Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2018, №9, с. 11–20 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Р.А. БОГДАНОВА, Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Аннотация. Основными задачами теории феноменологически симметричных (ФС) геометрий, т. е. геометрий максимальной подвижности, являются их полная классификация, установление групповой симметрии и вывод уравнения ФС для каждой из них. Имеется полная классификация трехмерных ФС геометрий. Их ФС, т. е. наличие функциональной связи между значениями метрической функции для всех пар из пяти точек, следует из ранга соответствующей функциональной матрицы. Однако не для всех таких геометрий уравнение, выражающее ФС, известно в явном виде. В данной статье разработаны методы вывода уравнений ФС, примененные к некоторым трехмерным геометриям. Для каждой из них приведены группы движений, определеяющие групповую симмметрию степени шесть.

Ключевые слова: трехмерная геометрия, феноменологическая симметрия (ФС), групповая симметрия, эквивалентность симметрий, уравнение ФС.

УДК: 514.1

Введение

Рассматриваются трехмерные геометрии, которые задаются на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ метрической (двухточечной) функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, сопоставляющей паре точек $\langle ij \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ число $f(ij) \in \mathbb{R}$ ([1], § 4). Невырожденность функции f в ее локальном координатном представлении

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) \tag{1}$$

записывается в виде следующих двух неравенств:

$$\frac{\partial(f(ik), f(il), f(im))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(kj), f(lj), f(mj))}{\partial(x_j, y_j, z_j)} \neq 0 \tag{2}$$

для плотных в $\mathfrak{M}^4$ множеств четверок точек $\langle iklm \rangle$ и $\langle klmj \rangle$. Выполнение аксиом обычной метрики в отношении функции f не предполагается, поэтому ее значение $f(ij)$ для пары $\langle ij \rangle$ в общем случае не является расстоянием между точками i и j.

Феноменологическая симметрия (ФС) ранга 5 трехмерной геометрии, задаваемой метрической функцией (1), выражается ([1], § 4) уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(im), f(jk), f(jl), f(jm), f(kl), f(km), f(lm)) = 0, \tag{3}$$

справедливым для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^5$ множества пятерок точек $\langle ijklm \rangle$. Заметим, что в отличие от подхода Л. Блюменталя [2], вид функции Φ в левой части уравнения (3) заранее не задается. Предполагается только, что такая функция существует. Установлено

Поступила 17.07.2017

[3], что ФС ранга 5 трехмерной геометрии эквивалентна ее групповой симметрии степени 6, определяемой 6-параметрической группой движений

$$x' = \lambda(x, y, z; a, b, c, p, q, r), \quad y' = \sigma(x, y, z; a, b, c, p, q, r), \quad z' = \tau(x, y, z; a, b, c, p, q, r), \tag{4}$$

сохраняющих метрическую функцию

$$f(i'j') = f(ij). \tag{5}$$

Таким образом, трехмерные ФС геометрии являются геометриями максимальной подвижности. Будучи двухточечным инвариантом группы преобразований (4), метрическая функция (1) является решением следующей системы шести дифференциальных уравнений:

$$X_\mu(i)f(ij) + X_\mu(j)f(ij) = 0 \tag{6}$$

с базисными операторами X_μ, где $\mu = 1, 2, \ldots, 6$, соответствующей 6-мерной алгебры Ли. Произвольный ее оператор имеет вид

$$X = \lambda(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + \sigma(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + \tau(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$$

([4], сс. 229, 237). Имеется полная классификация трехмерных ФС ранга 5 геометрий, построенная В.Х. Левом [5]. Эта классификация воспроизведена в § 4 монографии [1]. Сопоставление ее с классификацией двумерных ФС ранга 4 геометрий ([1], § 3), задаваемых невырожденной метрической функцией

$$g(ij) = g(x_i, y_i, x_j, y_j) \tag{7}$$

и наделенных групповой симметрией степени 3, показывает, что с точностью до замены координат в многообразии $\mathfrak{M}$ и масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ метрическая функция (1) может быть записана в виде

$$f(ij) = \chi(g(ij), z_i, z_j). \tag{8}$$

Таким образом, двумерные ФС геометрии, оказываются "вложены" в трехмерные ФС геометрии [6]–[9].

