$$(2\pi i)^r f(A) = \sum_{I\leqslant K\leqslant S} \sum_{I\leqslant J\leqslant m_K} (J-I)! \int_{T_r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\lambda_K)^J} \prod_{\nu=1}^{r} Z_{K,J}^{\nu} =$$

$$= \sum_{I\leqslant K\leqslant S} \sum_{I\leqslant J\leqslant m_K} \lim_{m\to\infty} \int_M f(\zeta) D^{J-I}\left[\frac{\varphi^{-m}(\lambda)}{\zeta-\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_K} \varphi^m(\zeta)\,d\zeta \cdot \prod_{\nu=1}^{r} Z_{K,J}^{\nu} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_M f(\zeta) \left\{ \sum_K \sum_J D^{J-I}\left[\frac{\varphi^{-m}(\lambda)}{\zeta-\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_K} \prod_{\nu=1}^{r} Z_{K,J}^{\nu} \right\} \varphi^m(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_M f(\zeta) R(A, \zeta) [\varphi^{-1}(A)]^m \varphi^m(\zeta)\,d\zeta.$$

Первое равенство следует из леммы 2, второе — из (9) и (11) после дифференцирования. Третье равенство очевидно, а последнее следует из r-кратного применения формулы (5.4.1) из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланкастер П. Теория матриц.— 2-е изд.— М.: Наука, 1982.— 272 с.
2. Mc Duffee C. The theory of matrices.— N. Y.: Chelsea, 1959.— 110 p.
3. Rinehart R. F. The equivalence of definitions of a matrix function // Amer. Math. Monthly.— 1955.— V. 62.— № 6.— P. 395—414.
4. Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А. Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства.— Новосибирск, 1975.— 115 с.
5. Худайберганов Г. Формула Карлемана для функций от матриц // Сиб. матем. журн.— 1988.— Т. 29.— № 1.— С. 207—208.
6. Фок В. А., Куни Ф. М. О введении „гасящей“ функции в дисперсионные соотношения // ДАН СССР.— 1959.— Т. 127.— № 6.— С. 1196—1198.
7. Айзенберг Л. А. О возможности аналитического продолжения в область функции, заданной на дуге границы этой области. Обобщенная теорема Фока-Куни // Комплекс. анализ и мат. физ.— Красноярск, 1988.— С. 5—11.
8. Айзенберг Л. А., Худайберганов Г. О кратной экстраполяции голоморфных функций от матриц и функций, голоморфных в произведении полуплоскостей // Изв. вузов. Математика.— 1988.— № 6.— С. 3—9.
9. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.— Новосибирск, 1979.— 366 с.
10. Голузин Г. М., Крылов В. И. Обобщенная формула Carleman'a и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Матем. сб.— 1933.— Т. 40.— № 2.— С. 144—149.
11. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций.— М.—Л.: Гостехиздат, 1950.— 336 с.
12. Conchar A. A. On analytic continuation from the „edge of the wedge“ // Annal. Acad. Fenn.— 1985.— V. 10.— P. 221—225.

г. София (НРБ)

Поступила
18.12.1989

Г. Г. Михайличенко

УДК 514.824

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ГИПОТЕЗЫ О БИНАРНОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА (В РАМКАХ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР)

Физические предпосылки гипотезы о бинарной структуре пространства были изложены Ю. С. Владимировым [1] (с. 47—55). Действительно, классические пространственно-временные отношения присущи объектам макромира, т. е. достаточно сложным и массивным образованиям, состоящим из двух видов заряженных частиц. С другой стороны, идея бинарности отношений естественно включена в теорию физических структур (ТФС) Ю. И. Кулакова [2], которая исходит из очень общих понятий и постулатов. В данной работе автор, опираясь на гипотезу о бинарной структуре пространства и используя некоторые свои результаты в ТФС [3], устанавливает симметрию метрики физического пространства и находит для этой метрики явное выражение.

