ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 2 2017

УДК 517.977 + 514.74

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЛОЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ И ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИЙ

В. А. Кыров, Г. Г. Михайличенко

Как известно, n-мерная геометрия максимальной подвижности допускает группу движений размерности $n(n+1)/2$. Многие из таких геометрий хорошо известны, в частности, евклидова и псевдоевклидова геометрии. Такие геометрии являются феноменологически симметричными, т. е. для них метрические свойства эквивалентны групповым. В данной работе на примере евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий разрабатывается аналитический метод их вложения. Таким образом ищутся все возможные функции вида

$$f = f((x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2, z_i, z_j),$$

где, например, x_i, y_i, z_i — координаты точки i. Оказывается, что существуют только следующие вложения:

$$f = (x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

$$f = [(x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2] \exp(2z_i + 2z_j).$$

Заметим, что получены как хорошо известные трехмерные геометрии (евклидова и псевдоевклидова), так и малоизвестные (трехмерные особые расширения евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий). Установлено, что все эти геометрии допускают шестимерные группы движений. Для решения поставленной задачи по условию локальной инвариантности метрической функции записывается функциональное уравнение

$$2[(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j))]\frac{\partial f}{\partial \theta} + X_3(i)\frac{\partial f}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0,$$

все компоненты в котором — аналитические функции. Затем это уравнение разлагается в ряд Тейлора, после чего сравниваются коэффициенты разложения перед одинаковыми степенями произведений переменных. Пакет математических программ Maple 15 существенно упрощает задачу перебора коэффициентов. По полученным результатам записываются дифференциальные уравнения, интегрируя которые, находим решения сформулированной выше задачи вложения.

Ключевые слова: евклидова геометрия, функциональное уравнение, дифференциальное уравнение, метрическая функция.

V. A. Kyrov, G. G. Mikhailichenko. An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries.

It is known that an n-dimensional geometry of maximum mobility admits a group of motions of dimension $n(n+1)/2$. Many of these geometries are well-known, for example, the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries. Such geometries are phenomenologically symmetric; i.e., their metric properties are equivalent to their group properties. In this paper we consider the examples of the two-dimensional Euclidean and pseudo-Euclidean geometries to develop an analytical method for their embedding. More exactly, we search for all possible functions of the form $f = f((x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2, z_i, z_j)$, where, for example, x_i, y_i, z_i are the coordinates of a point i. It turns out that there exist only the following embeddings: $f = (x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ and $f = [(x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2] \exp(2z_i + 2z_j)$. Note that we obtain not only the well-known three-dimensional geometries (Euclidean and pseudo-Euclidean) but also less known geometries (three-dimensional special extensions of the two-dimensional Euclidean and pseudo-Euclidean geometries). It is found that all these geometries admit six-dimensional groups of motions. To solve the formulated problem, according to the condition of local invariance of the metric function, we write the functional equation

$$2[(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j))]\frac{\partial f}{\partial \theta} + X_3(i)\frac{\partial f}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0,$$

where all the components are analytic functions. This equation is expanded in a Taylor series and the coefficients of the expansion at identical products of powers of the variables are compared. This task is greatly simplified by using the Maple 15 computing environment. The obtained results are used to write differential equations, which are then integrated to find solutions to the embedding problem formulated earlier.

Keywords: Euclidean geometry, functional equation, differential equation, metric function.

MSC: 34K37, 26E05, 22F99

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181

Введение

В статье изучаются n-мерные геометрии максимальной подвижности, допускающие группу движений размерности $n(n+1)/2$ [1]. Многие из таких геометрий хорошо известны, к их числу относятся евклидова геометрия, псевдоевклидова, симплектическая геометрия, сферическая, геометрия Лобачевского и др. Полная же классификация таких геометрий неизвестна [2].

В работах второго соавтора [2; 3] дается полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий, которые являются геометриями максимальной подвижности, т. е. фактически построена полная классификация двумерных геометрий максимальной подвижности. Эта классификация, кроме хорошо известных двумерных геометрий (евклидовой, псевдоевклидовой, симплектической, сферической и др.), содержит и неизвестные геометрии (симплициальная, гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева). Заметим, что группы движений всех этих геометрий трехпараметрические. Методы, разработанные Г. Г. Михайличенко для классификации таких геометрий, неприменимы при построении классификации геометрий большей размерности.

В. Х. Лев другим методом построил классификацию трехмерных феноменологически симметричных геометрий (геометрий максимальной подвижности) [4], которая также содержит как известные, так и неизвестные геометрии. Группы движений таких геометрий шестипараметрические. Методом Лева классификацию четырехмерных геометрий и геометрий более высокой размерности ввиду больших технических сложностей построить не удалось.

В данной работе разрабатывается новый метод классификации феноменологически симметричных геометрий (геометрий максимальной подвижности), который позволит построить классификацию феноменологически симметричных геометрий более высоких размерностей. Он назван *методом вложения*, и его суть состоит в нахождении метрических функций всех феноменологически симметричных геометрий по известным метрическим функциям феноменологически симметричных геометрий размерности на единицу меньше, содержащих их внутри себя как аргумент. С помощью этого метода здесь перепроверяется часть классификации Лева, в полноте которой уверенности нет. Вложение иллюстрирует хорошо известная трехмерная евклидова геометрия с метрикой

$$d^2(i,j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

где i, j — две произвольные точки пространства, а (x_i, y_i, z_i) и (x_j, y_j, z_j) — их координаты. Эта метрика, очевидно, внутри себя содержит метрику евклидовой плоскости $\rho^2(i,j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$, т. е.

$$d^2(i,j) = \rho^2(i,j) + (z_i - z_j)^2.$$

Аналогичный пример дает и псевдоевклидова геометрия. Возникает задача о вложении, состоящая в поиске всех метрических функций трехмерного пространства, содержащих внутри себя метрики евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей и допускающих шестимерные группы движений, т. е. нахождение всех функций вида

$$f = f((x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2, z_i, z_j).$$

В этой статье задача о вложении решается аналитически, т. е. неизвестные ищутся в виде рядов Тейлора. Подобная задача в классе дифференцируемых как минимум два раза, но неаналитических функций исследуется в работах первого соавтора [5; 6].