Если операторы X_1, X_2, X_3 образуют базис трехмерной алгебры Ли группы движений двумерной геометрии, задаваемой метрической функцией (7), то в них будет отсутствовать оператор дифференцирования $\partial/\partial z$. С другой стороны, метрическая функция (8), очевидно, удовлетворяет первым трем уравнениям системы (6) с выше упомянутыми операторами. Но тогда уравнение для z' в группе движений (4) не содержит первых трех параметров a, b, c. Оставшиеся же три параметра p, q, r в уравнение для z' должны входить существенным образом. Действительно, если, например, в уравнении для z' отсутствует четвертый параметр p, то базисный оператор X_4, соответствующий ему, также не будет содержать оператор дифференцирования $\partial/\partial z$, т. е. метрическая функция (7) должна быть решением подсистемы первых четырех уравнений системы (6). Однако это невозможно, так как максимальная степень групповой симметрии, которой может быть наделена двумерная ФС геометрия ранга 4, равна 3 ([1], § 6, теорема 3).

Из представления (8) однозначно находим

$$g(ij) = \psi(z_i, z_j, f(ij)). \tag{9}$$

Для трех четверок точек $\langle ijkl\rangle$, $\langle ijkm\rangle$, $\langle ijlm\rangle$, взятых из пятерки точек $\langle ijklm\rangle$, запишем соответствующее уравнение ФС ранга 4 для двумерной геометрии:

$$\begin{gathered}\Phi(g(ij), g(ik), g(il), g(jk), g(jl), g(kl)) = 0,\\ \Phi(g(ij), g(ik), g(im), g(jk), g(jm), g(km)) = 0,\\ \Phi(g(ij), g(il), g(im), g(jl), g(jm), g(lm)) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Предположим, что координата z для точек l и m может быть однозначно выражена из первых двух соотношений системы (10). Найденные выражения для z_l и z_m подставим в третье соотношение той же системы. В результате для пятерки точек $\langle ijklm\rangle$ получаем соотношение

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(lm); z_i, z_j, z_k) = 0, \tag{11}$$

которое является тождеством по координате z точек i, j, k, поскольку в группе движений (4), как объяснено было выше,

$$z' = \tau(x, y, z; p, q, r),$$

и поэтому при движениях метрическая функция f сохраняется, а координаты z_i, z_j, z_k меняются как три независимые переменные. Исключая их, получаем уравнение (3), выражающее ФС ранга 5 трехмерной геометрии, задаваемой метрической функцией (8).

В качестве иллюстрации изложенного метода рассмотрим трехмерные симплициальную и симплектическую геометрии, а также особое трехмерное расширение плоскости Евклида, задаваемые соответственно метрическими функциями (4.13), (4.12) и (4.15) из ([1], § 4).

1. Уравнение ФС для трехмерной симплициальной геометрии

Трехмерная симплициальная геометрия задается метрической функцией

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\exp(z_i + z_j) \tag{12}$$

по классификации В.Х. Лева ([1], § 4, формула (4.13)).

Теорема 1. *Уравнением, выражающим феноменологическую симметрию трехмерной симплициальной геометрии, задаваемой на трехмерном многообразии метрической функцией* (12) *является уравнение* (21).

Доказательство. Метрическая функция двумерной симплициальной геометрии имеет координатное представление

$$g(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \tag{13}$$

([1], § 3, формула (3.10)). Запишем также соответствующее уравнение ФС ранга 4 для четверки точек $\langle ijkl\rangle$:

$$\begin{vmatrix} g(ij) - g(ik) & g(jk) - g(ik) & 0 \\ g(ij) - g(il) & 0 & g(il) - g(jl) \\ 0 & g(ik) - g(kl) & g(il) - g(kl) \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

([1], § 5, формула (5.3)).

