

Г.Г.МИХАЙЛИЧЕНКО

К ВОПРОСУ О СИММЕТРИИ РАССТОЯНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

Обычно расстояние $L(ij)$ между точками i и j пространства \mathcal{M} определяется с помощью некоторой функции $L: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей системе метрических аксиом. Одной из основных аксиом этой системы является аксиома симметрии, согласно которой для любых точек $i, j \in \mathcal{M}$ выполняется равенство $L(ij) = L(ji)$, т.е. предполагается, что расстояние симметрично. Однако в геометрии нельзя исключить из рассмотрения так называемые симплектические пространства, для которых "расстояние" $L(ij)$ определяется с помощью антисимметричной функции, так что $L(ij) = -L(ji)$. И хотя такую функцию обычно не называют метрикой, но в некотором более широком смысле она, как функция пары точек, все же может рассматриваться в качестве метрики, а ее значение $L(ij)$ для $(ij) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ называться расстоянием. Аналогично, симметричный интервал между двумя событиями в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского есть расстояние между ними в некотором более широком смысле, т.к. для него выполняются не все метрические аксиомы. Естественно возникает вопрос: почему в геометрии рассматриваются только симметричные и антисимметричные расстояния? Оказывается, что если предположить существование какой-либо функциональной связи между расстояниями $L(ij)$ и $L(ji)$, то будут возможны только такие два типа симметрии. Перейдем к более подробному изложению и точным формулировкам.

Пусть $\mathcal{M} = \{i, j, k, \dots\}$ — множество произвольной природы. Расстояние между точками этого множества определим с помощью некоторого функционального соответствия $L: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, область определения $\mathcal{S}_L \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ которого не обязательно совпадает со всем прямым произведением $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Каждой паре $(ij) \in \mathcal{S}_L$ соответствие L сопоставляет некоторое число $L(ij) \in \mathbb{R}$, называемое расстоянием от точки i до точки j . Расстояния $L(ij)$ и $L(ji)$ в общем случае различны и мы будем предполагать, что они определены или не определены одновременно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функциональные соответствия $L: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ и $L': \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ эквивалентны, если совпадают их области определения \mathcal{S}_L и $\mathcal{S}_{L'}$, и существует строго монотонная функция $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любой пары $(ij) \in \mathcal{S}_L$ имеет место равенство $L'(ij) = \psi(L(ij))$.

Исходя из замечания в работе Ю.И.Кулакова [1], будем аксиому симметрии формулировать следующим образом:

АКСИОМА СИММЕТРИИ. Для любых двух точек $i, j \in \mathfrak{M}$ таких, что пары $\langle ij \rangle$ и $\langle ji \rangle$ принадлежат \mathfrak{S}_L , расстояния $L(ij)$ и $L(ji)$ связаны соотношением

$$L(ij) = \theta(L(ji)), \quad (1)$$

где θ – некоторая строго монотонная функция одной переменной, область определения и область значений которой совпадает с областью значений $L(\mathfrak{S}_L)$ исходного функционального соответствия L .

ТЕОРЕМА. Если расстояние между точками пространства \mathfrak{M} , определяемое с помощью функционального соответствия $L: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяет аксиоме симметрии, то это расстояние может быть либо симметричным, либо, с точностью до эквивалентности, антисимметричным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (1) для любой пары $\langle ij \rangle \in \mathfrak{S}_L$ получаем соотношение $\theta(\theta(L(ij))) = L(ij)$, из которого следует, что функция θ является решением функционального уравнения

$$\theta(\theta(x)) = x, \quad (2)$$

где $x \in L(\mathfrak{S}_L) \subset \mathbb{R}$. По предположению функция θ строго монотонная и имеет обратную. Если функция θ монотонно возрастает, то $\theta(x) = x$ и расстояние оказывается симметричным. Если функция θ монотонно убывает, то, перейдя к эквивалентному функциональному соответствию $L'(ij) = \psi(L(ij))$, где $\psi(x) = x - \theta(x)$ (очевидно, строго монотонно возрастающая функция), имеем в силу (1)

$$L'(ij) = L(ij) - \theta(L(ij)) = L(ij) - L(ji), \quad (3)$$

т.е. L' – антисимметричное расстояние. Теорема доказана.

Симметрия или антисимметрия расстояния при наличии некоторой связи (1) были установлены автором в [2] для того случая, когда это расстояние определялось с помощью функционального соответствия $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (задающего на n -мерных многообразиях \mathfrak{M} и \mathfrak{N} физическую структуру ранга $(n+1, n+1)$) и некоторого локального диффеоморфизма $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$:

$$L(ij) = f(i, \varphi(j)). \quad (4)$$

Для расстояния (4) соотношение (1) при известном соответствии f переходит в функциональное уравнение

$$f(i, \varphi(j)) = \theta(f(j, \varphi(i))) \quad (5)$$

относительно функции θ и диффеоморфизма φ . Решая уравнение (5) для соответствий

$$\begin{aligned} f(i\alpha) &= x^1(i)\xi^1(\alpha) + \dots + x^n(i)\xi^n(\alpha), \\ f(i\alpha) &= x^1(i)\xi^1(\alpha) + \dots + x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha) + x^n(i) + \xi^n(\alpha), \end{aligned} \quad (6)$$

приведенных в работе [3], можно найти одновременно и диффеоморфизм φ и функцию θ , определяющую тип симметрии расстояния (4). В специальной системе локальных координат $x =$

$= (x^1, \dots, x^{n-1}, x^n)$ в многообразии \mathfrak{M} выражения для расстояния $L(i, j)$ (с точностью до локальной эквивалентности) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} L(i, j) &= g_{\lambda\sigma} x^\lambda(i) x^\sigma(j), \\ L(i, j) &= h_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(j) + x^n(i) + \alpha x^n(j), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha = \pm 1$; $g_{\lambda\sigma} = \alpha g_{\sigma\lambda}$, $\lambda, \sigma = 1, \dots, n$; $h_{\mu\nu} = \alpha h_{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 1, \dots, n-1$, причем для $\alpha = -1$ размерность n многообразия \mathfrak{M} четна в первом из выражений (7) и нечетна во втором.

Из выражений (7) при некоторых естественных дополнительных условиях можно получить симметричные метрики римановых и псевдоримановых пространств постоянной кривизны ($\alpha = +1$), а также антисимметричные метрики симплектических пространств четной и, обратим внимание, нечетной размерности ($\alpha = -1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю.И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур* // ДАН СССР. - 1970. - Т.193. - №5. - С.985-987.
2. Михайличенко Г.Г. *Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства (в рамках теории физических структур)* // Изв. вузов. Математика. - 1991. - №6. - С.28-35.
3. Михайличенко Г.Г. *Решения функциональных уравнений в теории функциональных структур* // ДАН СССР. - 1972. - Т.206. - №5. - С.1056-1058.

г. Новосибирск

Поступила
19.05.1993