СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIV, № 5 Сентябрь — Октябрь 1973 г.

УДК 517.948

Г. Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

БИНАРНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (3.2)

В работе ([1]) введено понятие физической структуры. В настоящей работе рассмотрена бинарная физическая структура ранга (3.2) в смысле работы ([1]). Сформулируем задачу применительно к данному случаю.

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, элементы которых обозначаются строчными латинскими и греческими буквами соответственно и имеется также вещественная функция a: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R$, сопоставляющая каждой паре $\langle i, \alpha\rangle$ из прямого произведения $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ некоторое число $a_{i\alpha}\in R$. Два элемента $i, j\in\mathfrak{M}$ (соотв. α, $\beta\in\mathfrak{N}$) считаются эквивалентными: $i\sim j$ (соотв. $\alpha\sim\beta$), если для любого $\gamma\in\mathfrak{N}$ (соотв. $k\in\mathfrak{M}$) имеет место равенство $a_{i\gamma}=a_{j\gamma}$ (соотв. $a_{k\alpha}=a_{k\beta}$). Будем предполагать, что все элементы, эквивалентные друг другу, отождествлены, а неэквивалентные элементы считаются различными. В множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ можно определить отделимые топологии, введя фундаментальные системы окрестностей, так чтобы исходная функция a: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R$ была непрерывной. Обозначим через $P(i_0)$ и $Q(\alpha_0)$ открытые окрестности точек $i_0\in\mathfrak{M}$ и $\alpha_0\in\mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{M}^3=\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^2=\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$. Построим функцию A: $\mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^2\to R^6$, сопоставляя каждому кортежу $\langle ijk, \alpha\beta\rangle\in\mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^2$ числовую матрицу размера 3×2

$$a(ijk,\alpha\beta)=\begin{Vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta}\\ a_{j\alpha} & a_{j\beta}\\ a_{k\alpha} & a_{k\beta}\end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

рассматриваемую как точка пространства R^6, т. е. $a(ijk, \alpha\beta)=(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta})\in R^6$. Легко понять, что функция A: $\mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^2\to R^6$ также непрерывна. Обозначим через N множество значений построенной функции. Поскольку $N\subset R^6$, множество N становится топологическим пространством, если его наделить индуцированной топологией. При этом окрестности точки относительно N есть следы на N окрестностей той же точки относительно R^6.

Говорят, что тройка $\langle\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, a$: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R\rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга (3.2), если выполнены следующие условия:

A. Отображение $a[\alpha]$: $\mathfrak{M}\to R$, задаваемое функцией $i\to a_{i\alpha}\in R$, открыто для любого элемента $\alpha\in\mathfrak{N}$; отображение $a[ij]$: $\mathfrak{N}\to R^2$, задаваемое функцией $\alpha\to(a_{i\alpha}, a_{j\alpha})\in R^2$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle ij\rangle\in\mathfrak{M}^2$, где $i\neq j$; функция A: $\mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^2\to N$ есть открытое отображение.

B. Существует аналитическая функция $\Phi\colon \mathscr{E} \to R$, определенная в области $\mathscr{E} \subset R^6$, такая что множество M, задаваемое уравнением $\Phi = 0$, совпадает с N, т. е.

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0 \tag{2}$$

для любого кортежа $\langle ijk, \alpha\beta\rangle \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2$.

C. В любой окрестности относительно N произвольной точки на N найдется такая точка, в которой градиент Φ отличен от нуля, т. е. $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ на всюду плотном подмножестве.

Заметим, что сформулированные условия несколько отличны от аксиом физической структуры, приведенных в ([1]), однако в дальнейшем выявится их эквивалентность.