Из выражений (12) и (13) при замене координат $x \to x$, $y \to y$, $z \to -\ln z$ получаем следующий вариант вложения (8) для симплициальных геометрий:

$$f(ij) = g(ij)\frac{1}{z_i z_j},$$

откуда однозначно находим

$$g(ij) = z_i z_j f(ij). \tag{15}$$

Ниже для сокращения записи формул введем более простые обозначения:

$$\begin{gathered} p = f(ij), \quad q = f(ik), \quad r = f(il), \\ s = f(im), \quad t = f(jk), \quad u = f(jl), \\ v = f(jm), \quad w = f(kl), \quad x = (km), \\ y = f(lm), \quad \alpha = z_i, \quad \beta = z_j, \quad \gamma = z_k. \end{gathered} \tag{16}$$

Функцию (15) подставим в уравнение (14) для четверок точек $\langle ijkl\rangle$, $\langle ijkm\rangle$, $\langle ijlm\rangle$ из их пятерки $\langle ijklm\rangle$, используя сокращающие обозначения (16). После вынесения из каждого столбца общего ненулевого множителя, получаем следующие соотношения:

$$\begin{vmatrix} \alpha p - \gamma t & \beta t - \alpha q & 0 \\ \alpha p - z_l u & 0 & \alpha r - \beta u \\ 0 & \alpha q - z_l w & \alpha r - \gamma w \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha p - \gamma t & \beta t - \alpha q & 0 \\ \alpha p - z_m v & 0 & \alpha s - \beta v \\ 0 & \alpha q - z_m x & \alpha s - \gamma x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha p - z_l u & \beta u - \alpha r & 0 \\ \alpha p - z_m v & 0 & \alpha s - \beta v \\ 0 & \alpha r - z_m y & \alpha s - z_l u \end{vmatrix} = 0,$$

первые два из которых разрешаем относительно z_l и z_m:

$$z_l = \alpha \frac{A(l)}{B(l)}, \quad z_m = \alpha \frac{A(m)}{B(m)},$$

где $A(l) = p(\alpha q - \beta t)(\alpha r - \gamma w) - q(\alpha r - \beta u)(\alpha p - \gamma t)$, $B(l) = u(\alpha q - \beta t)(\alpha r - \gamma w) - w(\alpha r - \beta u)(\alpha p - \gamma t)$, $A(m) = p(\alpha q - \beta t)(\alpha s - \gamma x) - q(\alpha s - \beta v)(\alpha p - \gamma t)$, $B(m) = v(\alpha q - \beta t)(\alpha s - \gamma x) - x(\alpha s - \beta v)(\alpha p - \gamma t)$.

Найденные выражения для z_l и z_m подставим в третье соотношение, которое для удобства записи транспонируем. После некоторых простых преобразований строк и столбцов получаем

$$\begin{vmatrix} pB(l) - uA(l) & pB(m) - vA(m) & 0 \\ \beta u - \alpha r & 0 & rB(m) - yA(m) \\ 0 & \alpha s - \beta v & sB(l) - yA(l) \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

где, как нетрудно установить, $pB(l) - uA(l) = (\alpha r - \beta u)(\alpha p - \gamma t)(qu - pw)$, $pB(m) - vA(m) = (\alpha s - \beta v)(\alpha p - \gamma t)(qv - px)$, $rB(m) - yA(m) = (\alpha q - \beta t)(\alpha s - \gamma x)(rv - py) - (\alpha s - \beta v)(\alpha p - \gamma t)(rx - qy)$, $sB(l) - yA(l) = (\alpha q - \beta t)(\alpha r - \gamma w)(su - py) - (\alpha r - \beta u)(\alpha p - \gamma t)(sw - qy)$. Из 1-й строки определителя (17) выносим ненулевой множитель $\alpha p - \gamma t$, из 1-го и 2-го столбцов — ненулевые множители $\alpha r - \beta u$ и $\alpha s - \beta v$:

$$\begin{vmatrix} qu - pw & qv - px & 0 \\ -1 & 0 & rB(m) - yA(m) \\ 0 & 1 & sB(l) - yA(l) \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

