УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 198

6. *Neittaanmaki P., Tiba D.* A varitional inequality apprach to constrained control problems for parabolic equations // Ibid.— 1988.— **17**, N 3.— P. 185—201.
7. *Калантаров В. К., Ладыженская О. А.* Явления коллапса для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1977.— **69**.— С. 77—102.
8. *Галактионов В. А.* Об условиях отсутствия лобальных решений одного класса квазилинейных параболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1982.— **22**, № 2.— С. 322—338.
9. *Мельник В. С.* Экстремальные задачи для эволюционных уравнений с операторными ограничениями // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989.— № 3.— С. 72—75.
10. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Об оптимальном управлении для эволюционных уравнений с многозначными операторами // Докл. АН СССР.— 1987.— **297**, № 6.— С. 1010—1013.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев

Получено 24.01.89

УДК 512.816

Г. Г. Михайличенко

Групповая симметрия геометрии двух множеств

Рассмотрим две локальные r-мерные группы Ли $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ преобразований m-мерного многообразия $\mathfrak{M}$ и n-мерного многообразия $\mathfrak{N}$ соответственно, порождающие отображения которых задаются функциями

$$x' = \lambda(x, a), \quad \xi' = \sigma(\xi, a), \tag{1}$$

где $a = (a^1, \ldots, a^r)$ — параметры группы G^r, $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — координаты многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Отображения (1) представляют собой эффективные действия группы G^r (см. [1], гл. 1, § 1) с законом умножения

$$ab = \varphi(a, b), \tag{2}$$

которая называется параметрической группой групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$.

Локальные действия группы G^r задаются двумя r-мерными алгебрами Ли с базисными операторами

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\,\partial/\partial x^\mu, \quad \Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\,\partial/\partial\xi^\nu, \tag{3}$$

где $\omega = 1, \ldots, r$; $\mu = 1, \ldots, m$; $\nu = 1, \ldots, n$. Заметим, что в базисах (3) коммутационные соотношения этих двух алгебр одинаковы с точностью до совпадения структурных констант, так как группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ имеют одну и ту же параметрическую группу.

Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ называются подобными, если существует такой локальный диффеоморфизм $w: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, при котором действия (1) переходят друг в друга, т. е. выполняется равенство

$$w(\lambda(x, a)) = \sigma(w(x), a). \tag{4}$$

Ясно, что этот диффеоморфизм переводит базисные операторы (3) одной алгебры Ли в соответствующие базисные операторы другой.

Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ называются изоморфно подобными, если существует такой локальный диффеоморфизм v: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ и такой локальный автоморфизм $u: G^r \to G^r$, при которых действия (1) переходят друг в друга:

$$v(\lambda(x, a)) = \sigma(v(x), u(a)). \tag{5}$$

Автоморфизм u индуцирует линейное преобразование базисов (3), причем структурные константы коммутационных соотношений в новых и старых базисах будут совпадать. Диффеоморфизм v и автоморфизм u в случае изоморфного подобия групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ переводят базис (3) одной алгебры Ли в базис другой.

Подобные группы преобразований, очевидно, изоморфно подобны, однако изоморфно подобные группы не обязательно подобны. Приведем пример из работы [2]. Рассмотрим две трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости с базисными операторами

$$X_1 = \partial/\partial x, \quad X_2 = y\partial/\partial x, \quad X_3 = -\partial/\partial y,$$
$$\Xi_1 = \partial/\partial\xi, \quad \Xi_2 = \partial/\partial\eta, \quad \Xi_3 = \eta\partial/\partial\xi, \tag{6}$$

имеющие в заданных базисах одинаковые структурные константы. Переход в первой алгебре к базису X_1, $-X_3$, X_2 и тривиальная замена координат $\xi = x$, $\eta = y$ приводят к совпадению с базисными операторами второй алгебры. Если же в первой алгебре не переходить к указанному базису, то в базисах (6) никакая замена координат $\xi = v(x, y)$, $\eta = w(x, y)$ не приведет к совпадению выражений для базисных операторов. Докажем это, предположив обратное. Для функций $v(x, y)$ и $w(x, y)$ из формул преобразований трех базисных операторов первой алгебры из (6) и сравнения их с соответствующими операторами второй получаем систему шести уравнений

$$v_x = 1, \quad w_x = 0, \quad yv_x = 0,$$
$$yw_x = 1, \quad -v_y = w, \quad -w_y = 0,$$

которая явно несовместна. Таким образом, группы преобразований

$$x' = x + a^1 + a^2 y - a^2 a^3/2, \tag{7}$$
$$y' = y - a^3,$$

$$\xi' = \xi + a^1 + a^3\eta + a^2 a^3/2, \tag{8}$$
$$\eta' = \eta + a^2$$

с базисными операторами (6) соответствующих алгебр Ли изоморфно подобны, но не подобны.