Теорема. *Если тройка* $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, a: \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} \to R\rangle$ *образует бинарную физическую структуру ранга* (3.2), *то в любых окрестностях* $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ *произвольных точек* $i_0 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$ *найдутся элементы* $i_1 \in P(i_0)$, $\alpha_1 \in Q(\alpha_0)$, *для некоторых окрестностей* $P(i_1)$, $Q(\alpha_1)$ *которых функция* $a\colon P(i_1) \times \times Q(\alpha_1) \to R$ *и множество значений функции* $A\colon [P(i_1)]^3 \times [Q(\alpha_1)]^2 \to R^6$ *могут быть заданы следующим образом*

$$a_{i\alpha} = \psi^{-1}(x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha),$$

$$\begin{vmatrix} \psi(a_{i\alpha}) & \psi(a_{i\beta}) & 1 \\ \psi(a_{j\alpha}) & \psi(\alpha_{j\beta}) & 1 \\ \psi(a_{k\alpha}) & \psi(a_{k\beta}) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $i, j, k \in P(i_1)$, $\alpha, \beta \in Q(\alpha_1)$, Ψ — *строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки* $(i_1, \alpha_1) \in R$, Ψ^{-1} — *обратная функция,* x_i, ξ_α, η_α — *независимые параметры, задаваемые некоторыми открытыми отображениями* $x\colon \mathfrak{M} \to R$, $(\xi, \eta)\colon \mathfrak{N} \to R^2$.

Все дальнейшее изложение будет представлять доказательство сформулированной выше теоремы. Пусть $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ — любые открытые окрестности произвольных точек $i_0 \in \mathfrak{M}$ и $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$. Множество N_0 значений функции $A\colon [P(i_0)]^3 \times [Q(\alpha_0)]^2 \to R^6$, согласно условию A, есть окрестность точки $a(i_0i_0i_0, \alpha_0\alpha_0) \in N$. По условиям B и C существует такая точка $a(i_2j_2k_2, \alpha_2\beta_2)$, соответствующая недиагональному кортежу $\langle i_2j_2k_2, \alpha_2\beta_2\rangle \in [P(i_0)]^3 \times \times [Q(\alpha_0)]^2$, в которой $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$. Это означает, что отлична от нуля хотя бы одна из шести частных производных функции Φ. Без ограничения общности можно считать, что отлична от нуля производная по первому аргументу. Тогда, по теореме о неявных функциях, уравнение (2) может быть однозначно разрешено относительно $a_{i\alpha}$ в некоторой окрестности $U = H \times V$ точки $a(i_2j_2k_2, \alpha_2\beta_2) \in R^6$

$$a_{i\alpha} = \Gamma(a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}), \tag{4}$$

где аналитическая функция Γ определена в пятимерной окрестности V. При этом можно найти такие непересекающиеся окрестности $P(i_2)$, $P(j_2)$,

$P(k_2) \subset P(i_0)$, $Q(\alpha_2)$, $Q(\beta_2) \subset Q(\alpha_0)$, что множество точек $a(ijuk, \alpha\beta)$, соответствующих кортежам $\langle ijk, \alpha\beta\rangle \in P(i_2) \times P(j_2) \times P(k_2) \times Q(\alpha_2) \times Q(\beta_2)$ задается уравнением (4).

Покажем, что каждая из частных производных функции Г по аргументам $a_{i\beta}$, $a_{j\alpha}$, $a_{k\alpha}$ отлична от нуля на множестве полной меры в окрестности V. Действительно, если какая-либо производная по одной из указанных переменных обращается в нуль на множестве положительной меры, то, в силу аналитичности функции Г, соответствующая производная обращается в нуль тождественно, что, как мы сейчас покажем, приводит к нарушению условия A. Предположим сначала, что $\Gamma_{(i,\beta)} = 0$ на множестве положительной меры, т. е. $\Gamma_{(i,\beta)} \equiv 0$ и функция Г не зависит от переменной (i, β)

$$a_{i\alpha} = \Gamma_1(a_{j\alpha}, a_{j\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}). \tag{4'}$$

При фиксированном элементе α образ окрестности $P(i_2)$ при отображении $a[\alpha] : P(i_2) \to R$ в соответствии с уравнением (4′) вырождается в точку, что противоречит условию A.