Задача о вложении ранее также решалась в геометрии двух множеств (ГДМ) [7]. Так, по функции $g = x\xi$, задающей феноменологически симметричную (ФС) геометрию двух множеств (ГДМ) ранга (2,2), находится функция, задающая ФС ГДМ ранга (3,2)

$$f = x\xi + \eta,$$

которая оказалась единственной. Здесь x — локальная координата произвольной точки первого моногообразия, а (ξ, η) — локальные координаты точки второго многообразия. Решение ищется в виде

$$f = \chi(x\xi, \eta).$$

Аналогично решаются задачи о вложении ФС ГДМ ранга (3,2) в ФС ГДМ ранга (4,2) и ФС ГДМ ранга (4,2) в ФС ГДМ ранга (5,2). Доказывается, что ФС ГДМ ранга (5,2) не существует.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим аналитическое трехмерное многообразие M. Локальные координаты в M обозначим через (x, y, z). Пусть задана функция $f\colon M \times M \to \mathbb{R}$, называемая *метрической*, с открытой и плотной в $M \times M$ областью определения S_f. Выполнение метрических аксиом не предполагается.

Аксиома аналитичности. Метрическая функция $f\colon M \times M \to \mathbb{R}$ аналитическая во всех точках области определения S_f.

Рассмотрим множество четверок $\langle i_1, i_2, i_3, i\rangle$, $\langle i, i_1, i_2, i_3\rangle \in M^4$: $\langle i, i_1\rangle, \langle i, i_2\rangle, \langle i, i_3\rangle \in S_f$, $\langle i_1, i\rangle, \langle i_2, i\rangle, \langle i_3, i\rangle \in S_f$. Пусть выполняется следующая аксиома.

Аксиома невырожденности. Для открытого и плотного в M^4 множества четверок $\langle i_1, i_2, i_3, i\rangle$ и $\langle i, i_1, i_2, i_3\rangle$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial(f(i,i_1), f(i,i_2), f(i,i_3))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i_1,i), f(i_2,i), f(i_3,i))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0,$$

где (x_i, y_i, z_i) — координаты точки $i \in M$.

Рассмотрим множество пятерок $\langle i_1, \ldots, i_5\rangle \in M^5$: $\langle i_p, i_q\rangle \in S_f$, $p, q = 1, \ldots, 5$, $p \neq q$.

Аксиома феноменологической симметрии. Для некоторой окрестности пятерки точек $\langle i_1, \ldots, i_5\rangle$ из плотного в M^5 множества выполняется тождество:

$$\Phi(f(i_1, i_2), \ldots, f(i_4, i_5)) = 0,$$

где Φ — аналитическая функция, причем $\operatorname{rang}\Phi = 1$.

Определение. Говорят, что на аналитическом многообразии M метрическая функция f задает феноменологически симметричную геометрию, если выполняются аксиомы *аналитичности*, *невырожденности* и *феноменологической симметрии* [2, §1, с. 12].

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в открытой области $U \in M$. Это означает, что задано аналитическое отображение

$$\lambda\colon U \times G \to U',$$

где $U' \in M$ — открытая область. Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j\rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j)\rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают [2, §2, с. 18].

Множество всех так определенных движений образует аналитическую группу Ли движений. Доказано, что размерность группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии равна 6 (см. [2, §2, с. 36]). Двухточечным инвариантом такой группы является метрическая функция. Также доказано, что по метрической функции можно найти уравнения группы движений.

Алгебра Ли группы движений состоит из операторов вида (см. [8, § 16])

$$X = X_1\partial_x + X_2\partial_y + X_3\partial_z, \tag{1.1}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, z)$ — аналитическая функция в U, $\alpha = 1, 2, 3$. Через операторы (1.1) записывается условие локальной инвариантности метрической функции (см. [8, § 17])

$$X(i)f(i, j) + X(j)f(i, j) = 0, \tag{1.2}$$

которое выполняется в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем метрическая функция $f(i, j)$ определена и аналитична в $U(i) \times U(j)$.

Рассмотрим метрические функции евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей:

$$\theta = (x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2, \tag{1.3}$$

где (x_i, y_i) и (x_j, y_j) — локальные координаты точек i и j, $\epsilon = \pm 1$, причем для евклидовой геометрии $\epsilon = +1$, а для псевдоевклидовой геометрии $\epsilon = -1$.

Как известно, алгебры Ли групп движений двумерных евклидовой и псевдоевклидовой геометрий трехмерны, поэтому их базисы состоят из трех линейно независимых операторов (см. [2, § 6, с. 89])

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y, \quad X^3 = -\epsilon y\partial_x + x\partial_y. \tag{1.4}$$

Произвольный же оператор является их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами.

Цель данной работы — нахождение всех трехмерных феноменологически симметричных геометрий с метрическими функциями в подходящих координатах, принимающих следующий вид:

$$f(i, j) = f(\theta, z_i, z_j) = f((x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2, z_i, z_j). \tag{1.5}$$

Поскольку метрическая функция (1.5) невырождена, ее координаты не “выпадают”:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_i} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_j} \neq 0. \tag{1.6}$$

Пусть $k \in M$ — произвольная точка и $U(k)$ — ее координатная окрестность. Пусть произвольные точки $i, j \in U(k)$, $U(i), U(j) \subset U(k)$, т. е. $U(i) \cup U(j) \subset U(k)$. Тогда в окрестности $U(k)$ вводим систему координат с началом в точке k, т. е. в этих координатах $k(0, 0, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (1.1) и метрической функции (см. [9, гл. 11])

$$\left\{\begin{aligned}
&X_1 = X_1(z) + D_1(X_1)(z)x + D_2(X_1)(z)y \\
&+ \frac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(z)x^2 + D_{1,2}(X_1)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(z)y^2 + \cdots, \\
&X_2 = X_2(z) + D_1(X_2)(z)x + D_2(X_2)(z)y \\
&+ \frac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(z)x^2 + D_{1,2}(X_2)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(z)y^2 + \cdots, \\
&X_3 = X_3(z) + D_1(X_3)(z)x + D_2(X_3)(z)y \\
&+ \frac{1}{2}D_{1,1}(X_3)(z)x^2 + D_{1,2}(X_3)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_3)(z)y^2 + \cdots,
\end{aligned}\right. \tag{1.7}$$

$$f(\theta, z_i, z_j) = f(z_i, z_j) + D_1(f)(z_i, z_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f)(z_i, z_j)\theta^2 + \cdots. \tag{1.8}$$