Заметим, что Г. Э. Бредон (см. [1], гл. I, § 2) отмечает различие между подобием и изоморфным подобием групп преобразований (эквивалентностью и слабой эквивалентностью действий группы по его терминологии). Однако он считает, что изоморфно подобные и подобные группы преобразований можно рассматривать «как по существу идентичные». Т. е. различию между подобием и изоморфным подобием Г. Э. Бредон особого значения не придает. Но это различие, как будет показано ниже, оказывается существенным при нахождении двухточечных инвариантов $f(x, \xi)$ для групп преобразований (1).

Группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ с порождающими отображениями (1), имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r, можно рассматривать как группу преобразований $(m+n)$-мерного многообразия $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Обозначим эту группу через $G^r(\lambda, \sigma)$ и назовем ее взаимным расширением групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$. Будем считать расширение $G^r(\lambda, \sigma)$ подобным или неподобным в зависимости от того, подобны или не подобны исходные группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$. Заметим, что для неподобного взаимного расширения исходные группы могут оказаться изоморфно подобными, однако, в общем случае, такого подобия может и не быть, даже если $m = n$. Подобное расширение используется в обычной геометрии одного множества для определения инвариантной метрики, в то время как неподобное расширение задает группу движений геометрии двух множеств [3].

Пусть имеется функция $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ с гладким координатным представлением

$$f(x, \xi) = f(x^1, \ldots, x^m, \xi^1, \ldots, \xi^n), \tag{9}$$

сопоставляющая паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторое число. Функцию f назовем метрикой в геометрии двух множеств, определяемой группами $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, если она является инвариантом их взаимного расширения $G^r(\lambda, \sigma)$,

т. е. если выполняется уравнение сохранения

$$f(\lambda(x, a), \sigma(\xi, a)) = f(x, \xi). \tag{10}$$

Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности [4, с. 229] функция (9) будет инвариантом группы (1) в том и только в том случае, если эта функция удовлетворяет системе уравнений $X_\omega f + \Xi_\omega f = 0$ с операторами (3) или в координатной форме

$$\lambda_\omega^\mu(x)\, \partial f/\partial x^\mu + \sigma_\omega^\nu(\xi)\, \partial f/\partial \xi^\nu = 0. \tag{11}$$

Будем говорить, что функция (9) от координат x и ξ зависит существенным образом, если ни для каких локально обратимых замен координат $y = y(x)$ и $\eta = \eta(\xi)$ в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ ее нельзя записать в следующем виде:

$$f(x, \xi) = f(y^1, \ldots, y^p, \eta^1, \ldots, \eta^q), \tag{9'}$$

где или $p \leqslant m - 1$ и $q \leqslant n$, или $p \leqslant m$ и $q \leqslant n - 1$. Метрику f назовем невырожденной, если в представление (9) координаты x и ξ входят существенным образом.

Обратим особое внимание на то обстоятельство, что двухточечные инварианты (9) подобных и неподобных взаимных расширений $G^r(\lambda, \lambda)$ и $G^r(\lambda, \sigma)$ изоморфно подобных, но не подобных групп преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ могут оказаться различными. Например, для подобного расширения группы (7) собою же инвариант $f(x, y, \xi, \eta)$ вырожден:

$$f = \psi(y - \eta), \tag{12}$$

в то время как для неподобного расширения изоморфно подобных групп (7) и (8) он невырожден:

$$f = \psi(x - \xi - y\eta), \tag{13}$$

где ψ — произвольная функция одной переменной.

Сформулируем теперь задачу, естественным образом вытекающую из изложенного выше: для данных значений r, m, n найти с точностью до подобия (замены координат) все функции (9), являющиеся невырожденными инвариантами некоторой группы (1).