Предположим теперь, что в нуль на множестве положительной меры обращается производная $\Gamma_{(j,\alpha)}$, т. е. $\Gamma_{(j,\alpha)} \equiv 0$, и функция Г не зависит от переменной (j, α)

$$a_{i\alpha} = \Gamma_2(a_{i\beta}, a_{j\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}). \tag{4''}$$

В окрестности $P(i_2)$ возьмем элемент $i' \neq i$ и запишем уравнение (4″) для кортежа $\langle i'jk, \alpha\beta\rangle$

$$a_{i'\alpha} = \Gamma_2(a_{i'\beta}, a_{j\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}). \tag{4'''}$$

Из уравнений (4″), (4‴) следует, что для фиксированных различных элементов i и i' образ окрестности $Q(\alpha_2)$ при отображении $a[ii']$: $: Q(\alpha_2) \to R^2$ есть одномерная аналитическая кривая в R^2, что противоречит условию A. Аналогично, невозможно $\Gamma_{(k,\alpha)} \equiv 0$.

Таким образом, производные функции Г по переменным $a_{i\beta}$, $a_{j\alpha}$, $a_{k\alpha}$ могут обращаться в нуль только на множестве нулевой меры и на множестве полной меры в окрестности V отличны от нуля. Можно, очевидно, не ограничивая общности, предположить, что именно в окрестности $U = H \times V$ точки $a(i_2j_2k_2, \alpha_2\beta_2)$ имеет место уравнение (4) и производные функции Г по переменным $a_{i\beta}$, $a_{j\alpha}$, $a_{k\alpha}$ отличны от нуля всюду на V.

Покажем, наконец, что переменные $a_{j\alpha}$, $a_{k\alpha}$ входят в функцию Г существенным образом, т. е. невозможна запись

$$a_{i\alpha} = \Gamma_3[\varphi(a_{j\alpha}, a_{k\alpha}), a_{i\beta}, a_{j\beta}, a_{k\beta}],$$

где Γ_3 и φ — аналитические функции. Предположим обратное. Подставим в это уравнение вместо i другой элемент $i' \in P(i_2)$, отличный от i

$$a_{i'\alpha} = \Gamma_3[\varphi(a_{j\alpha}, a_{k\alpha}), a_{i'\beta}, a_{j\beta}, a_{k\beta}],$$

т. е. множество точек $(a_{i\alpha}, a_{i'\alpha}) \in R^2$ образует одномерную аналитическую кривую в R^2, что противоречит условию A.

Запишем уравнение (4) для кортежа $\langle ij_2k_2,\ \alpha\beta_2\rangle$, где $i \in P(i_2)$, $\alpha \in Q(\alpha_2)$,

$$a_{i\alpha} = \Gamma(a_{i\beta_2},\ a_{j_2\alpha},\ a_{j_2\beta_2},\ a_{k_2\alpha},\ a_{k_2\beta_2}). \tag{5}$$

Полагая $a_{i\beta_2} = x_i$, $a_{j_2\alpha} = \xi_\alpha$, $a_{k_2\alpha} = \eta_\alpha$, получаем параметрическое представление функции a: $P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$

$$a_{i\alpha} = f(i\alpha) = f(x_i,\ \xi_\alpha,\ \eta_\alpha). \tag{6}$$

В соответствии со свойствами функции Γ в уравнении (4), все производные функции $f(x_i,\ \xi_\alpha,\ \eta_\alpha)$ отличны от нуля в некоторой окрестности точки $(x_{i_2},\ \xi_{\alpha_2},\ \eta_{\alpha_2}) \in R^3$. Кроме того, независимые параметры ξ_α, η_α входят в аналитическую функцию $f(i\alpha)$ существенным образом, т. е. невозможна запись

$$a_{i\alpha} = f(i\alpha) = \chi[x_i,\ \psi(\xi_\alpha,\ \eta_\alpha)]. \tag{7}$$

Будем далее предполагать, что $i, j, k \in P(i_2)$, $\alpha, \beta \in Q(\alpha_2)$. Подставим функцию (6) в уравнение (2)

$$\Phi[f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)] = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) задает множество значений N_2 функции A: $[P(i_2)]^3 \times [Q(\alpha_2)]^2 \to R^6$, которое по условию A является окрестностью точки $a(i_2i_2i_2,\ \alpha_2\alpha_2) \in N$. В N_2, по условию C, существует такая точка, в которой $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$.