Теорема. *Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и ее координатную окрестность $U(k)$. Возьмем также две точки $i, j \in U(k)$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что*

$$U(i) \cup U(j) \subset U(k), \quad \textit{причем} \ \ \langle i, j\rangle, \langle i', j'\rangle \in S_f \ \ \forall i' \in U(i), \ \forall j' \in U(j).$$

Тогда метрическая функция $f(i,j)$, *в аналитическом многообразии* M *задающая трехмерную феноменологически симметричную геометрию, в окрестности* $U(i)\times U(j)$ *в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании (аналитическая функция от метрической функции* $\varphi(f)\to f$) *имеет вид*

$$f(i,j) = (x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \tag{1.9}$$

$$f(i,j) = [(x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2] \exp[2z_i + 2z_j]. \tag{1.10}$$

Базисные операторы алгебр Ли этих групп движений следующие:

$$X^1 = \partial_x,\ \ X^2 = \partial_y,\ \ X^3 = -\epsilon y\partial_x + x\partial_y,\ \ X^4 = \partial_z,\ \ X^5 = -z\partial_x + x\partial_z,\ \ X^6 = -\epsilon y\partial_z + z\partial_y, \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y, \quad X^3 = -\epsilon y\partial_x + x\partial_y, \quad X^4 = \partial_z, \\ X^5 = (-x^2 + \epsilon y^2)\partial_x - 2xy\partial_y + x\partial_z, \quad X^6 = -2xy\partial_x + (\epsilon x^2 - y^2)\partial_y + y\partial_z, \end{cases} \tag{1.12}$$

где $\epsilon = \pm 1$.

Заметим, что выражение (1.9) дает только две различные метрические функции трехмерных феноменологически симметричных геометрий — метрическую функцию евклидовой геометрии при $\epsilon = 1$ и метрическую функцию псевдоевклидовой геометрии при $\epsilon = -1$. Выражение (1.10) — это тоже две метрические функции трехмерных феноменологически симметричных геометрий: при $\epsilon = 1$ — трехмерное особое расширение евклидовой двумерной геометрии, а при $\epsilon = -1$ — трехмерное особое расширение псевдоевклидовой двумерной геометрии.

В процессе доказательства теоремы ищутся как метрические функции трехмерных феноменологически симметричных геометрий в виде (1.5), так и базисные операторы алгебр Ли групп движений этих геометрий. Заметим, что эти алгебры шестимерны, поэтому их базисы состоят из шести независимых операторов, три из которых совпадают с операторами (1.4):

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y, \quad X^3 = -\epsilon y\partial_x + x\partial_y, \quad X^{4,5,6} = X_1^{4,5,6}\partial_x + X_2^{4,5,6}\partial_y + X_3^{4,5,6}\partial_z.$$

Произвольный же оператор алгебр Ли этих геометрий имеет вид (1.1) и является линейной комбинацией шести базисных операторов.

2. Доказательство теоремы

Искомая метрическая функция (1.5) является двухточечным инвариантом шестимерной группы движений, поэтому условие локальной инвариантности (1.2) в явном виде записывается так:

$$2\big[(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j))\big]\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} \\ + X_3(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} = 0, \tag{2.1}$$

где X_1, X_2, X_3 — компоненты произвольного оператора (1.1). Заметим, что выражение (2.1) выполняется тождественно по координатам точек i и j из окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, причем $U(i)\cup U(j) \subset U(k)$, где $U(k)$ — координатная окрестность.

Лемма 1. *В тождестве* (2.1)

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть выполняется тождество

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) = 0.$$

Продифференцируем это тождество дважды по x_i и x_j, y_i и y_j, x_i и y_j, z_i и x_j, z_i и y_j :

$$X_{1x}(i)+X_{1x}(j)=0, \quad X_{2y}(i)+X_{2y}(j)=0, \quad X_{1y}(j)+\epsilon X_{2x}(i)=0, \quad X_{1z}(i)=0, \quad X_{2z}(i)=0.$$

Затем разделяем переменные:

$$X_{1x}=0, \quad X_{2y}=0, \quad X_{2x}=a=\mathrm{const}, \quad X_{1y}=-\epsilon a=\mathrm{const}, \quad X_{1z}=0, \quad X_{2z}=0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем первые две компоненты произвольного оператора (1.1) алгебры Ли группы движений:

$$X_1=-\epsilon ay+b, \quad X_2=ax+c,$$

где a, b, c — произвольные вещественные постоянные интегрирования.

В тождестве (2.1) с учетом сделанного выше предположения возможны случаи:

$$\text{либо } X_3=0, \ \text{ либо } X_3\neq 0.$$

Пусть сначала $X_3=0$. Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии с метрической функцией (1.5) имеет вид

$$X=(-\epsilon ay+b)\partial_x+(ax+c)\partial_y.$$

Придавая постоянным (a, b, c) значения $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, получаем три базисных оператора (1.4), а должно быть шесть. Противоречие.

Пусть теперь $X_3\neq 0$. Тогда

$$X_3(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i}+X_3(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j}=0. \tag{2.2}$$

От выражения (2.2) переходим к тождеству

$$\frac{X_3(i)}{X_3(j)}=\varphi(\theta, z_i, z_j), \tag{2.3}$$

для чего левую и правую части делим на произведение $X_3(j)\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial z_i}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, z_i, z_j)=-\dfrac{\partial f(i,j)/\partial z_j}{\partial f(i,j)/\partial z_i}$, θ берем из (1.3). Дифференцируем (2.3) по x_i и по x_j:

$$\frac{X_{3x}(i)}{X_3(j)}=2(x_i-x_j)\varphi_\theta, \quad -\frac{X_3(i)X_{3x}(j)}{X_3^2(j)}=-2(x_i-x_j)\varphi_\theta,$$

где $\varphi_\theta=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, затем складываем результаты и разделяем переменные:

$$\frac{X_{3x}(i)}{X_3(i)}=\frac{X_{3x}(j)}{X_3(j)}=\alpha=\mathrm{const}.$$

Уравнение (2.3) теперь дифференцируем по y_i и по y_j, затем снова складываем и разделяем переменные:

$$\frac{X_{3y}(i)}{X_3(i)}=\frac{X_{3y}(j)}{X_3(j)}=\beta=\mathrm{const}.$$

Таким образом, получаем

$$X_{3x}=\alpha X_3, \quad X_{3y}=\beta X_3.$$

Общий интеграл найденных уравнений

$$X_3=c(z)e^{\alpha x+\beta y}\neq 0,$$

где $c(z)$ — некоторая аналитическая функция. Полученное подставляем в (2.3):

$$e^{\alpha u+\beta v} = \frac{\varphi(u^2+\epsilon v^2, z_i, z_j)}{c(z_i)c(z_j)}, \quad u = x_i - x_j, \quad v = y_i - y_j.$$