Заметим, что при заданной группе (1) решение уравнения (10) является одной из классических задач теории инвариантов групп Ли преобразований. Если же известно только число параметров a в группе (1), то в общем случае без предварительной с точностью до подобия полной классификации групп преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ сформулированная выше задача не может быть решена.

Определим теперь согласно [3] феноменологически симметричную геометрию двух множеств. Для невырожденной метрики $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ с локальным координатным представлением (9) построим отображение $F: \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1} \to R^{(m+1)(n+1)}$, сопоставляя кортежу из $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ все возможные по метрике f расстояния. Будем говорить, что функция f задает на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру по [5]) ранга $(n + 1, m + 1)$, если локально множество значений отображения F принадлежит множеству нулей некоторой функции Φ от $(m + 1) \times (n + 1)$ переменных с $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$ на плотном в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ подмножестве.

Движение в геометрии двух множеств есть пара преобразований $x' = \lambda(x)$, $\xi' = \sigma(\xi)$, сохраняющих метрику (9). В работе [3] установлено, что для феноменологически симметричной геометрии двух множеств невырожденная метрика f допускает группу движений (1), содержащую $r = mn$ и не более параметров a, причем эти параметры существенны и независимы в каждом из преобразований множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

В настоящей работе сформулированная выше задача решается полностью для случая $r = mn$, $n \geqslant m = 1$, когда первый этап ее решения —

классификация групп преобразований с точностью до подобия — сравнительно несложен, так как в нем может быть использована классификация С. Ли. Множество $\mathfrak{M}$ в рассматриваемом случае будет одномерным многообразием, а множество $\mathfrak{N}$ — n-мерным.

Запишем для рассматриваемого случая координатное представление (9) метрики f:

$$f(x, \xi) = f(x, \xi^1, \ldots, \xi^n), \tag{14}$$

где $x = x^1$, группа движений (1) которой зависит от n существенных параметров:

$$\begin{gathered} x' = \lambda(x, a^1, \ldots, a^n), \\ \xi'^n = \sigma^\nu(\xi^1, \ldots, \xi^n, a_1, \ldots, a^n), \end{gathered} \tag{15}$$

где $\nu = 1, \ldots, n$.

Из невырожденности метрики (9) в общем случае произвольных значений r, m, n не следует транзитивность группы G^r (λ) (или G^r (σ)) в группе движений (1), даже если $r \geqslant m$ (или $r \geqslant n$). Например, для группы SO (3) вращений трехмерного пространства R^3 имеется невырожденный двухточечный инвариант ее подобного расширения на $R^3 \times R^3$, хотя действие этой группы на R^3 интранзитивно. В некоторых же частных случаях транзитивность группы G^r (λ) (или G^r (σ)) может быть доказана, если, конечно, $r \geqslant m$ (или $r \geqslant n$).

Лемма 1. *Если группа преобразований* (15) *является группой движений некоторой невырожденной метрики* (14), *то группа* G^n (σ) *преобразований* n*-мерного многообразия* $\mathfrak{N}$ *просто транзитивна.*

Запишем систему уравнений (11) для сохраняющейся метрики (14):

$$\lambda_\omega(x)\, \partial f/\partial x + \sigma^\nu_\omega(\xi^1, \ldots, \xi^n)\, \partial f/\partial \xi^\nu = 0,$$

где ν, $\omega = 1, \ldots, n$, причем функции λ_ω (x) и σ^ν_ω (ξ) линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами c_ω, так как независимые параметры a в каждое из преобразований группы движений (15) входят существенным образом. Предположим противное, т.е. что группа G^n (σ) интразитивна. Тогда общий ранг квадратной матрицы σ^ν_ω (ξ) будет меньше n [4, с. 223]. А это означает, что найдутся такие переменные коэффициенты c^ω (ξ), не все равные нулю одновременно, для которых выполняется равенство $c_\omega \sigma^\nu_\omega$ $(\xi) = 0$. Тогда система уравнений для f преобразуется к одному уравнению c^ω $(\xi)\lambda_\omega$ (x) $\partial f/\partial x = 0$, в котором c^ω (ξ) λ_ω $(x) \neq 0$, так как коэффициенты c^ω (ξ) не зависят от координаты x. Следовательно, $\partial f/\partial x = 0$ и метрика f оказывается вырожденной, хотя по условию леммы она невырожденна. Полученное противоречие доказывает, что группа G^n (σ) транзитивна, а поскольку ее размерность совпадает с размерностью преобразуемого многообразия $\mathfrak{N}$, она просто транзитивна.