При разложении определителя (18) по третьему столбцу получаем полином второй степени по переменным α, β, γ:

$$\alpha^2 \Delta_1 + \alpha\beta \Delta_2 + \alpha\gamma \Delta_3 + \beta\gamma \Delta_4 = 0, \tag{19}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} qu - pw & qv - px & 0 \\ -1 & 0 & rs(qv - px) \\ 0 & 1 & rs(qu - pw) \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} qu - pw & qv - px & 0 \\ -1 & 0 & ty(qv - px) \\ 0 & 1 & ty(qu - pw) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} qu-pw & qv-px & 0 \\ -1 & 0 & pv(rx-qy)-st(rv-py) \\ 0 & 1 & pu(sw-qy)-rt(su-py) \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} qu-pw & qv-px & 0 \\ -1 & 0 & st(rx-qy)-qx(rv-py) \\ 0 & 1 & rt(sw-qy)-qw(su-py) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Таким образом, в соотношении (19) остаются только два слагаемых: $\alpha\beta\Delta_2 + \alpha\gamma\Delta_3 = 0$, откуда следует $\Delta_2 = 0$, $\Delta_4 = 0$. Разложим определитель Δ_2 по элементам первой строки: $(qu-pw)[pv(rx-qy)-st(rv-py)]-(qv-px)[pu(sw-qy)-rt(su-py)] = 0$. При раскрытии всех скобок и приведения подобных слагаемых обнаруживается общий ненулевой множитель p, на который можно сократить. Полученный результат удобно записать в виде обращения в нуль следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} pxy+wsv & pw & 1 \\ qvy+usx & qu & 1 \\ tsy+rvx & tr & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Нетрудно убедиться в том, что из соотношения $\Delta_3 = 0$ получим тот же результат (20).

Уравнение ФС ранга 5 для трехмерной симплициальной геометрии, задаваемой метрической функцией (12), получим из результата (20), используя обозначения (16):

$$\begin{vmatrix} f(ij)f(km)f(lm)+f(kl)f(im)f(jm) & f(ij)f(kl) & 1 \\ f(ik)f(jm)f(lm)+f(jl)f(im)f(km) & f(ik)f(jl) & 1 \\ f(jk)f(im)f(lm)+f(il)f(jm)f(km) & f(jk)f(il) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) при подстановке метрической функции (12) становится тождеством по координатам пятерки точек $\langle ijklm \rangle$, что установлено с помощью математического пакета “Matlab”. Таким образом, уравнение (21) действительно является уравнением ФС ранга 5 для трехмерной симплициальной геометрии. □

Сопоставим уравнение ФС (21) с уравнением ФС (14) для двумерной симплициальной геометрии, которое запишем, используя определитель третьего порядка, но другого строения, чем определитель (14):

$$\begin{vmatrix} g(ij)+g(kl) & g(ij)g(kl) & 1 \\ g(ik)+g(jl) & g(ik)g(jl) & 1 \\ g(jk)+g(il) & g(jk)g(il) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Замечаем структурное единство левых частей уравнений (21) и (22), так же как и для соответствующих метрических функций (12) и (13).

Приведем иную форму записи уравнения (21):

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\mu} f(i_\alpha i_\beta) f(i_\beta i_\gamma) f(i_\gamma i_\delta) f(i_\delta i_\mu) f(i_\mu i_\alpha) = 0, \tag{23}$$

где $\langle i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 \rangle = \langle ijklm \rangle$, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\mu}$ — пятииндексный кососимметрический символ Кронекера, а по немым повторяющимся индексам α, β, γ, δ, μ в соответствии с правилом Эйнштейна производится суммирование в пределах от 1 до 5. Для полного совпадения уравнений (21) и (23), последнее надо разделить на 10, так как в нем содержится двенадцать различных слагаемых, каждое из которых десятикратно повторяется.

2. Уравнение ФС для трехмерной симплектической геометрии

Трехмерная симплектическая геометрия задается метрической функцией

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j \tag{24}$$

([1], § 4, формула (4.12)).

Теорема 2. *Уравнением, выражающим феноменологическую симметрию трехмерной симплектической геометрии, задаваемой на трехмерном многообразии метрической функцией* (24)*, является уравнение* (29) *или эквивалентное ему уравнение* (30).

Доказательство. Двумерная симплектическая геометрия задается метрической функцией

$$g(ij) = x_i y_j - x_j y_i \tag{25}$$

([1], § 3, формула (3.9)), а уравнение ФС ранга 4 для нее записывается с помощью кососимметрического определителя Грама четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & g(ij) & g(ik) & g(il) \\ -g(ij) & 0 & g(jk) & g(jl) \\ -g(ik) & -g(jk) & 0 & g(kl) \\ -g(il) & -g(jl) & -g(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

Уравнение (26) эквивалентно уравнению

$$g(ij)g(kl) - g(ik)g(jl) + g(jk)g(il) = 0, \tag{27}$$

так как его левая часть есть полином Пфаффа для определителя предыдущего. Действительно, легко проверяется, что квадрат этого полинома совпадает с кососимметрическим определителем уравнения (26). В последующих рассуждениях простая форма (27) уравнения ФС оказывается более удобной.