Продифференцируем уравнение (8) по всем независимым параметрам x_i, x_j, x_k, ξ_α, η_α, ξ_β, η_β. В результате возникает система из семи линейных однородных уравнений относительно шести производных функций Φ. Матрица системы имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) \\ f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 \\ f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) \\ 0 & f_\eta(i\beta) & 0 & f_\eta(j\beta) & 0 & f_\eta(k\beta) \end{matrix}\right\|, \tag{9}$$

где $f_x(i\alpha)$, $f_\xi(i\alpha)$, $f_\eta(i\alpha)$ есть частные производные функции $f(i\alpha) = f(x_i,\ \xi_\alpha,\ \eta_\alpha)$ по параметрам x_i, ξ_α, η_α. Например, $f_x(i\alpha) = f_{x_i}(x_i,\ \xi_\alpha,\ \eta_\alpha)$.

Система уравнений относительно производных функции Φ имеет ненулевое решение в точке, где $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$, и некоторой ее окрестности. Каждая подсистема из шести уравнений содержит все шесть неизвестных и потому любой определитель шестого порядка матрицы (9) должен обращаться в нуль. Поскольку каждый такой определитель есть аналитическая функция, обращение в нуль будет тождественным и в окрестности N_2 точки $a(i_2i_2i_2,\ \alpha_2\alpha_2)$.

Возьмем определитель, полученный из матрицы (9) вычеркиванием последней строки, и разложим его по минорам первого столбца

$$f_x(i\alpha)A_1(ijk,\ \alpha\beta) + f_\xi(i\alpha)A_2(ijk,\ \alpha\beta) + f_\eta(i\alpha)A_3(ijk,\ \alpha\beta) = 0, \tag{10}$$

где A_1, A_2, A_3 — алгебраические дополнения к минорам первого столбца $f_x(i\alpha)$, $f_\xi(i\alpha)$, $f_\eta(i\alpha)$ соответственно. Например,

$$A_1(ijk, \alpha\beta) = -f_\xi(i\beta) f_x(j\beta) f_x(k\beta) \begin{vmatrix} f_\xi(j\alpha) & f_\xi(k\alpha) \\ f_\eta(j\alpha) & f_\eta(k\alpha) \end{vmatrix}.$$

Покажем, что алгебраическое дополнение $A_1(ijk, \alpha\beta)$ не может обращаться в нуль на множестве положительной меры относительно параметров, входящих в него. Обратное означало бы тождественное обращение в нуль этого дополнения в силу его аналитичности. Если $A_1(ijk, \alpha\beta) = 0$, то необходимо

$$f_\xi(j\alpha) f_\eta(k\alpha) - f_\eta(j\alpha) f_\xi(k\alpha) = 0,$$

так как производные функции f отличны от нуля. Но в таком случае

$$f_\xi(j\alpha) / f_\eta(j\alpha) = f_\xi(k\alpha) / f_\eta(k\alpha) = A(\alpha) = A(\xi_\alpha, \eta_\alpha),$$

т. е. для f имеем уравнение $f_\xi(j\alpha) - f_\eta(j\alpha) A(\alpha) = 0$, которое просто интегрируется. Но в решение $f(j\alpha) = \chi[x_j, \psi(\xi_\alpha, \eta_\alpha)]$ параметры ξ_α, η_α входят несущественным образом, что приводит к нарушению условия A. Следовательно, алгебраическое дополнение $A_1(ijk, \alpha\beta)$ отлично от нуля на множестве полной меры и существует такая точка $a(i_3 j_3 k_3, \alpha_3\beta_3)$, что в ней самой и некоторой ее окрестности $A_1(ijk, \alpha\beta) \neq 0$.