Согласно [3] бинарная физическая структура в общих чертах и кратко может быть определена следующим образом. Пусть множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ суть m-мерное и n-мерное многообразия соответственно. Обозначим локальные координаты этих многообразий через $x=(x^1, \ldots, x^m)$ и $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и будем считать для определенности, что $m \leqslant n$. Пусть, далее, имеется функция f, сопоставляющая паре $\langle i\alpha\rangle \in \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ некоторое число $f(i\alpha)\in R$. Предполагается, что ее локальное координатное представление есть достаточно гладкая функция

$$f(i\alpha)=f(x(i),\ \xi(\alpha))=f(x^1(i),\ \ldots,\ x^m(i),\ \xi^1(\alpha),\ \ldots,\ \xi^n(\alpha)), \tag{1}$$

в которую координаты x и ξ входят существенным образом. Построим функцию F, сопоставляя кортежу длины $m+n+2$ из прямого произведения $\mathfrak{M}^{n+1}\times\mathfrak{N}^{m+1}$ все $(m+1)(n+1)$ чисел, соответствующих упорядоченной по нему совокупности всех пар. Будем говорить, что функция f задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ бинарную физическую структуру ранга $(n+1,\ m+1)$, если локально в $R^{(m+1)(n+1)}$ множество значений построенной функции F является подмножеством множества нулей некоторой достаточно гладкой функции Φ от $(m+1)(n+1)$ переменных с $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$ на плотном в $\mathfrak{M}^{n+1}\times\mathfrak{N}^{m+1}$ подмножестве.

В работе [3] приведена полная сводка локальных результатов для физических структур произвольного ранга. Запишем их здесь с точностью до эквивалентности (локально обратимой замены координат) и переобозначения $\psi(f)\to f$, где ψ — произвольная функция одной переменной:

$m=1,\ n=1$:

$$f(i\alpha)=x(i)+\xi(\alpha); \tag{2}$$

$m=1,\ n=2$:

$$f(i\alpha)=x(i)\xi(\alpha)+\eta(\alpha); \tag{3}$$

$m=1,\ n=3$:

$$f(i\alpha)=(x(i)\xi(\alpha)+\eta(\alpha))/(x(i)+\nu(\alpha)); \tag{4}$$

$m=n\geqslant 2$:

$$f(i\alpha)=x^1(i)\xi^1(\alpha)+\ldots+x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha)+x^n(i)+\xi^n(\alpha), \tag{5}$$

$$f(i\alpha)=x^1(i)\xi^1(\alpha)+\ldots+x^n(i)\xi^n(\alpha); \tag{6}$$

$m=n-1\geqslant 2$:

$$f(i\alpha)=x^1(i)\xi^1(\alpha)+\ldots+x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha)+\xi^n(\alpha). \tag{7}$$

Для всех остальных пар значений целых чисел m и n физические структуры ранга $(n+1,\ m+1)$ не существуют.

В приложении к геометрии естественно ограничиться случаем $m=n\geqslant 1$, когда многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют одинаковую размерность. Математическим выражением гипотезы о бинарной структуре пространства согласно соображениям Ю. С. Владимирова [1] и идеям Ю. И. Кулакова [4] будет следующая аксиома: А. *Существует такое взаимно однозначное локально гладкое отображение* $\varphi:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$, *что метрика пространства* $\mathfrak{M}$, *определяемая выражением*

$$L(ij)=f(i,\ \varphi(j)), \tag{8}$$

удовлетворяет следующему условию

$$L(ij)=\Theta(L(ji)), \tag{9}$$

где Θ — *некоторая функция одной переменной с* $\Theta'\neq 0$.

Теорема. *Метрика* (8) *пространства* $\mathfrak{M}$, *удовлетворяющая условию* (9), *с точностью до эквивалентности и переобозначения* $\psi(L)\to L$ *задается одним из выражений* (15), (28), (47), *каждое из которых либо симметрично* ($a=+1$), *либо антисимметрично* ($a=-1$).

Проведем доказательство сформулированной теоремы, рассматривая последовательно функции (2), (5), (6), задающие на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ бинарные физические структуры ранга $(n+1,\ n+1)$ с $n\geqslant 1$.

Для функции (2) метрика $L(ij)$ одномерного пространства $\mathfrak{M}$ в соответствии с определением (8) запишется так:

$$L(ij)=x(i)+\varphi(j), \tag{10}$$

где $\varphi(j)=\varphi(x(j))$, а условие (9) примет вид

$$x(i)+\varphi(j)=\Theta(x(j)+\varphi(i)). \tag{11}$$

Продифференцируем равенство (11) по координате $x(i):1=\Theta'(L(ji))\times$ $\times d\varphi(i)/dx(i)$, и аналогично по координате $x(j):d\varphi(j)/dx(j)=\Theta'(L(ji))$, откуда получаем

$$(d\varphi(i)/dx(i))(d\varphi(j)/dx(j))=1. \tag{12}$$

Поскольку соотношение (12) выполняется для любой пары $\langle ij\rangle$, из него следует, что $(d\varphi/dx)^2=1$, т. е.

$$d\varphi/dx=a, \tag{13}$$

причем $a^2=1$. Для функции φ получено простое уравнение (13), интегрируя которое находим

$$\varphi=ax, \tag{14}$$

где опущена аддитивная постоянная, т.к. результат формулируется с точностью до переобозначения $\psi(L)\to L$. Подставим теперь функцию (14) в определение (10) метрики $L(ij)$:

$$L(ij)=x(i)+ax(j), \tag{15}$$

где $a=\pm 1$. Из полученного выражения (15) для метрики (10) одномерного пространства $\mathfrak{M}$, удовлетворяющего условию (11), следует, что она может быть только либо симметричной ($a=+1$), либо антисимметричной ($a=-1$).

Перейдем, далее, к рассмотрению функции (5), в которой $n\geqslant 2$. Согласно определению (8) для метрики $L(ij)$ имеем выражение

$$L(ij)=x^{\mu}(i)\varphi_{\mu}(j)+x^{n}(i)+\varphi_n(j), \tag{16}$$

где $\varphi_{\mu}(j)=\varphi_{\mu}(x^1(j),\ \dots,\ x^{n-1}(j),\ x^n(j))$ и аналогично для $\varphi_n(j)$. Суммирование по немому индексу μ производится в пределах от 1 до $n-1$.

Подставим выражение (16) в условие (9):

$$x^{\mu}(i)\varphi_{\mu}(j)+x^{n}(i)+\varphi_n(j)=\Theta(x^{\mu}(j)\varphi_{\mu}(i)+x^{n}(j)+\varphi_n(i)), \tag{17}$$

затем продифференцируем его по координате $x^{\nu}(i)$, $\nu=1,\ \dots,\ n-1$:

$$\varphi_{\nu}(j)=\Theta'(L(ji))(x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{\nu}(i)+\partial\varphi_n(i)/\partial x^{\nu}(i)), \tag{18}$$

точно так же — по координате $x^n(i)$:

$$1=\Theta'(L(ji))(x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{n}(i)+\partial\varphi_n(i)/\partial x^{n}(i)) \tag{19}$$

и, наконец, — по координате $x^n(j)$:

$$x^{\mu}(i)\,\partial\varphi_{\mu}(j)/\partial x^{n}(j)+\partial\varphi_n(j)/\partial x^{n}(j)=\Theta'(L(ji)). \tag{20}$$

Поскольку $\theta' \neq 0$, из равенств (18) и (19) получаем связь

$$\varphi_\nu(j) = \frac{x^\mu(j)\,\partial\varphi_\mu(i)/\partial x^\nu(i) + \partial\varphi_n(i)/\partial x^\nu(i)}{x^\mu(j)\,\partial\varphi_\mu(i)/\partial x^n(i) + \partial\varphi_n(i)/\partial x^n(i)}, \tag{21}$$

из которой легко выводим

$$\partial\varphi_\mu/\partial x^n = 0. \tag{22}$$

С учетом соотношения (22) из равенств (19) и (20) получаем

$$\partial\varphi_n/\partial x^n = a, \tag{23}$$

где $a^2 = 1$, в результате чего связь (21) значительно упростится:

$$a\varphi_\nu(j) = x^\mu(j)\,\partial\varphi_\mu(i)/\partial x^\nu(i) + \partial\varphi_n(i)/\partial x^\nu(i).$$

Из этой упрощенной связи следует, что $\partial\varphi_\mu/\partial x^\nu = \mathrm{const}$, и поэтому с учетом (22) имеем

$$\varphi_\mu = b_{\mu\nu}\,x^\nu + c_\mu, \tag{24}$$

причем матрица коэффициентов $b_{\mu\nu}$, имеющая порядок $n-1$—невырожденная, т. к. функции φ_μ независимы, $c_\mu = \mathrm{const}$.

Подставим выражение (24) в предыдущую связь:

$$a(b_{\mu\nu}\,x^\mu(j) + c_\nu) = b_{\mu\nu}\,x^\mu(j) + \partial\varphi_n(i)/\partial x^\nu(i),$$

отсюда легко получаем

$$b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}, \tag{25}$$

где $a = \pm 1$, и дополнительно

$$\partial\varphi_n/\partial x^\mu = ac_\mu. \tag{26}$$

Из результата (25) следует, что по перестановке индексов μ, ν коэффициенты $b_{\mu\nu}$ выражения (24) либо симметричны ($a = +1$), либо антисимметричны ($a = -1$). В случае антисимметрии порядок матрицы $b_{\mu\nu}$, равный $n-1$, должен быть четным, т. к. определитель ее отличен от нуля, т. е. $n = 3, 5, 7, \ldots$.

Соотношения (23) и (26) представляют собой систему n уравнений относительно функции φ_n. Решая эту систему, находим

$$\varphi_n = ac_\mu\,x^\mu + ax^n, \tag{27}$$

где аддитивная постоянная опущена по тем же соображениям, что и в решении (14).

Подставим выражения (24) и (27) для функций φ_μ и φ_n в определение (16) метрики $L(ij)$:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu}\,x^\mu(i)\,x^\nu(j) + x^n(i) + ax^n(j), \tag{28}$$

где $b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}$, $a = \pm 1$, и произведено естественное переобозначение последней координаты: $c_\mu x^\mu + x^n \to x^n$. Из окончательного выражения (28) и свойства (25) следует, что $L(ij) = aL(ji)$, т. е. определяемая выражением (16) и удовлетворяющая условию (17) метрика n-мерного пространства $\mathfrak{M}$ может быть только либо симметричной ($a = +1$), либо антисимметричной ($a = -1$).

Рассмотрим в заключение доказательства функцию (6), в которой также $n \geqslant 2$. Для метрики $L(ij)$ в соответствии с определением (8) можно выписать следующее выражение:

$$L(ij)=x^{\mu}(i)\varphi_{\mu}(j), \tag{29}$$

где немое суммирование по индексу μ производится в пределах от $\mu=1$ до $\mu=n$ (сравни с выражением (16)).

Подставим выражение (29) в условие (9):

$$x^{\mu}(i)\varphi_{\mu}(j)=\Theta(x^{\mu}(j)\varphi_{\mu}(i)) \tag{30}$$

и продифференцируем его по координатам $x^{\nu}(i)$, $x^{\sigma}(i)$, $x^{\sigma}(j)$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\nu}(j)&=\Theta'(L(ji))x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{\nu}(i),\\ \varphi_{\sigma}(j)&=\Theta'(L(ji))x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{\sigma}(i),\\ x^{\mu}(i)\,\partial\varphi_{\mu}(j)/\partial x^{\sigma}(j)&=\Theta'(L(ji))\varphi_{\sigma}(i),\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

отсюда, исключая производную $\Theta'(L(ji))$, находим два соотношения:

$$\frac{\varphi_{\nu}(j)}{\varphi_{\sigma}(j)}=\frac{x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{\nu}(i)}{x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{\sigma}(i)}, \tag{32}$$

$$\frac{\varphi_{\nu}(j)}{x^{\mu}(i)\,\partial\varphi_{\mu}(j)/\partial x^{\sigma}(j)}=\frac{x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{\nu}(i)}{\varphi_{\sigma}(i)}, \tag{33}$$

которые выполняются тождественно по координатам точек i и j. Зафиксируем в первом из них координаты точки i: $\varphi_{\nu}/b_{\nu\mu}x^{\mu}=\varphi_{\sigma}/b_{\sigma\mu}x^{\mu}$, причем слева и справа нет суммирования по индексам ν и σ, т. е.

$$\varphi_{\mu}=cb_{\mu\nu}x^{\nu}, \tag{34}$$

где $b_{\mu\nu}=\mathrm{const}$, а c — некоторая функция координат. В силу предполагаемой независимости функций φ_{μ}, определитель матрицы коэффициентов $b_{\mu\nu}$ должен быть отличен от нуля и, кроме того, $c\neq 0$.

Итак, из первого соотношения (32) было получено выражение (34), на которое второе соотношение (33) налагает некоторые дополнительные ограничения. Положим в нем сначала $i=j$:

$$\frac{\varphi_{\nu}(j)}{x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(j)/\partial x^{\sigma}(j)}=\frac{x^{\mu}(j)\,\partial\varphi_{\mu}(j)/\partial x^{\nu}(j)}{\varphi_{\sigma}(j)},$$

а затем $\nu=\sigma$, отсюда получаем $\varphi_{\nu}=a_{\nu}x^{\mu}\,\partial\varphi_{\mu}/\partial x^{\nu}$, причем в правой части по индексу ν нет суммирования и $a_{\nu}^{2}=1$. Подставляя последнее соотношение в предыдущее, получим $a_{\nu}a_{\sigma}=1$, а поскольку $a_{\nu}=1/a_{\nu}$, то $a_{\nu}=a_{\sigma}=a$. Таким образом, следствием соотношения (33) является уравнение

$$\varphi_{\nu}=ax^{\mu}\,\partial\varphi_{\mu}/\partial x^{\nu}, \tag{35}$$

где $a^{2}=1$.

В уравнение (35), а также в исходные соотношения (32) и (33) подставим полученное ранее выражение (34), получим

$$b_{\mu\sigma}x^{\mu}x^{\sigma}\,\partial c/\partial x^{\nu}=(ab_{\nu\mu}-b_{\mu\nu})x^{\mu}c, \tag{36}$$

$$b_{\nu\mu}x^{\mu}(j)/b_{\sigma\mu}x^{\mu}(j)=\frac{b_{\mu\nu}x^{\mu}(j)c(i)+b_{\mu\varepsilon}x^{\mu}(j)x^{\varepsilon}(i)\,\partial c(i)/\partial x^{\nu}(i)}{b_{\mu\sigma}x^{\mu}(j)c(i)+b_{\mu\varepsilon}x^{\mu}(j)x^{\varepsilon}(i)\,\partial c(i)/\partial x^{\sigma}(i)}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}&\frac{b_{\nu\mu}x^{\mu}(j)c(j)}{b_{\mu\sigma}x^{\mu}(i)c(j)+b_{\mu\varepsilon}x^{\mu}(i)x^{\varepsilon}(j)\,\partial c(j)/\partial x^{\sigma}(j)}=\\ &=\frac{b_{\mu\nu}x^{\mu}(j)c(i)+b_{\mu\varepsilon}x^{\mu}(j)x^{\varepsilon}(i)\,\partial c(i)/\partial x^{\nu}(i)}{b_{\sigma\mu}x^{\mu}(i)c(i)}.\end{aligned} \tag{38}$$

Далее соотношения (36), (37), (38) естественно исследовать, предполагая, что либо $b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}$ для всех индексов μ, ν, либо $b_{\mu\nu} \neq ab_{\nu\mu}$ для некоторых индексов μ, ν. Рассмотрим сначала первый случай:

$$b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}, \tag{39}$$

когда матрица коэффициентов $b_{\mu\nu}$ в выражении (34) симметрична $(a = +1)$ или антисимметрична $(a = -1)$ по перестановке индексов μ и ν. Соотношение (37) в случае (39) значительно упростится: $b_{\nu\mu} x^{\mu}(j)\, \partial c(i)/\partial x^{\sigma}(i) = b_{\sigma\mu} x^{\mu}(j)\, \partial c(i)/\partial x^{\nu}(i)$, отсюда, дифференцируя по координате $x^{\mu}(j)$, получаем связь производных $b_{\nu\mu} \partial c/\partial x^{\sigma} = b_{\sigma\mu} \partial c/\partial x^{\nu}$. Используя полученную связь, покажем, что $c = \mathrm{const}$. Действительно, предположим, что хотя бы одна из производных функции c не обращается в нуль, напр., $\partial c/\partial x^{\nu'} \neq 0$. Тогда при $\sigma = \nu'$ из предыдущей связи находим $b_{\nu\mu} = b_{\nu'\mu} \partial c/\partial x^{\nu} (\partial c/\partial x^{\nu'})^{-1}$. Но при таком мультипликативном расщеплении индексов ν и μ в коэффициентах $b_{\nu\mu}$ определитель их матрицы обращается в нуль, что противоречит независимости функций (34). Таким образом, предположение о том, что хотя бы одна из производных функции c не обращается в нуль, приводит к противоречию. Следовательно, $\partial c/\partial x^{\mu} = 0$, $\mu = 1, \ldots, n$, и поэтому $c = \mathrm{const}$ при условии (39).

Рассмотрим теперь второй случай, когда

$$b_{\mu\nu} \neq ab_{\nu\mu} \tag{40}$$

для некоторых индексов μ, ν, причем, как это следует из уравнения (36), $b_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = 0$.

Подставим уравнение (36) в соотношение (38):

$$b_{\nu\mu} x^{\mu}(j)/[b_{\mu\sigma} x^{\mu}(i) + c_{\sigma}(j)\tilde{c}_{\mu}(j) x^{\mu}(i)] =$$

$$= [b_{\mu\nu} x^{\mu}(j) + c_{\nu}(i)\tilde{c}_{\mu}(i) x^{\mu}(j)]/b_{\sigma\mu} x^{\mu}(i), \tag{41}$$

где введены новые обозначения: $c_{\nu} = (ab_{\nu\mu} - b_{\mu\nu}) x^{\mu}/b_{\mu\varepsilon} x^{\mu} x^{\varepsilon}$, $\tilde{c}_{\mu} = b_{\mu\varepsilon} x^{\varepsilon}$, из которых следует, что $c_{\nu} \neq 0$ и $\tilde{c}_{\mu} \neq 0$ для некоторых индексов ν и μ. По равенству (41) получаем

$$b_{\mu\nu} x^{\mu}(j) + c_{\nu}(i)\tilde{c}_{\mu}(i) x^{\mu}(j) = A(i, j) b_{\nu\mu} x^{\mu}(j), \tag{42}$$

где для коэффициента $A(i, j)$ имеем перестановочное свойство

$$A(i, j) A(j, i) = 1. \tag{43}$$

Предположим, далее, что в рамках условия (40) коэффициент $A(i, j)$ зависит от координат обеих точек i и j явным образом:

$$A(i, j) \neq A(i) \text{ и } A(i, j) \neq A(j). \tag{44}$$

Продифференцируем соотношение (42), выполняющееся тождественно, по координате $x^{\mu}(j)$:

$$b_{\mu\nu} + c_{\nu}(i)\tilde{c}_{\mu}(i) = b_{\nu\mu} A(i, j) + b_{\nu\varepsilon} x^{\varepsilon}(j)\, \partial A(i, j)/\partial x^{\mu}(j),$$

после чего зафиксируем все координаты точки j: $b_{\mu\nu} = A(i) b_{\nu\mu} - c_{\nu}(i)\tilde{c}_{\mu}(i) + d_{\nu}\tilde{d}_{\mu}(i)$. Полученную связь подставим в исходное соотношение (42), разрешим его относительно $b_{\nu\mu} x^{\mu}(j)$ и продифференцируем по $x^{\mu}(j)$:

$$b_{\nu\mu} = d_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu(j)} \left(\frac{\tilde{d}_s(i)\, x^s(j)}{A(i,\ j) - A(i)} \right),$$

причем в силу предположения (44) знаменатель $A(i,\ j) - A(i)$ в правой части отличен от нуля. Но мультипликативное расщепление индексов ν и μ в полученном для $b_{\nu\mu}$ выражении означает, что определитель матрицы $b_{\mu\nu}$ равен нулю, что противоречит независимости функций (34).

Предположим, что

$$A(i,\ j) = A(i) \text{ или } A(i,\ j) = A(j) \tag{45}$$

дополнительно к условию (40). Перестановочное свойство (43) в этом случае означает, очевидно, что

$$A(i,\ j) = A = \pm 1. \tag{43$'$}$$

Соотношение (42) продифференцируем по координате $x^\mu(j)$, учитывая (43′): $b_{\mu\nu} + c_\nu(i)\tilde{c}_\mu(i) = Ab_{\nu\mu}$, откуда следует $c_\nu(i)\tilde{c}_\mu(i) = c_\nu(j)\tilde{c}_\mu(j)$. Пусть при некотором $\nu = \nu'$ отличен от нуля коэффициент $c_{\nu'}$. Тогда $\tilde{c}_\mu(i) = c_{\nu'}(j)\tilde{c}_\mu(j)/c_{\nu'}(i)$ и поскольку по введенному в соотношении (40) обозначению $\tilde{c}_\mu(i) = b_{\mu\nu}\, x^\nu(i)$, имеем $b_{\mu\nu}\, x^\nu(i) = c_{\nu'}(j)\tilde{c}_\mu(j)/c_{\nu'}(i)$. Дифференцируя этот результат по координате $x^\nu(i)$, получаем мультипликативное расщепление индексов μ и ν в выражении для коэффициентов $b_{\mu\nu}$ функций (34), что противоречит их независимости.