Из координатных представлений (24) и (25) получаем вложение (8) для симплектических геометрий:

$$f(ij) = g(ij) + z_i - z_j,$$

отсюда

$$g(ij) = f(ij) - z_i + z_j. \tag{28}$$

Выражение (28) подставим в (27) для четверок точек $\langle ijkl\rangle$, $\langle ijkm\rangle$, $\langle ijlm\rangle$ из их пятерки $\langle ijklm\rangle$. Повторяя далее рассуждения доказательства теоремы 1 и полагая $z_i = z_j = z_k = 0$, получаем уравнение ФС ранга 5 для трехмерной симплектической геометрии:

$$\begin{aligned} f(ij)(f(kl) - f(km) + f(lm)) - f(ik)(f(jl) - f(jm) + f(lm)) + f(il)(f(jk)-\\ - f(jm) + f(km)) - f(im)(f(jk) - f(jl) + f(kl)) + f(jk)f(lm)-\\ - f(jl)f(km) + f(kl)f(jm) = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

справедливость которого проверена с помощью математического пакета “Matlab”.

Прямым вычислением можно установить, что левая часть уравнения (29) есть полином Пфаффа для кососимметрического определителя Кэли–Менгера шестого порядка, поэтому

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) & f(im) \\ -1 & -f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) & f(jm) \\ -1 & -f(ik) & -f(jk) & 0 & f(kl) & f(km) \\ -1 & -f(il) & -f(jl) & -f(kl) & 0 & f(lm) \\ -1 & -f(im) & -f(jm) & -f(km) & -f(lm) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Уравнение (29), очевидно, эквивалентно (30). □

Уравнение (30) можно интерпретировать как обращение в нуль определителя Грама шестого порядка для вектора $(0,0,1,0)$ и пяти векторов $(x,y,z,1)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$ с билинейной симплектической формой, задаваемой матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, определитель Грама в левой части уравнения (30) для функции (24) можно представить как произведение двух нулевых сомножителей:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_i & y_i & z_i & 1 & 0 & 0 \\ x_j & y_j & z_j & 1 & 0 & 0 \\ x_k & y_k & z_k & 1 & 0 & 0 \\ x_l & y_l & z_l & 1 & 0 & 0 \\ x_m & y_m & z_m & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & y_i & y_j & y_k & y_l & y_m \\ 0 & -x_i & -x_j & -x_k & -x_l & -x_m \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -z_i & -z_j & -z_k & -z_l & -z_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

что подтверждает справедливость этого уравнения.

3. Уравнение ФС для особого трехмерного расширения плоскости Евклида

Рассмотрим вывод уравнения ФС для особого трехмерного расширения плоскости Евклида, задаваемого метрической функцией

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp 2(z_i + z_j) \tag{31}$$

([1], § 4, формула (4.15)).

Теорема 3. *Уравнением, выражающим феноменологическую симметрию особого трехмерного расширения плоскости Евклида, задаваемого на трехмерном многообразии метрической функцией* (31)*, является уравнение* (36).

Доказательство. Для метрической функции (31) вложение (8) имеет вид

$$f(ij) = g(ij) \exp 2(z_i + z_j), \tag{32}$$

где

$$g(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \tag{33}$$

— метрическая функция плоскости Евклида, для которой уравнение ФС ранга 4 хорошо известно:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & g(ij) & g(ik) & g(il) \\ 1 & g(ij) & 0 & g(jk) & g(jl) \\ 1 & g(ik) & g(jk) & 0 & g(kl) \\ 1 & g(il) & g(jl) & g(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{34}$$

Из (32) выразим функцию $g(ij)$, которую подставим в уравнение (34) для четверки точек $\langle ijkl \rangle$. Относительно координаты z_l получается квадратное уравнение, которое имеет два решения. Поскольку появилась неоднозначность, метод, примененный к трехмерным симплициальной и симплектической геометриям, в рассматриваемом случае не может быть использован.