Группа G^n (λ) в группе движений (15) есть группа преобразований одномерного многообразия $\mathfrak{M}$, поэтому можно воспользоваться соответствующими классификационными результатами С. Ли, которые хорошо известны [6, с. 24—27].

Теорема 1 (С. Ли). *Максимальное число существенных параметров в группе* G^n (λ) *преобразований одномерного многообразия* $\mathfrak{M}$ *равно трем. С точностью до изоморфного подобия однопараметрическая, двухпараметрическая и трехпараметрическая группы преобразований* $\mathfrak{M}$ *задаются соответственно следующими функциями:*

$$x' = x + a, \tag{16}$$

$$x' = a^1 x + a^2, \tag{17}$$

$$x' = (a^1 x + a^2)/(a^3 x + a^4), \tag{18}$$

причем в последнем случае $a^1 a^4 - a^2 a^3 = 1$.

Отметим, что С. Ли проводил классификацию групп преобразований не с точностью до подобия, а с точностью до изоморфного подобия в каждом изо-

морфном классе G^r. Это следует из его определений, а также из анализа его метода, воспроизведенного, например, в монографии Н. Г. Чеботарева [7]. Однако при нахождении двухточечных инвариантов (9) такая точность, как показывает рассмотренный выше пример инвариантов (12), (13) для групп (7) и (8), оказывается недостаточной. Т. е. классификационные результаты С. Ли предварительно должны быть уточнены в пределах подобия, для чего может оказаться полезной следующая лемма.

Лемма 2. *Если группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ с порождающими отображениями* (1) *изоморфно подобны, но не подобны, то параметрическая группа G^r имеет внешние автоморфизмы.*

Лемма достаточно очевидна, так как если $v(x)$ и $u(a)=bab^{-1}$ для некоторого в $b \in G^r$ являются решением уравнения (5), то решением уравнения (4) будет диффеоморфизм $w(x) = v(\lambda(x, b))$. Заметим, однако, что если группа G^r имеет внешние автоморфизмы, то не обязательно существуют такие ее действия, которые изоморфно подобны, но не подобны.

Лемма 3. *Классификация групп $G^r(\lambda)$ преобразований одномерного многообразия $\mathfrak{M}$ с точностью до изоморфного подобия (см. теорему* 1) *совпадает с их классификацией с точностью до подобия.*

Для $n = 1$ и $n \geqslant 4$ лемма очевидна, а для $n=2$ и $n=3$ она следует из предыдущей леммы, так как соответствующие параметрические группы G^2 и G^3, как известно, имеют только внутренние автоморфизмы.

Теорема 2. *Невырожденные двухточечные инварианты* (14) *группы* (15) *существуют только для $n = 1, 2, 3$ и не существуют для $n \geqslant 4$. С точностью до подобия (замены координат) невырожденная метрика* (14) *определяется для $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ соответственно следующими выражениями:*

$$f(x, \xi) = \psi(x + \xi), \tag{19}$$

$$f(x, \xi^1, \xi^2) = \psi(x\xi^1 + \xi^2), \tag{20}$$

$$f(x, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \psi((x\xi^1 + \xi^2)/(x + \xi^3)), \tag{21}$$

где ψ — произвольная функция одной переменной.

Если преобразования (15) являются группой движений метрики (14), то для нее выполняется уравнение сохранения (10). По лемме 1 группа $G^n(\sigma)$ в группе движений (15) просто транзитивна, а все просто транзитивные группы $G^n(\sigma)$ подобны своей параметрической группе G^n [4, с. 225]. Поэтому в уравнении (10) можно положить $\sigma(\xi, a) = \varphi(\xi, a)$, где функция φ определяет закон умножения (2) в параметрической группе. Если $a_0 \in G^n$ есть единичный элемент, то, полагая в уравнении (10) $\xi = a^{-1}$, получаем $f(\lambda(x, a), a_0) = f(x, a^{-1})$. Если, далее, ввести удобные обозначения $f(x, a^{-1}) \to f(x, a)$, $f(\lambda(x, a), a_0) \to \psi(\lambda(x, a))$, $a \to \xi$, то получим следующее решение:

$$f(x, \xi) = \psi(\lambda(x, \xi)), \tag{22}$$

причем функция ψ — произвольная функция одной переменной в силу свойств исходного уравнения (10). Используя для $n = 1, 2, 3$ выражения (16)—(18), получаем из решения (22) соответственно двухточечные инварианты (19)—(21). В выражении (18) при этом надо перейти к существенным параметрам, разделив числитель и знаменатель на a^3. Для $n \geqslant 4$ двухточечный инвариант (22) будет вырожден, так как согласно теореме 1 максимальное число существенных параметров в группе $G^n(\lambda)$ равно трем.

Заметим, что результаты теоремы 2 были получены ранее [8] без предварительной классификации групп преобразований, что подтверждает связь групповой и феноменологической симметрий в геометрии двух множеств, установленную в работе [3]. Можно также считать, что сформулированная в настоящей работе задача полностью решена методами теории физических структур для произвольных m и n, если $r = mn$ [9]. Решение ее групповыми методами вряд ли возможно, так как не решена проблема классификации групп преобразований не только с точностью до подобия, но и с точностью до изоморфного подобия, даже для трехмерных многообразий.

1. *Бредон Г. Э.* Введение в теорию компактных групп преобразований.— М. : Наука, 1980.— 440 с.
2. *Михайличенко Г. Г.* Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости // Сиб. мат. журн.— 1982.— **23**, № 5.— С. 132—141.
3. *Михайличенко Г. Г.* Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств // Докл. АН СССР.— 1985.— **284**, № 1.— С. 39—41.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
5. *Кулаков Ю. И.* О теории физических структур // Краевые задачи мат. физики и смежные вопросы теории функций: Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1983.— **127**.— С. 103—151.
6. *Владимиров С. А.* Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля.— М. : Атомиздат, 1979.— 168 с.
7. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли.— М. : Гостехиздат, 1940. — 396. с.
8. *Михайличенко Г. Г.* Об одной задаче в теории физических структур // Сиб. мат. журн.— 1977.— **18**, № 6.— С. 1342—1355.
9. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР.— 1972.— **206**, № 5.— С. 1056—1058.

Новосиб. пед. ин-т

Получено 30.09.87

УДК 517.956

В. В. Новиков

Устранимые множества стационарной системы Навье — Стокса

Предметом нашего изложения являются устранимые множества стационарной системы уравнений Навье—Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Как обычно, мы называем замкнутое множество E устранимым для системы Навье—Стокса для данного класса $K(\Omega)$ вектор-функций в области Ω, если любое классическое решение системы Навье—Стокса в $\Omega \setminus E$, принадлежащее $K(\Omega)$, можно продолжить на множество E так, что оно будет классическим решением системы Навье—Стокса во всей области Ω.

Хорошо известны теоремы об устранимых особенностях гармонических функций и некоторых линейных и нелинейных уравнений [1, 2, 4, 5].

Отсутствие принципа максимума, нелинейный и векторный характер системы Навье—Стокса делают невозможным применение методов, разработанных в упомянутых работах, для доказательства устранимости множеств для системы Навье—Стокса.

Рассмотрим стационарную систему уравнений Навье—Стокса:

$$\begin{gathered} -\nu\Delta v + (v, \nabla) v = -\nabla p + f, \\ \operatorname{div} v = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

в области Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, где $v(x)$ — скорость в точке x, $p(x)$ — давление в точке x, f — сила, $f \in C^\alpha(\Omega)$, $\nabla p \in L_2(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (1) называется вектор-функция v из $H(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $\Phi \in J(\Omega)$ интегральному тождеству [3]

$$\int_\Omega (\nu v_x \Phi_x + v_k v_{x_k} \Phi)\, dx = \int_\Omega f \Phi dx.$$

Обозначим $Lv = -\nu\Delta v + (v, \Delta) v + \Delta p - f$. Буквой C будем обозначать различные положительные постоянные, встречающиеся по ходу изложения.

Сначала рассмотрим случай множества E, состоящего из одной точки x_0, на плоскости и в пространстве.

Теорема 1. *Пусть точка $x_0 \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, v является классическим решением задачи* (1) *в области Ω без точки x_0, и $|v|$ принадлежит классу ограниченных функций в Ω в $\mathbb{R}^2$, $|v|$ принадлежит $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 6$, в $\mathbb{R}^3$ или v принадлежит $W_2^1(\Omega)$ в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.*