac{\nu}{\sqrt{a\xi^2-(b-c)x+h}}\exp\left(\frac{b+c}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\operatorname{Arth}\frac{2a\xi-(b-c)}{\sqrt{-\Delta}}\right),$$

вводя переобозначения $b-c \to b$, $h \to c$, $(b+c)/\sqrt{-\Delta} \to h$, получаем выражения (14).

Подставляя деформирующие функции (12)–(14) в функциональное уранение (15)

$$\mu\nu\left(\frac{1}{x+c}+\frac{1}{\xi-c}\right)\exp b\left(\frac{1}{x+c}+\frac{1}{\xi-c}\right) = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi));$$

$$\frac{2\mu\nu}{\sqrt{4ac-b^2}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+\operatorname{arctg}\frac{2a\xi-b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\exp h\left(\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+\right.$$
$$\left.+\operatorname{arctg}\frac{2a\xi-b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi));$$

$$\frac{2\mu\nu}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{sh}\left(\operatorname{Arth}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+\operatorname{Arth}\frac{2a\xi-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)\exp h\left(\operatorname{Arth}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+\right.$$
$$\left.+\operatorname{Arth}\frac{2a\xi-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi)),$$

находим его частные решения для остальных трех функций:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x+c}, \quad \psi(\xi) = \frac{1}{\xi-c}, \quad \chi(u) = \mu\nu u\exp bu;$$

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}, \quad \psi(\xi) = \operatorname{arctg}\frac{2a\xi-b}{\sqrt{4ac-b^2}}, \quad \chi(u) = \frac{2\mu\nu}{\sqrt{4ac-b^2}}\sin u\exp hu;$$

$$\varphi(x) = \operatorname{Arth}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}, \quad \psi(\xi) = \operatorname{Arth}\frac{2a\xi-b}{\sqrt{b^2-4ac}}, \quad \chi(u) = \frac{2\mu\nu}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{sh} u\exp hu. \qquad \square$$

Теорема 2. *Деформированная метрическая функция* (7) *задает ФС ГДМ ранга* (2, 2) *в том и только том случае, если локально деформирующие функции* $\mu(x)$ *и* $\nu(\xi)$ *определяются одной из следующих четырех пар выражений*:

$$\mu(x) = \mu, \qquad \nu(\xi) = \nu; \tag{20}$$

$$\mu(x) = ax + \mu, \qquad \nu(\xi) = a\xi + \nu; \tag{21}$$

$$\mu(x) = ax + \mu, \qquad \nu(\xi) = -a\xi + \nu; \tag{22}$$

$$\mu(x) = \frac{a}{x+c} + \mu, \quad \nu(\xi) = \frac{b}{\xi - c} - \mu, \tag{23}$$

где μ, ν, a, b — *произвольные постоянные, причем* $\mu + \nu \neq 0$ *в выражениях* (20); $a \neq 0$ *в* (21) *и* (22); $a^2 + b^2 \neq 0$ *в* (23).

Доказательством теоремы 2 является решение функционального уравнения (5), которое для метрической функции (7) имеет вид

$$(x + \xi)(\mu(x) + \nu(\xi)) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)), \tag{24}$$

где $\mu(x) + \nu(\xi) \neq 0$.

В общих чертах метод решения функционального уравнения (24) повторяет метод, примененный выше к аналогичному уравнению (15). Суть его состоит в сведении функционального уравнения к системе дифференциальных уравнений на деформирующие функции и их решении. Поэтому в доказательстве теоремы 2 автор считает разумным ограничиться нахождением частных решений уравнения (24) для остальных трех функций, предполагая, что при желании читатель может воспроизвести все доказательство.

Подставив функции (20)–(23) в уравнение (24)

$$(x + \xi)(\mu + \nu) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi));$$

$$a(x + \xi)^2 + (\mu + \nu)(x + \xi) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi));$$

$$a(x^2 - \xi^2) + (\mu + \nu)(x + \xi) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi));$$

$$a + b + a\frac{\xi - c}{x + c} + b\frac{x + c}{\xi - c} = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)),$$

находим его частные решения для остальных трех функций:

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(\xi) = \xi, \quad \chi(u) = (\mu + \nu)u;$$

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(\xi) = \xi, \quad \chi(u) = au^2 + (\mu + \nu)u;$$

$$\varphi(x) = ax^2 + (\mu + \nu)x, \quad \psi(\xi) = -a\xi^2 + (\mu + \nu)\xi, \quad \chi(u) = u;$$

$$\varphi(x) = -\ln(x + c), \quad \psi(\xi) = \ln(\xi - c), \quad \chi(u) = a + b + \exp u + \exp(-u). \qquad \square$$

Теорема 3. *Деформированная метрическая функция* (8) *задает ФС ГДМ ранга* (2, 2) *в том и только том случае, если локально деформирующие функции* $\mu(x)$ *и* $\nu(\xi)$ *определяются явно одной из следующих двух пар выражений*:

$$\mu(x), \quad \nu(\xi) = \nu; \tag{25}$$

$$\mu(x) = \mu, \quad \nu(\xi) \tag{26}$$

или неявно решениями одной из следующих двух пар алгебраических уравнений:

$$\frac{c}{2b}\mu^2(x) + \frac{d}{b}\mu(x) + h = x, \quad \frac{b}{2c}\nu^2(\xi) + \frac{d}{c}\nu(\xi) + g = \xi; \tag{27}$$

$$\frac{c}{a}\mu(x) + \frac{ad - bc}{a^2}\ln(a\mu(x) + b) + h = x, \quad \frac{b}{a}\nu(\xi) + \frac{ad - bc}{a^2}\ln(a\nu(\xi) + c) + g = \xi, \tag{28}$$

где μ, ν, a, b, c, d — произвольные постоянные, причем $\nu \neq 0$, $\mu'(x) \neq -1/\nu$ в выражениях (25); $\mu \neq 0$, $\nu'(\xi) \neq -1/\mu$ *в* (26); $b \neq 0$, $c \neq 0$ *в уравнениях* (27); $a \neq 0$, $c^2+d^2 \neq 0$, $b^2+d^2 \neq 0$ *в* (28).

Доказательством теоремы 3, как и предыдущих теорем 1 и 2, является решение функционального уравнения (5), которое запишем для метрической функции (8):

$$x+\xi+\mu(x)\nu(\xi) = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi)), \tag{29}$$

где $\mu(x) \neq 0$, $\nu(\xi) \neq 0$. Но в отличие от уравнений (15) и (24) из функционального уравнения (29) возникают такие дифференциальные уравнения, при интегрировании которых две пары деформирующих функций определяются неявно алгебраическими уравнениями (27) и (28).

Подставляя решения (25)–(28) в уравнение (29)

$$x+\xi+\mu(x)\nu = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi));$$
$$x+\xi+\mu\nu(\xi) = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi));$$
$$\frac{1}{2bc}(c\mu(x)+b\nu(\xi))^2+\frac{d}{bc}(c\mu(x)+b\nu(\xi))+h+g = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi));$$
$$\frac{1}{a^2}(a\mu(x)+b)(a\nu(\xi)+c)+\frac{ad-bc}{a^2}(\ln(a\mu(x)+b)+\ln(a\nu(\xi)+c))-\frac{bc}{a^2}+h+g = \\ = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi)),$$

находим его частные решения для остальных трех функций:

$$\varphi(x) = x+\nu\mu(x), \quad \psi(\xi)=\xi, \quad \chi(u)=u;$$
$$\varphi(x)=x, \quad \psi(\xi)=\xi+\mu\nu(\xi), \quad \chi(u)=u;$$
$$\varphi(x)=c\mu(x), \quad \psi(\xi)=b\nu(\xi), \quad \chi(u)=\frac{1}{2bc}u^2+\frac{d}{bc}u+h+g;$$
$$\varphi(x)=\ln(a\mu(x)+b), \quad \psi(\xi)=\ln(a\nu(\xi)+c),$$
$$\chi(u)=\frac{1}{a^2}\exp u+\frac{ad-bc}{a^2}u-\frac{bc}{a^2}+h+g.$$

Теорема 4. *Деформированная метрическая функция* (9) *задает ФС ГДМ ранга* $(2,2)$ *в том и только том случае, если локально деформирующие функции* $\mu(x)$ *и* $\nu(\xi)$ *определяются явно выражениями*

$$\mu(x)=\mu, \ \nu(\xi) \tag{30}$$

или неявно решениями дифференциальных уравнений

$$\frac{\mu}{\mu'} = -x+\frac{c\mu+d}{a\mu+b}, \quad \nu' = \frac{b\xi+d}{a\xi+c}, \tag{31}$$

где μ, a, b, c, d — произвольные постоянные, причем $\mu \neq 0$, $\nu'(\xi) \neq -\mu$ в (30) *и $a^2+b^2 \neq 0$, $a^2+c^2 \neq 0$ в уравнениях* (31).

Доказательством теоремы 4 является решение функционального уравнения (5) для метрической функции (9):

$$(x+\xi)\mu(x)+\nu(\xi) = \chi(\varphi(x)+\psi(\xi)), \tag{32}$$

где $\mu(x) \neq 0$. Если $\mu'(x)=0$, то его решениями являются выражения (30), а также, очевидно, функции

$$\varphi(x)=\mu x, \quad \psi(\xi)=\mu\xi+\nu(\xi), \quad \chi(u)=u.$$

Если же $\mu'(x) \neq 0$, то при решении функционального уравнения (30) относительно первой деформирующей функции $\mu(x)$ появляется такое дифференциальное уравнение в паре

(31), интегрирование которого в общем случае оказывается затруднительным, хотя другое дифференциальное уравнение относительно второй деформирующей функции $\nu(\xi)$ легко интегрируется:

для $a = 0$

$$\nu(\xi) = \frac{b}{2c}\xi^2 + \frac{d}{c}\xi + h,$$

причем $b \neq 0$, $c \neq 0$;

для $a \neq 0$

$$\nu(\xi) = \frac{b}{a}\xi + \frac{ad - bc}{a^2}\ln(a\xi + c) + h.$$

В качестве иллюстрации содержательности результата, изложенного в теореме 4, рассмотрим простые случаи:

$$1)\ b^2 + d^2 = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ c^2 + d^2 = 0.$$

В случае 1) ($b = 0$, $d = 0$, $a \neq 0$) деформирующие функции удовлетворяют уравнениям $\mu/\mu' = -x + c/a$, $\nu' = 0$, решения которых легко находятся

$$\mu(x) = \frac{g}{x - c/a}, \quad \nu(\xi) = h, \tag{33}$$

где a, c, g, h — произвольные постоянные, причем $a \neq 0$, $g \neq 0$. Подставляя выражения (33) в функциональное уравнение (32)

$$g + g\frac{\xi + c/a}{x - c/a} + h = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)),$$

находим его частные решения для остальных трех функций:

$$\varphi(x) = -\ln(x - c/a), \quad \psi(\xi) = \ln(\xi + c/a), \quad \chi(u) = g\exp u + g + h.$$

В случае 2) ($c = 0$, $d = 0$, $a \neq 0$) деформирующие функции удовлетворяют уравнениям $\mu/\mu' = -x$, $\nu' = b/a$. Их решения

$$\mu(x) = \frac{g}{x}, \quad \nu(\xi) = \frac{b}{a}\xi + h,$$

в которых a, b, g, h — произвольные постоянные, причем $a \neq 0$, $g \neq 0$. Подставляя в функциональное уравнение (32)

$$\left(\frac{g}{x} + \frac{b}{a}\right)\xi + g + h = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)),$$

находим его частные решения для остальных трех функций:

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{g}{x} + \frac{b}{a}\right), \quad \psi(\xi) = \ln\xi, \quad \chi(u) = \exp u + g + h.$$

Автор надеется, рассчитывая на помощь вдумчивого читателя, найти со временем явное выражение для первой деформирующей функции $\mu(x)$, как решение первого дифференциального уравнения системы (31) без *дополнительных* ограничений на постоянные a, b, c, d, входящие в него, что позволит сделать формулировку всех четырех теорем однотипной.

Заметим в заключение, что в § 6 монографии [4] была рассмотрена следующая деформация канонической формы (3) с одной деформирующей функцией $\mu(x)$:

$$f = (x + \xi)\mu(x).$$

Решением соответствующего функционального уравнения

$$(x + \xi)\mu(x) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)) \tag{34}$$

там было установлено, что только при

$$\mu(x) = \mu \tag{35}$$

и

$$\mu(x) = \frac{\mu}{x+c}, \tag{36}$$

где μ, c — произвольные постоянные, причем $\mu \neq 0$, эта метрическая функция может задавать ФС ГДМ ранга $(2,2)$. Далее естественно было определить более общую деформацию (4) канонической формы (3) с двумя деформирующими функциями $\mu(x)$, $\nu(\xi)$ и развить методы решения соответствующего функционального уравнения (5), что и было сделано в данной работе для четырех типов такой деформации. Ясно, что функциональное уравнение (34) является, например, частным случаем уравнения (15) при $\nu(\xi) = 1$ и решения (35) и (36) можно получить из решений (10) и (11), полагая $\nu = 1$, $b = 0$ и $\nu = 1$, $b = 1$, так как только при таких значениях постоянных b, ν вторая деформирующая функция $\nu(\xi)$ в них обращается в единицу.

Автор выражает благодарность кафедре геометрии БГПУ и ее заведующему профессору Е.Д. Родионову за плодотворные обсуждения задачи, рассмотренной в данной работе, методов ее решения и интерпретации полученных результатов.

Литература

[1] Михайличенко Г.Г. *Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств* (*теории физических структур*), ДАН СССР **284** (1), 39–43 (1985).

[2] Кулаков Ю.И. *О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа*, ДАН СССР **201** (3), 570–572 (1971).

[3] Кулаков Ю.И. *Математическая формулировка теории физических структур*, Сиб. матем. журн. **12** (5), 1142–1145 (1971).

[4] Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М. *Физические структуры как геометрии двух множеств* (ГАГУ, Горно-Алтайск, 2008).

[5] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Физматлит, М., 1963).

Г.Г. Михайличенко

профессор, кафедра физики и методики преподавания физики,
Горно-Алтайский государственный университет,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1,

`e-mail:` mikhailichenko@gasu.ru

G.G. Mikhailichenko

Professor, Chair of Physics and Teaching Principles,
Gorny Altai State University,
1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000, Russia,

`e-mail:` mikhailichenko@gasu.ru