Таким образом, условие (41) необходимо приводит к противоречию с независимостью функций (34) и поэтому не может выполняться. Остается только условие (39), при котором, как было показано выше, в выражениях (34) $c = \text{const}$. Без ограничения общности, очевидно, можно положить $c = 1$ и тогда

$$\varphi_\mu = b_{\mu\nu}\, x^\nu, \tag{46}$$

причем $b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}$, и матрица коэффициентов $b_{\mu\nu}$ невырожденная. В случае $a = -1$, когда $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$, порядок матрицы $b_{\mu\nu}$, равный n, должен быть четным, т. е. $n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$ Подставим найденные выражения (46) для функций φ_μ в определение метрики (29):

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}\, x^\mu(i)\, x^\nu(j), \tag{47}$$

где $b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}$, $a = \pm 1$, которая оказывается либо симметричной ($a = +1$), либо антисимметричной ($a = -1$), т. е. $L(ij) = aL(ji)$. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим более подробно геометрическую интерпретацию полученных результатов. Предположим сначала, что $a = +1$, т. е. метрика $L(ij)$ симметрична:

$$L(ij) = L(ji). \tag{48}$$

Выражение (15) в этом случае будет следующим:

$$L(ij) = x(i) + x(j), \tag{15$'$}$$

т. е. $\exp L(ij)$ локально представляет собой скалярное произведение.

Выражение (28) при $a = +1$ запишется так:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu}\, x^\mu(i)\, x^\nu(j) + x^n(i) + x^n(j), \tag{28$'$}$$

где $b_{\mu\nu}=b_{\nu\mu}$. Пусть для всех точек $i \in \mathfrak{M}$ дополнительно выполняется условие $L(ii)=0$, которое уменьшает число независимых координат, т. к. $2x^n + b_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$. Если воспользоваться этой связью координат, то для метрики (28′) получим выражение $L(ij) = -0{,}5 b_{\mu\nu} (x^\mu(i) - x^\mu(j))(x^\nu(i) - x^\nu(j))$. Вследствие симметрии и невырожденности матрицы $b_{\mu\nu}$ можно ввести такую локальную обратимую замену координат $x \to y$, что эта квадратичная форма станет диагональной:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \varepsilon_\mu (y^\mu(i) - y^\mu(j))^2, \tag{49}$$

причем $\varepsilon_\mu = \pm 1$. Полученное выражение (49) задает локально симметричную невырожденную квадратичную метрику в евклидовом или псевдоевклидовом пространстве. Вопрос об интерпретации исходного выражения (28′) без дополнительного условия $L(ii)=0$ остается открытым.

Выражение (47) при $a=+1$, когда $b_{\mu\nu}=b_{\nu\mu}$, диагонализируем некоторой локально обратимой заменой координат $x \to y$:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n} \varepsilon_\mu y^\mu(i) y^\mu(j), \tag{50}$$

где $\varepsilon_\mu = \pm 1$. Метрику (50) естественно интерпретировать как симметричное скалярное произведение в некотором евклидовом или псевдоевклидовом пространстве. Налагая на нее естественное дополнительное условие $L(ii) = \mathrm{const}$, выделяем класс неевклидовых пространств постоянной кривизны (гиперсферы).

Предположим теперь, что $a=-1$, т. е. метрика $L(ij)$ антисимметрична:

$$L(ij) = -L(ji).$$

Выражения (15), (28), (47) при $a=-1$ запишем соответственно так:

$$L(ij) = x(i) - x(j), \tag{15″}$$

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(j) + x^n(i) - x^n(j), \quad n = 3,\ 5,\ \ldots, \tag{28″}$$

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(j), \quad n = 2,\ 4,\ \ldots, \tag{47″}$$

причем $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$. Первые два выражения (15″) и (28″) задают нелинейную невырожденную метрику симплектического пространства *нечетной* размерности, в то время как третье выражение (47″) задает обычную билинейную невырожденную метрику симплектического пространства *четной* размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров Ю. С. Пространство — время: явные и скрытые размерности.— М. Наука, 1989.— 191 с.

2. Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г. Г.).— Новосибирск, 1968.— 226 с.

3. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // ДАН СССР.— 1972.— Т. 206.— № 5.— С. 1056—1058.

4. Кулаков Ю. И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // ДАН СССР.— 1970.— Т. 193.— № 5.— С. 985—987.

г. Новосибирск

Поступила
25.12.1989