Запишем уравнение (10) для кортежа $\langle ij_3k_3, \alpha\beta_3\rangle$, где $i \in P(i_3) \subset P(i_2)$, $\alpha \in Q(\alpha_3) \subset Q(\alpha_2)$ и проведем простые преобразования коэффициентов, исходя из строения алгебраических дополнений

$$f_x(i\alpha) E(i) + f_\xi(i\alpha) F_1(\alpha) + f_\eta(i\alpha) F_2(\alpha) = 0, \tag{11}$$

где $E(i) = E(x_i)$, $F(\alpha) = F(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$, причем $E(i) \neq 0$. Уравнение (11) не имеет особых точек, так как $E^2 + F_1^2 + F_2^2 \neq 0$, и потому может быть решено методом характеристик

$$f(i\alpha) = \chi[\varphi(i) + \psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha)]. \tag{12}$$

Функции $\chi(s, t)$, $\varphi(i)$, $\psi_1(\alpha)$, $\psi_2(\alpha)$ аналитичны, причем $\chi_s(s, t) \neq 0$, $\varphi_x(i) \neq 0$, так как отличны от нуля производные функции $f(i\alpha)$. Существенная зависимость от параметров ξ_α, η_α приводит к условию

$$\psi_{1\xi}(\alpha) \psi_{2\eta}(\alpha) - \psi_{1\eta}(\alpha) \psi_{2\xi}(\alpha) \neq 0 \tag{13}$$

на множестве полной меры. Можно, очевидно, предположить, что условие (13) выполняется для всех $\alpha \in Q(\alpha_3)$. Решение (12) ранее было найдено Б. Я. Штивельманом в его дипломной работе (НГУ, Физический факультет, 1968).

Будем далее предполагать, что i, j, $k \in P(i_3)$ и α, $\beta \in Q(\alpha_3)$. Подставим в матрицу (9) выражение (12) для функции f и приравняем нулю определитель, полученный вычеркиванием первой строки. После простых преобразований с использованием условия (13), введя обозначение

$$T(i\alpha) = \chi_t(i\alpha) / \chi_s(i\alpha), \tag{14}$$

получаем

$$\begin{vmatrix} T(i\alpha) & T(i\beta) & 1 \\ T(j\alpha) & T(j\beta) & 1 \\ T(k\alpha) & T(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Покажем, что в определителе (15) любой минор второго порядка, содержащий столбец из единиц, отличен от нуля на множестве полной меры.

Предположим обратное, то есть что, например, $T(i\alpha)=T(j\alpha)$ на множестве положительной меры. В силу аналитичности функции T имеем

$$T[\varphi(i)+\psi_1(\alpha),\ \psi_2(\alpha)]=T[\varphi(j)+\psi_1(\alpha),\ \psi_2(\alpha)]=T_1[\psi_2(\alpha)],$$

так как аргументы $\varphi(i)+\psi_1(\alpha)$ и $\varphi(j)+\psi_2(\alpha)$ являются независимыми переменными. С другой стороны, $T(s,t)=\chi_t(s,t)/\chi_s(s,t)=T_1(t)$ и функция $\chi(s,t)$ удовлетворяет уравнению $\chi_t(s,t)-T_1(t)\chi_s(s,t)=0$. Решение $\chi(s,t)=\chi_1[s+T_2(t)]$ этого уравнения при подстановке в выражение (12) приводит к несущественной зависимости от параметров ξ_α, η_α, противоречащей условию A. Следовательно, найдется такая точка $a(i_1j_1k_1,\ \alpha_1\beta_1)$, что в ней самой и в некоторой ее окрестности все миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц, отличны от нуля. Например, $T(j_1\beta_1)-T(k_1\beta_1)\neq 0$.

Запишем соотношение (15) для кортежа $\langle ij_1k_1,\ \alpha\beta_1\rangle$, где $i\in P(i_1)\subset P(i_3)$, $\alpha\in Q(\alpha_1)\subset Q(\alpha_3)$ и представим его в виде, разрешенном относительно $T(i\alpha)$

$$T(i\alpha)=T(i\beta_2)[T(k_1\alpha)-T(j_1\alpha)]/[T(k_1\beta_1)-T(j_1\beta_1)]+$$
$$+[T(j_1\alpha)T(k_1\beta_1)-T(j_1\beta_1)T(k_1\alpha)]/[T(k_1\beta_1)-T(j_1\beta_1)] \qquad (16)$$

или, вводя дополнительные обозначения,

$$T(i\alpha)=T[\varphi(i)+\psi_1(\alpha),\ \psi_2(\alpha)]=\bar{B}(i)\bar{A}_1(\alpha)+\bar{A}_2(\alpha). \qquad (17)$$

Равенство (17) есть функциональное уравнение для T. Перепишем его в следующем виде

$$T(x+\xi,\ \eta)=B(x)A_1(\xi,\eta)+A_2(\xi,\eta), \qquad (18)$$

где $x=\varphi(i)$, $\xi=\psi_1(\alpha)$, $\eta=\psi_2(\alpha)$, что вполне возможно, так как $\varphi_x(i)\neq 0$ и якобиан 13 также отличен от нуля. Очевидно, всегда можно добиться того, чтобы переменные x и ξ изменялись в окрестности нуля.

Продифференцируем уравнение (18) по переменным x, ξ и приравняем правые части, поскольку левые совпадают

$$B'(x)A_1(\xi,\eta)=B(x)A_1'(\xi,\eta)+A_2'(\xi,\eta), \qquad (19)$$

где $A'(\xi,\eta)$ означает производную функцию $A(\xi,\eta)$ по ξ. Положим в равенстве (19) $x=0$

$$B'(0)A_1(\xi,\eta)=B(0)A_1'(\xi,\eta)+A_2'(\xi,\eta). \qquad (20)$$

Исключая производную $A_2'(\xi,\eta)$ из равенств (19), (20), получаем два уравнения для функций $B(x)$ и $A_1(\xi,\eta)$

$$\frac{B'(x)-B'(0)}{B(x)-B(0)}=\frac{A_1'(\xi,\eta)}{A_1(\xi,\eta)}=a, \qquad (21)$$

где a — некоторая постоянная. Уравнения (21) легко интегрируются

$$B(x) = B(0) + a^{-1}B'(0)[\exp ax - 1], \tag{22}$$

$$A_1(\xi, \eta) = A_1(0, \eta)\exp a\xi. \tag{23}$$

Заметим, что выражения (22), (23) имеют смысл при всех значениях постоянной a. В частности, при $a = 0$ имеем $B(x) = B(0) + B'(0)x$, $A_1(\xi, \eta) = A_1(0, \eta)$.

Выражение для функции $A_2(\xi, \eta)$ найдем следующим образом. Переставляя в уравнении (18) переменные x и ξ, получаем

$$B(x)A_1(\xi, \eta) + A_2(\xi, \eta) = B(\xi)A_1(x, \eta) + A_2(x, \eta)$$

и при $x = 0$

$$B(0)A_1(\xi, \eta) + A_2(\xi, \eta) = B(\xi)A_1(0, \eta) + A_2(0, \eta). \tag{24}$$

Используя функции (22), (23), разрешим равенство (24) относительно $A_2(\xi, \eta)$

$$A_2(\xi, \eta) = A_2(0, \eta) + [a^{-1}B'(0) - B(0)]A_1(0, \eta)(\exp a\xi - 1). \tag{25}$$

Подставим теперь все три найденных выражения (22), (23) и (25) в исходное уравнение (18)

$$T(x+\xi, \eta) = B(0)A_1(0, \eta) + A_2(0, \eta) + \\ + a^{-1}B'(0)A_1(0, \eta)[\exp a(x+\xi) - 1]. \tag{26}$$

Используя связь $x + \xi = \varphi(i) + \psi_1(\alpha) = s$, $\eta = \psi_2(\alpha) = t$ и меняя обозначения коэффициентов в правой части (26), получаем

$$T(s, t) = a^{-1}\varphi_1(t)(\exp as - 1) + \varphi_2(t). \tag{27}$$

Функция (27), в соответствии с введенным обозначением (14), дает уравнение для $\chi(s, t)$

$$\chi_t(s, t) = \chi_s(s, t)[a^{-1}\varphi_1(t)(\exp as - 1) + \varphi_2(t)],$$

которое может быть решено в квадратурах при произвольных коэффициентах $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

$$\chi(s, t) = \chi_2\{\lambda_1(t) + a^{-1}\lambda_2(t)[1 - \exp(-as)]\}, \tag{28}$$

где χ_2, λ_1, λ_2 — аналитические функции одной переменной. Поскольку $\chi_s(s, t) \neq 0$, функция χ_2 строго монотонна и имеет обратную χ_2^{-1}.

Полагая в правой части равенства (28) $s = \varphi(i) + \psi_1(\alpha)$, $t = \psi_2(\alpha)$ и принимая во внимание (12), будем иметь

$$a_{i\alpha} = \chi_2[p(i)q_1(\alpha) + q_2(\alpha)], \tag{29}$$

причем $i \in P(i_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_1)$, где $i_1 \in P(i_0)$, $\alpha_1 \in Q(\alpha_0)$.

Соотношение (29) дает параметрическое задание функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$. С точностью до обозначений оно совпадает с выражением, приведенным в формулировке теоремы. Используя представление (29), легко получить уравнение (3), задающее множество значений функции A : $[P(i_1)]^3\times[Q(\alpha_1)]^2\to R^6$. Теорема доказана.

В заключение приведем некоторые результаты для бинарных физических структур ранга (m, n), где $m\geqslant n\geqslant 2$. При условиях, аналогичных тем, которые были использованы в доказанной теореме, имеем в случае $m=n+2=4$

$$a_{i\alpha}=\psi^{-1}[(x_i\xi_\alpha+\eta_\alpha)/(x_i+\mu_\alpha)],$$

$$\begin{vmatrix} \psi(a_{i\alpha}) & \psi(a_{i\beta}) & \psi(a_{i\alpha})\times\psi(a_{i\beta}) & 1 \\ \psi(a_{j\alpha}) & \psi(a_{j\beta}) & \psi(a_{j\alpha})\times\psi(a_{j\beta}) & 1 \\ \psi(a_{k\alpha}) & \psi(a_{k\beta}) & \psi(a_{k\alpha})\times\psi(a_{k\beta}) & 1 \\ \psi(a_{l\alpha}) & \psi(a_{l\beta}) & \psi(a_{l\alpha})\times\psi(a_{l\beta}) & 1 \end{vmatrix}=0,$$

а для $m=n=3$ две возможности:

$$a_{i\alpha}=\psi^{-1}(x_i\xi_\alpha+y_i\eta_\alpha),$$

$$\begin{vmatrix} \psi(a_{i\alpha}) & \psi(a_{i\beta}) & \psi(a_{i\gamma}) \\ \psi(a_{j\alpha}) & \psi(a_{j\beta}) & \psi(a_{j\gamma}) \\ \psi(a_{k\alpha}) & \psi(a_{k\beta}) & \psi(a_{k\gamma}) \end{vmatrix}=0$$

или

$$a_{i\alpha}=\psi^{-1}(x_i\xi_\alpha+y_i+\eta_\alpha),$$

$$\begin{vmatrix} \psi(a_{i\alpha}) & \psi(a_{i\beta}) & \psi(a_{i\gamma}) & 1 \\ \psi(a_{j\alpha}) & \psi(a_{j\beta}) & \psi(a_{j\gamma}) & 1 \\ \psi(a_{k\alpha}) & \psi(a_{k\beta}) & \psi(a_{k\gamma}) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

С другой стороны, бинарные физические структуры ранга $(m, 2)$ и $(m, 3)$, например, для $m\geqslant 5$ не существуют. Полную сводку результатов можно найти в работе ([2]).

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Г. Решетняку за многочисленные полезные замечания и обсуждения.

Поступила в редакцию
15 июня 1970 г.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кулаков Ю. И., Математическая формулировка теории физических структур, Сиб. матем. ж., XII, № 5 (1971), 1142—1145.

2 Михайличенко Г. Г., Решение функциональных уравнений в теории физических структур, Докл. АН СССР, 206, № 5 (1972), 1056—1058.