Будем исходить из следующего соотношения для пятерки точек $\langle ijklm \rangle$:

$$\begin{vmatrix} 0 & g(ij) & g(ik) & g(il) & g(im) \\ g(ij) & 0 & g(jk) & g(jl) & g(jm) \\ g(ik) & g(jk) & 0 & g(kl) & g(km) \\ g(il) & g(jl) & g(kl) & 0 & g(lm) \\ g(im) & g(jm) & g(km) & g(lm) & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{35}$$

которое, очевидно, не является уравнением ФС ранга 5 плоскости Евклида, а его справедливость для метрической функции (33) вытекает из следующего разложения определителя Грама пятого порядка на два нулевых сомножителя:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & x_i^2+y_i^2 & 1 & 0 \\ x_j & y_j & x_j^2+y_j^2 & 1 & 0 \\ x_k & y_k & x_k^2+y_k^2 & 1 & 0 \\ x_l & y_l & x_l^2+y_l^2 & 1 & 0 \\ x_m & y_m & x_m^2+y_m^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2x_i & -2x_j & -2x_k & -2x_l & -2x_m \\ -2y_i & -2y_j & -2y_k & -2y_l & -2y_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_i^2+y_i^2 & x_j^2+y_j^2 & x_k^2+y_k^2 & x_l^2+y_l^2 & x_m^2+y_m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Соотношение (35) выражает линейную зависимость любых пяти векторов $(x, y, x^2+y^2, 1)$ в пространстве R^4 с билинейной формой, задаваемой матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим первые строку и столбец определителя уравнения (35) на $\exp 2z_i$, вторые — на $\exp 2z_j$, третьи — на $\exp 2z_k$, четвертые — на $\exp 2z_l$ и, наконец, пятые строку и столбец умножим на $\exp 2z_m$. В результате получается аналогичное соотношение, где слева стоит тот же определитель Грама пятого порядка, в котором следует функцию (33) заменить функцией (31):

$$\begin{vmatrix} 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) & f(im) \\ f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) & f(jm) \\ f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) & f(km) \\ f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 & f(lm) \\ f(im) & f(jm) & f(km) & f(lm) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Соотношение (36) является уравнением ФС ранга 5 для трехмерной геометрии, задаваемой метрической функцией (31). □

Уравнение (36) выражает линейную зависимость пяти векторов $e^{2z}(2x,\ 2y,\ x^2+y^2-1,\ x^2+y^2+1)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$ с лоренцевой билинейной формой, задаваемой матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Такая интерпретация может более глубоко прояснить групповую симметрию рассматриваемой геометрии, группа движений которой приведена ниже.

4. Групповая симметрия

В заключение для каждой из трех рассмотренных выше трехмерных ФС ранга 5 геометрий выпишем шестипараметрические группы движений (4), определяющие их групповую симметрию степени шесть:

для трехмерной симплициальной геометрии с метрической функцией (12):

$$x' = cr\frac{x}{1+px} + a, \quad y' = cr^{-1}\frac{y}{1+qy} + b, \quad z' = z + \ln\frac{1+qy}{1+px} + \ln r; \tag{37}$$

для трехмерной симплектической геометрии с метрической функцией (24):

$$x' = ax + by + p, \quad y' = cx + dy + q, \quad z' = z + (cp - aq)x + (dp - bq)y + r,$$

где $ad - bc = 1$;

для особого трехмерного расширения плоскости Евклида, задаваемого метрической функцией (31):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{rx - cy + p(x^2+y^2)}{c^2 + r^2 + 2(rp+cq)x + 2(rq-cp)y + (p^2+q^2)(x^2+y^2)} + a, \\ y' &= \frac{cx + ry + q(x^2+y^2)}{c^2 + r^2 + 2(rp+cq)x + 2(rq-cp)y + (p^2+q^2)(x^2+y^2)} + b, \\ z' &= z + \frac{1}{2}\ln\frac{c^2 + r^2 + 2(rp+cq)x + 2(rq-cp)y + (p^2+q^2)(x^2+y^2)}{\sqrt{c^2+r^2}}. \end{aligned} \tag{38}$$

Все приведенные группы движений были найдены как решения функционального уравнения $f(i'j') = f(ij)$, т. е. уравнения

$$f(x'_i, y'_i, z'_i, x'_j, y'_j, z'_j) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j),$$

если учесть координатное представление (1), где $x' = \lambda(x,y,z)$, $y' = \sigma(x,y,z)$, $z' = \tau(x,y,z)$, для трех канонических выражений (12), (24), (31) методом, разработанным Р.А. Богдановой [10], [11].