Это равенство дифференцируем по u и по v:

$$\alpha e^{\alpha u+\beta v} = \frac{2u\varphi'(u^2+\epsilon v^2, z_i, z_j)}{c(z_i)c(z_j)}, \quad \beta e^{\alpha u+\beta v} = \frac{2\epsilon v\varphi'(u^2+\epsilon v^2, z_i, z_j)}{c(z_i)c(z_j)}.$$

Затем первое полученное равенство умножаем на ϵv и вычитаем из него второе, умноженное на u:

$$(\alpha\epsilon v - \beta u)e^{\alpha u+\beta v} = 0.$$

Из последнего, очевидно, следует $\alpha = \beta = 0$. Тогда $X_3 = c(z)$. Подставляя найденное в (2.2), имеем

$$c(z_i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_i} + c(z_j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial z_j} = 0.$$

Вводим замену: $\displaystyle\int dz/c(z) = \overline{z}$. Тогда в новых координатах $X_3 = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии с метрической функцией (1.5) имеет вид

$$X = (-\epsilon ay + b)\partial_x + (ax + c)\partial_y + \partial_{\overline{z}}.$$

Придавая произвольным постоянным (a, b, c) значения $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)$, получаем базисные операторы

$$\partial_x + \partial_{\overline{z}}, \quad \partial_y + \partial_{\overline{z}}, \quad -\epsilon y\partial_x + x\partial_y + \partial_{\overline{z}}, \ \partial_{\overline{z}}.$$

Видно, что таких операторов четыре, а должно быть шесть. Противоречие. □

Лемма 2. *В тождестве* (2.1)

$$X_3 \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть в (2.1) $X_3 = 0$. Тогда из леммы 1 следует $\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial\theta} = 0$, что противоречит условию невырожденности (1.6) метрической функции (1.5). □

Лемма 3. *В тождестве* (2.1) *функция* $X_3(x, y, z)$ *явно зависит либо от* x, *либо от* y, *т. е.*

$$\Big(\frac{\partial X_3(x,y,z)}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial X_3(x,y,z)}{\partial y}\Big)^2 \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть

$$X_3 = X_3(z) \neq 0.$$

Тогда в тождестве (2.1) осуществляем замену координат: $\displaystyle\int dz/X_3(z) = \overline{z}$. Очевидно, в новых координатах $X_3(\overline{z}) = 1$. В результате (2.1) примет вид

$$2\big[(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j))\big]\frac{\partial f(i,j)}{\partial\theta} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial\overline{z}_i} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial\overline{z}_j} = 0. \quad (2.4)$$

Деля тождество (2.4) на ненулевую производную $\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial\theta}$, получаем функциональное уравнение

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) = \phi(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j), \tag{2.5}$$

где

$$\phi(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j) = -\Big(\frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{z}_i} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{z}_j}\Big)/2\frac{\partial f(i,j)}{\partial\theta}.$$

Затем решаем уравнение (2.5) методом, описанным подробно при доказательстве леммы 1. Тогда тождество (2.5) дифференцируем по x_i, по x_j, по y_i, по y_j:

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_1(i) - X_1(j) + (x_i - x_j)X_{1x}(i) + \epsilon(y_i - y_j)X_{2x}(i) & = & 2(x_i - x_j)\phi_\theta(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j), \\ X_1(i) - X_1(j) + (x_i - x_j)X_{1x}(j) + \epsilon(y_i - y_j)X_{2x}(j) & = & 2(x_i - x_j)\phi_\theta(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j), \\ \epsilon(X_2(i) - X_2(j)) + (x_i - x_j)X_{1y}(i) + \epsilon(y_i - y_j)X_{2y}(i) & = & 2\epsilon(y_i - y_j)\phi_\theta(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j), \\ \epsilon(X_2(i) - X_2(j)) + (x_i - x_j)X_{1y}(j) + \epsilon(y_i - y_j)X_{2y}(j) & = & 2\epsilon(y_i - y_j)\phi_\theta(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j). \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Далее из первого уравнения вычитаем второе, а из третьего — четвертое:

$$\left\{\begin{array}{l} (x_i - x_j)(X_{1x}(i) - X_{1x}(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_{2x}(i) - X_{2x}(j)) = 0, \\ (x_i - x_j)(X_{1y}(i) - X_{1y}(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_{2y}(i) - X_{2y}(j)) = 0. \end{array}\right.$$

Теперь полученное дифференцируем дважды в следующем порядке: по x_i и x_j; x_i и y_j; y_i и x_j; y_i и y_j; x_i и $\overline{z}_j$; y_i и $\overline{z}_j$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_{1xx}(i) + X_{1xx}(j) = 0, \quad X_{1yx}(i) + X_{1yx}(j) = 0, \\ \epsilon X_{2xx}(i) + X_{1xy}(j) = 0, \quad \epsilon X_{2yx}(i) + X_{1yy}(j) = 0, \\ X_{1xy}(i) + \epsilon X_{2xx}(j) = 0, \quad X_{1yy}(i) + \epsilon X_{2yx}(j) = 0, \\ X_{2xy}(i) + X_{2xy}(j) = 0, \quad X_{2yy}(i) + X_{2yy}(j) = 0, \\ X_{1x\overline{z}}(j) = 0, \quad X_{1y\overline{z}}(j) = 0, \quad X_{2x\overline{z}}(j) = 0, \quad X_{2y\overline{z}}(j) = 0. \end{array}\right.$$

В полученных равенствах разделяем переменные:

$$X_{1xx} = X_{1xy} = X_{1yy} = X_{1x\overline{z}} = X_{1y\overline{z}} = 0, \quad X_{2xx} = X_{2xy} = X_{2yy} = X_{2x\overline{z}} = X_{2y\overline{z}} = 0.$$

Интегрируя полученную систему уравнений, имеем

$$X_{1x} = a = \mathrm{const}, \quad X_{1y} = b = \mathrm{const}, \quad X_{2x} = c = \mathrm{const}, \quad X_{2y} = d = \mathrm{const}.$$

Новую систему также интегрируем:

$$X_1 = ax + by + A(\overline{z}), \quad X_2 = cx + dy + B(\overline{z}).$$

Затем найденное подставляем в (2.6):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a(x_i - x_j) + b(y_i - y_j) + A(\overline{z}_i) - A(\overline{z}_j) + \epsilon c(y_i - y_j) & = & 2(x_i - x_j)\phi_\theta(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j), \\ \epsilon c(x_i - x_j) + 2\epsilon d(y_i - y_j) + \epsilon(B(\overline{z}_i) - B(\overline{z}_j)) + b(x_i - x_j) & = & 2\epsilon(y_i - y_j)\phi_\theta(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j). \end{array}\right.$$

Далее первое уравнение умножаем на $\epsilon(y_i - y_j)$ и из него вычитаем второе, умноженное на $(x_i - x_j)$:

$$2a\epsilon(y_i - y_j)(x_i - x_j) + b\epsilon(y_i - y_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)(A(\overline{z}_i) - A(\overline{z}_j)) + c(y_i - y_j)^2$$

$$- \epsilon c(x_i - x_j)^2 - 2\epsilon d(x_i - x_j)(y_i - y_j) - \epsilon(x_i - x_j)(B(\overline{z}_i) - B(\overline{z}_j)) - b(x_i - x_j)^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты, будем иметь $a - d = 0$, $\epsilon b + c = 0$, $b + \epsilon c = 0$, $A(\overline{z}_i) - A(\overline{z}_j) = 0$, $B(\overline{z}_i) - B(\overline{z}_j) = 0$, $A(\overline{z}) = A = \mathrm{const}$, $B(\overline{z}) = B = \mathrm{const}$. Поэтому для компонент оператора алгебры Ли имеем

$$X_1 = ax + by + A, \quad X_2 = -\epsilon bx + ay + B.$$

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии

$$X = (ax + by + A)\partial_x + (-\epsilon bx + ay + B)\partial_y + \partial_{\overline{z}}.$$

Придавая постоянным (a, b, A, B) значения $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,0,0,0)$, получаем пять базисных операторов, а должно быть шесть. Противоречие. $\square$

Функциональное уравнение (2.1) удобно переписать в виде

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) + X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2 = 0, \tag{2.7}$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f(i,j)/\partial z_i}{2\,\partial f(i,j)/\partial\theta}, \quad F_2(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f(i,j)/\partial z_j}{2\,\partial f(i,j)/\partial\theta}. \tag{2.8}$$

Из (1.6) и (1.8), очевидно, следуют аналитичность функций (2.8) и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда имеем разложение в ряд Тейлора (см. [9, гл. 11])

$$\begin{cases} F_1(\theta, z_i, z_j) = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta + \dfrac{1}{2}D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j)\theta^2 + \cdots, \\ F_2(\theta, z_i, z_j) = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta + \dfrac{1}{2}D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j)\theta^2 + \cdots. \end{cases} \tag{2.9}$$

Далее разложения (1.7) и (2.6) подставляем в тождество (2.7) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ Maple 15 (см. [10]).

Сравниваем коэффициенты перед степенью 0: $X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0$.

Сравниваем коэффициенты перед степенями 1:

$$\begin{cases} D_1(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_1(z_i) - X_1(z_j) & = & 0, \\ D_2(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) + \epsilon X_2(z_i) - \epsilon X_2(z_j) & = & 0, \\ D_1(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) - X_1(z_i) + X_1(z_j) & = & 0, \\ D_2(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) - \epsilon X_2(z_i) + \epsilon X_2(z_j) & = & 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Затем сравниваем все коэффициенты перед степенями 2:

$$\begin{cases} D_2(X_1)(z_i) + \epsilon D_1(X_2)(z_i) + D_{1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \\ -D_1(X_1)(z_i) - D_1(X_1)(z_j) - 2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) - 2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0, \\ -\epsilon D_1(X_2)(z_i) - D_2(X_1)(z_j) = 0, \\ -\epsilon D_1(X_2)(z_j) - D_2(X_1)(z_i) = 0, \\ -D_2(X_2)(z_i) - D_2(X_2)(z_j) - 2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) - 2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0, \\ D_2(X_1)(z_j) + \epsilon D_1(X_2)(z_j) + D_{1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ 2D_1(X_1)(z_i) + 2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + 2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_{1,1}(X3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \\ 2\epsilon D_2(X_2)(z_i) + 2\epsilon X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + 2\epsilon X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_{2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \\ 2D_1(X_1)(z_j) + 2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + 2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_{1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ 2\epsilon D_2(X_2)(z_j) + 2\epsilon X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + 2\epsilon X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_{2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0. \end{cases}$$

Разделяя переменные в третьем уравнении, получаем

$$-D_1(X_2)(z_i) = \epsilon D_2(X_1)(z_j) = a = \text{const},$$

следовательно,

$$D_1(X_2) = -a, \quad D_2(X_1) = \epsilon a.$$

Далее вычитаем из второго уравнения пятое:

$$-D_1(X_1)(z_i) - D_1(X_1)(z_j) = -D_2(X_2)(z_i) - D_2(X_2)(z_j),$$

откуда после разделения переменных имеем

$$D_1(X_1) = D_2(X_2).$$

Из первого и шестого уравнений системы получаем

$$D_{1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0.$$

Из последних уравнений следует, что

$$\begin{cases} D_{1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0. \end{cases}$$

Тогда $D_1(X_1) = D_2(X_2) = d = \mathrm{const}, \quad X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -d.$

Таким образом, получается результат

$$\begin{cases} D_1(X_1) = d, \quad D_2(X_1) = \epsilon a, \quad D_1(X_2) = -a, \quad D_2(X_2) = d, \\ D_{1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -d. \end{cases} \tag{2.11}$$

Сравниваем коэффициенты перед степенями 3, а затем комбинируем получаемые уравнения и разделяем переменные:

$$\begin{cases} D_{1,1}(X_1) = b, \quad D_{1,2}(X_1) = c, \quad D_{2,2}(X_1) = -\epsilon b = \mathrm{const}, \\ D_{1,1}(X_2) = -\epsilon c, \quad D_{1,2}(X_2) = b, \quad D_{2,2}(X_2) = c = \mathrm{const}, \\ 2D_1(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = -b, \quad 2D_1(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -b, \\ 2D_2(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = -c, \quad 2D_2(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -c, \\ D_{1,1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{1,1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{1,1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{1,1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{1,2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{1,2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{2,2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{2,2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Аналогично поступаем с более высокими степенями.

Полученные результаты можно просуммировать и записать компактно:

$$D_1(X_3)(z_i)\overline{F_1} = 0, \quad D_1(X_3)(z_j)\overline{F_2} = 0, \quad D_2(X_3)(z_i)\overline{F_1} = 0, \quad D_2(X_3)(z_j)\overline{F_2} = 0, \tag{2.13}$$

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i)F_1 = 0, \quad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j)F_2 = 0, \quad D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_1) = 0, \quad D_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots}(X_2) = 0, \tag{2.14}$$

причем $\overline{F_1} = F_1 - f_1(z_i, z_j) - D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta$, $\overline{F_2} = F_2 - f_2(z_i, z_j) - D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta$, $\alpha_n = 1, 2$, $\beta_m = 1, 2$, $\gamma_s = 1, 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, $m, s = 3, 4, 5, \ldots$. Из (2.14), очевидно, следует

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3) = 0, \quad \alpha_n = 1, 2, \quad n = 2, 3, 4, \ldots . \tag{2.15}$$

Лемма 4. *Справедливо неравенство* $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о Предположим противное, пусть $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 = 0$. С учетом (2.15) получаем противоречие с леммой 3. □

Таким образом, $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$. Из системы (2.13) тогда следует

$$D_{\delta_1,\delta_2,\ldots}(f_1)(z_i, z_j) = 0, \quad D_{\delta_1,\delta_2,\ldots}(f_2)(z_i, z_j) = 0,$$

где $\delta_s = 1,\ s = 3, 4, 5, \dots$.

Итак, ряды (1.7) и (2.9) обрываются и записываются в виде многочленов

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_1 &=& X_1(z) + dx + \epsilon ay + \frac{1}{2}bx^2 + cxy - \frac{1}{2}\epsilon by^2, \\ X_2 &=& X_2(z) - ax + dy - \frac{1}{2}\epsilon cx^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2, \\ X_3 &=& X_3(z) + D_1(X_3)(z)x + D_2(X_3)(z)y, \\ \multicolumn{3}{l}{F_1 = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta, \quad F_2 = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta.} \end{array}\right. \tag{2.16}$$

Первые два многочлена подставляем в первое слагаемое выражения (2.7) и приводим подобные:

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) = (x_i - x_j)(X_1(z_i) - X_1(z_j))$$
$$+ \epsilon(y_i - y_j)(X_2(z_i) - X_2(z_j)) + d\theta + \Big(\frac{1}{2}b(x_i + x_j) + \frac{1}{2}c(y_i + y_j)\Big)\theta. \tag{2.17}$$

В левую часть равенства (2.7) подставляем (2.17), а также третье и четвертое выражения из (2.16), затем учитываем (2.10)–(2.12), после преобразований получим тождественный нуль. Из (2.12), очевидно, следует

$$\left\{\begin{array}{l} D_1(X_3)(z_i)\dfrac{\partial D_1(f_1)(z_i, z_j)}{\partial z_j} = 0, \quad D_1(X_3)(z_j)\dfrac{\partial D_1(f_2)(z_i, z_j)}{\partial z_i} = 0, \\ D_2(X_3)(z_i)\dfrac{\partial D_1(f_1)(z_i, z_j)}{\partial z_j} = 0, \quad D_2(X_3)(z_j)\dfrac{\partial D_1(f_2)(z_i, z_j)}{\partial z_i} = 0. \end{array}\right.$$

Поэтому $D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_1(f_1)(z_i),\ D_1(f_2)(z_i, z_j) = D_1(f_2)(z_j)$. Тогда третья и четвертая строки системы (2.12) принимают вид

$$\left\{\begin{array}{l} 2D_1(X_3)(z)D_1(f_1)(z) = 2D_1(X_3)(z)D_1(f_2)(z) = -b, \\ 2D_2(X_3)(z)D_1(f_1)(z) = 2D_2(X_3)(z)D_1(f_2)(z) = -c. \end{array}\right. \tag{2.18}$$

Поэтому $D_1(f_1)(z) = D_1(f_2)(z)$.

Значит, последнее уравнение системы (2.11) принимает вид

$$X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i) + X_3(z_j)D_1(f_1)(z_j) = -d.$$

Разделяя переменные, получаем

$$X_3(z)D_1(f_1)(z) = -\frac{d}{2}. \tag{2.19}$$

Далее рассматриваются два случая: $D_1(f_1)(z) = 0$ и $D_1(f_1)(z) \neq 0$.

1. Пусть сначала $D_1(f_1)(z) = 0$. Тогда из (2.18) и (2.19) следует, что

$$d = b = c = 0.$$

Из (2.10) при $D_1(X_3)(z) \neq 0$ получаем

$$f_1(z_i, z_j) = \frac{X_1(z_j) - X_1(z_i)}{D_1(X_3)(z_i)}, \quad f_2(z_i, z_j) = \frac{X_1(z_i) - X_1(z_j)}{D_1(X_3)(z_j)}. \tag{2.20}$$

Иначе $D_2(X_3)(z) \neq 0$, и аналогично находим $f_1(z_i, z_j)$ и $f_2(z_i, z_j)$. Найденное подставляем в (2.8) и учитываем (2.16):

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(\theta, z_i, z_j) = \dfrac{\partial f/\partial z_i}{2\,\partial f/\partial\theta} = f_1(z_i, z_j) = \dfrac{X_1(z_j) - X_1(z_i)}{D_1(X_3)(z_i)}, \\ F_2(\theta, z_i, z_j) = \dfrac{\partial f/\partial z_j}{2\,\partial f/\partial\theta} = f_2(z_i, z_j) = \dfrac{X_1(z_i) - X_1(z_j)}{D_1(X_3)(z_j)}. \end{array}\right.$$

Приводя к общему знаменателю, имеем

$$D_1(X_3)(z_i)\frac{\partial f}{\partial z_i} = 2(X_1(z_j) - X_1(z_i))\frac{\partial f}{\partial \theta},\ D_1(X_3)(z_j)\frac{\partial f}{\partial z_j} = 2(X_1(z_i) - X_1(z_j))\frac{\partial f}{\partial \theta}. \qquad (2.21)$$

Складывая эти два выражения, приходим к дифференциальному уравнению

$$D_1(X_3)(z_i)\frac{\partial f}{\partial z_i} + D_1(X_3)(z_j)\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0,$$

интегрируя которое, получаем (см. [11, гл. 5])

$$f(\theta, z_i, z_j) = \varphi(\theta, M(z_i) - M(z_j)), \quad M'(z) = \frac{1}{D_1(X_3)(z)}.$$

Найденное подставляем в (2.21), получаем уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 2(X_1(z_j) - X_1(z_i))\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad w = M(z_i) - M(z_j), \qquad (2.22)$$

следовательно,

$$X_1(z_j) - X_1(z_i) = \psi(\theta, w) = \frac{\partial\varphi/\partial w}{2\,\partial\varphi/\partial\theta}.$$

В этом равенстве дифференцируем по z_i и по z_j: $-X'(z_i) = M'(z_i)\psi'_w$, $X'(z_j) = -M'(z_j)\psi'_w$, значит, $-X'(z_i)/M'(z_i) = \psi'_w$, $-X'(z_j)/M'(z_j) = \psi'_w$. Потом приравниваем левые части и разделяем переменные: $X'(z)/M'(z) = \alpha = \mathrm{const}$, получаем

$$X(z) = \alpha M(z) + \beta, \quad \beta = \mathrm{const}.$$

Найденное подставляем в (2.22):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} + 2\alpha w\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение [11, гл. 5], имеем

$$f(i,j) = \chi\big((x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2 - \alpha(M(z_i) - M(z_j))^2\big).$$

Затем вводим следующие замену координат и масштабное преобразование метрической функции:

a) При $\epsilon = 1$ и $\alpha < 0$: $\sqrt{-\alpha}M(z) = \overline{z}$, $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$, $\chi^{-1}(f) \to f$, тогда получаем метрическую функцию евклидовой трехмерной геометрии, которая в преждних обозначениях координат (x, y, z) имеет вид (1.9) с $\epsilon = 1$.

b) При $\epsilon = 1$ и $\alpha > 0$: $\sqrt{\alpha}M(z) = \overline{x}$, $x = \overline{y}$, $y = \overline{z}$, $\chi^{-1}(f) \to -f$, следовательно получаем метрическую функцию псевдоевклидовой трехмерной геометрии, которая в преждних обозначениях координат (x, y, z) имеет вид (1.9) с $\epsilon = -1$.

c) При $\epsilon = -1$ и $\alpha < 0$: $\sqrt{-\alpha}M(z) = \overline{z}$, $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$, $\chi^{-1}(f) \to f$, поэтому снова имеем метрическую функцию псевдоевклидовой трехмерной геометрии.

d) При $\epsilon = -1$ и $\alpha > 0$: $\sqrt{\alpha}M(z) = \overline{x}$, $x = \overline{y}$, $y = \overline{z}$, $\chi^{-1}(f) \to -f$, и также будем иметь метрическую функцию псевдоевклидовой трехмерной геометрии.

2. Пусть теперь $D_1(f_1)(z) \neq 0$. Из (2.18) и (2.19) получаем

$$D_1(X_3)(z) = -\frac{b}{2D_1(f_1)(z)}, \quad D_2(X_3)(z) = -\frac{c}{2D_1(f_1)(z)}, \quad X_3(z) = -\frac{d}{2D_1(f_1)(z)}. \qquad (2.23)$$

Следует заметить, что в силу леммы 4 $b^2 + c^2 \neq 0$ и с точностью до переобозначений будем считать $b \neq 0$. Тогда система (2.20) с учетом (2.23) принимает вид

$$f_1(z_i, z_j) = \frac{2(X_1(z_i) - X_1(z_j))D_1(f_1)(z_i)}{b}, \quad f_2(z_i, z_j) = \frac{2(X_1(z_j) - X_1(z_i))D_1(f_1)(z_j)}{b}.$$

Найденное подставляется в выражения (2.8) с учетом рядов Тейлора (2.9):

$$F_1(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f/\partial z_i}{2\,\partial f/\partial \theta} = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i)\theta = \frac{2(X_1(z_i) - X_1(z_j))D_1(f_1)(z_i)}{b} + D_1(f_1)(z_i)\theta,$$

$$F_2(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f/\partial z_j}{2\,\partial f/\partial \theta} = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_j)\theta = \frac{2(X_1(z_j) - X_1(z_i))D_1(f_1)(z_j)}{b} + D_1(f_1)(z_j)\theta.$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{D_1(f_1)(z_i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_i} = 2\Big(\dfrac{2(X_1(z_i) - X_1(z_j))}{b} + \theta\Big)\dfrac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \dfrac{1}{D_1(f_1)(z_j)}\dfrac{\partial f}{\partial z_j} = 2\Big(\dfrac{2(X_1(z_j) - X_1(z_i))}{b} + \theta\Big)\dfrac{\partial f}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{2.24}$$

В данной системе $2(X_1(z_i) - X_1(z_j))/b + \theta \neq 0$ и $2(X_1(z_j) - X_1(z_i))/b + \theta \neq 0$, поскольку противное противоречит неравенствам (1.6). Складывая выражения из (2.24), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{D_1(f_1)(z_i)}\frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{1}{D_1(f_1)(z_j)}\frac{\partial f}{\partial z_j} = 4\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Осуществим замену координат: $\displaystyle\int D_1(f_1)(z)dz = \overline{z}$. Тогда в новых координатах получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} - 4\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0,$$

откуда после интегрирования (см. [11, гл. 5]) следует

$$f(\theta, \overline{z}_i, \overline{z}_j) = \varphi(\theta e^{4\overline{z}_i}, \theta e^{4\overline{z}_j}).$$

Очевидно, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0$, где $u = \theta e^{4\overline{z}_i}$, $v = \theta e^{4\overline{z}_j}$, поскольку иначе $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} = 4u\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 4v\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, что противоречит неравенствам (1.6). Этот интеграл подставляем в (2.24) с учетом сделанной выше замены и приводим подобные:

$$\big(b\theta - 2(X_1(\overline{z}_i) - X_1(\overline{z}_j))\big)u\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \big(b\theta + 2(X_1(\overline{z}_i) - X_1(\overline{z}_j))\big)v\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Из данного равенства следует

$$\frac{b\theta - 2(X_1(\overline{z}_i) - X_1(\overline{z}_j))}{b\theta + 2(X_1(\overline{z}_i) - X_1(\overline{z}_j))} = \eta(u, v) = \frac{v\,\partial\varphi/\partial v}{u\,\partial\varphi/\partial u}.$$

Методом дифференцирования и разделения переменных несложно доказать, что $\eta(u, v) = 1$. Тогда в последнем выражении, приводя к общему знаменателю, получим простое дифференциальное уравнение

$$u\frac{\partial \varphi}{\partial u} - v\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

интегрируя которое [3], имеем функцию

$$f(i, j) = \chi\left([(x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2]^2 e^{4(z_i + z_j)}\right).$$

Затем вводим масштабное преобразование метрической функции $\sqrt{\chi^{-1}(f)} \to f$. Таким образом, получаем метрическую функцию (1.10) трехмерного особого расширения евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий.

Вторая часть теоремы уже доказана в работе [12], где найдены базисные операторы (1.11), (1.12). Метод доказательства проиллюстрирован в леммах 1 и 3.

Теорема доказана полностью. □

Заключение

Итак, поставленная выше задача об аналитическом вложении евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий полностью решена. В результате получились трехмерные геометрии максимальной подвижности: евклидова, псевдоевклидова, особые расширения евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий. Полученные метрические функции содержатся в классификации В. Х. Лева [4], которая, как говорилось выше, построена совершенно другим методом. Аналогично можно решить задачи об аналитическом вложении симплектической, симплициальной, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и собственно гельмгольцевой двумерных геометрий, т. е. найти все трехмерные геометрии максимальной подвижности с метрическими функциями вида

$$f(i,j) = f(x_i y_j - x_j y_i, z_i, z_j),$$

$$f(i,j) = f\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, z_i, z_j\right),$$

$$f(i,j) = f\left(\frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j}, z_i, z_j\right),$$

$$f(i,j) = f\left((x_i - x_i)^2 e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, z_i, z_j\right),$$

$$f(i,j) = f\left([(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, z_i, z_j\right),$$

где $\beta, \gamma = \mathrm{const}$, $\beta \neq -1, 0, 1$, $\gamma \neq 0$. Первая из них решена в работе [6].

Задачу о вложении можно также поставить и для трехмерных геометрий, т. е. когда метрические функции четырехмерных геометрий ищутся в виде

$$f = \chi(g(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), w_i, w_j),$$

где g — метрические функции известных трехмерных геометрий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Михайличенко Г.Г.** О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 99–113.
2. **Михайличенко Г.Г.** Полиметрические геометрии. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. 144 с.
3. **Михайличенко Г.Г.** Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 4. С. 803–805.
4. **Лев В.Х.** Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные систем ИМ СОАН СССР. 1988. Вып. 125. С. 90–103.
5. **Кыров В.А.** Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 38–51.
6. **Кыров В.А.** Функциональные уравнения в симплектической геометрии // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №2. С. 149–153.
7. **Кыров В.А.** Вложение феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(N, 2)$ в феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(N+1, 2)$ // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, №3. С. 312–323. doi: 10.20537/vm160302.
8. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 344 с.
9. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 2 т. М.: Физматгиз, 1963. Т. 2. 656 с.
10. **Дьяков В.** Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК ПРЕСС, 2014. 800 с. ISBN: 978-5-94074-751-2 .

11. **Эльсгольц Э.Л.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
12. **Кыров В.А.** Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий: Приложение к книге Г. Г. Михайличенко “Полиметрические геометрии”. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. 144 с.

Кыров Владимир Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
кафедра физики и информатики
Горно-Алтайский госуниверситет, г. Горно-Алтайск
e-mail: kyrovVA@yandex.ru

Поступила 20.06.2016

Михайличенко Геннадий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
кафедра физики и информатики
Горно-Алтайский госуниверситет, г. Горно-Алтайск
e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

REFERENCES

1. Mikhailichenko G.G. Group and phenomenological symmetries in geometry. *Sib. Math. J.*, 1984, vol. 25, pp. 764–774.
2. Mikhailichenko G.G. *Polimetricheskie geometrii* [Polymetric geometries]. Novosibirsk: Novosibirskii Gos. Universitet Publ., 2001, 144 p.
3. Mikhailichenko G.G. Two-dimensional geometries. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1981, vol. 24, pp. 346–348.
4. Lev V.Kh. Three-dimensional geometries in the theory of physical structures. *Vychislitel'nye sistemy*, Novosibirsk: Institute of Mathematics Publ., 1988, iss. 125, pp. 90–103 (in Russian).
5. Kyrov V.A. Functional equations in pseudo-Euclidean geometry. *Sib. Zh. Ind. Mat*, 2010, vol. 13, no. 4, pp. 38–51 (in Russian).
6. Kyrov V.A. Functional equations in symplectic geometry. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 149–153 (in Russian).
7. Kyrov V.A. Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N, 2)$ into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank (N + 1, 2). *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 312–323 (in Russian). doi: 10.20537/vm160302.
8. Ovsyannikov L.V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii* [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 344 p.
9. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course in differential and integral calculus]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, vol. 2, 656 p.
10. D'yakonov V. *Maple* 10/11/12/13/14 *v matematicheskikh raschetakh* [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moscow: DMK-Press, 2014, 800 c. ISBN: 978-5-94074-751-2 .
11. Elsgolts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and the calculus of variations]. Moscow: Nauka, 1969, 424 p.
12. Kyrov V.A. *Shestimernye algebry Li grupp dvizhenij trehmernyh fenomenologicheski simmetrichnyh geometrij* [Six-dimensional Lie algebras of the groups of motions of three-dimensional phenomenologically symmetric geometries], Appendix to the book G. G. Mikhailichenko, Polymetric geometries, Novosibirsk: Novosibirskii Gos. Universitet Publ., 2001, 144 p.

The paper was received by the Editorial Office on June 20, 2016.

Vladimir Aleksandrovich Kyrov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, 649000 Russia, e-mail: kyrovVA@yandex.ru .

Gennadii Grigor'evich Mikhailichenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, 649000 Russia, e-mail: mikhailichenko@gasu.ru .