Заметим, что в каждой шестипараметрической группе движений имеется трехпараметрическая подгруппа как отражение факта “вложения” двумерных ФС ранга 4 геометрий, наделенных групповой симметрией степени 3, в трехмерные ФС ранга 5 геометрии, о чем свидетельствует структура (8) их метрических функций.

Заметим, что группа движений (37) есть действие в $\mathbb{R}^3$ группы $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ по следующему правилу:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y' = \frac{ey+f}{gy+h}, \quad z' = z + \ln\frac{gy+h}{cx+d},$$

где $ad - bc = 1$, $eh - fg = 1$.

Авторы выражают благодарность аспиранту Р.М. Мурадову за помощь в компьютерной проверке справедливости уравнений, выражающих ФС ранга 5 соответствующих трехмерных геометрий, и в уточнении преобразования $z' = \tau(x,y,z)$ для группы (38) движений особого трехмерного расширения плоскости Евклида.

Литература

[1] Михайличенко Г.Г. *Двумерные геометрии* (Барнаул, БГПУ, 2004).
[2] Blumental L.M. *Theory and application of distance geometry* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1953).
[3] Михайличенко Г.Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии*, Сиб. матем. журн. **25** (5), 99–113 (1984).
[4] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1973).

[5] Лев В.Х. *Трехмерные геометрии в теории физических структур*, Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, **125**, 90–103 (1988).

[6] Кыров В.А. *Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии*, Сиб. журн. индустр. матем. **13** (4), 38–51 (2010).

[7] Кыров В.А. *Функциональные уравнения в симплектической геометрии*, Тр. ИММ УрО РАН **16** (2), 149–153 (2010).

[8] Кыров В.А. *Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **1(26)**, 31–38 (2012).

[9] Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. *Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий*, Тр. ИММ УрО РАН **23** (2), 167–181 (2017).

[10] Богданова Р.А. *Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения*, Сиб. журн. индустр. матем. **12** (4), 12–22 (2009).

[11] Богданова Р.А. *Группа движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. **30** (4), 5–13 (2014).

Рада Александровна Богданова

Горноалтайский государственный университет,
ул. Ленкина,д. 1, Горноалтайск, 649000, Россия,

e-mail: bog-rada@yandex.ru

Геннадий Григорьевич Михайличенко

Горноалтайский государственный университет,
ул. Ленкина,д. 1, Горноалтайск, 649000, Россия,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

R.A. Bogdanova and G.G. Mikhailichenko

Derivation of an equation of phenomenological symmetry for some three-dimensional geometries

Abstract. The main problems of the theory of phenomenologically symmetric (PS) geometries, i.e., geometries of maximum mobility, are their complete classification, the establishing of the fact of existence of their group symmetry, and finding of an equation of the phenomenological symmetry for each of them. A complete classification of three-dimensional PS geometries has been already built. Their PS, i.e., the existence of a functional relation between the values of the metric function for all pairs of five points follows from the rank of the corresponding functional matrix. However, not for all such geometries an equation which expresses the PS is known in the explicit form. The paper describes methods of finding the equations of PS which were applied to some three-dimensional geometries. For each of them we give groups of motions that define the group symmetry of degree six.

Keywords: three-dimensional geometry, phenomenological symmetry (PS), group symmetry, symmetry equivalence, equation of the PS.

Rada Alexandrovna Bogdanova
Gorno-Altai State University,
1 Lenkina str., Gorno-Altaisk, 649000 Russia,

e-mail: bog-rada@yandex.ru

Gennadiy Grigorievich Mikhailichenko
Gorno-Altai State University,
1 Lenkina str., Gorno-Altaisk, 649000 Russia,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru